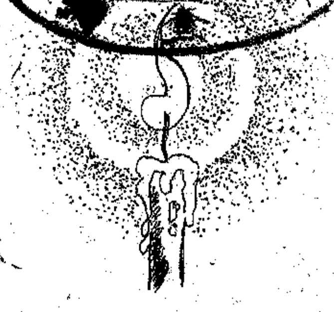
絶熱圖解說

田邊三郎編



臺灣省氣象局
測候電訊講習班

中華民國三十五年九月

参考文献

J. E. Fjeldstad Graphische Methoden zur Ermittelung Adiabatischer Zustandsänderungen Feuchter Luft Geoph. Publ. Vol III NO 13 (1925)

岡田武松 理論氣象學 上巻

A. Refsdal Aerologische Diagrammpapiere

C. G. Rossby Thermodynamics applied to Air Mass Analysis

Über Aerologische Diagrammpapiere Internationale Meteorologische Organisation, Internationale Aerologische Kommission

目次

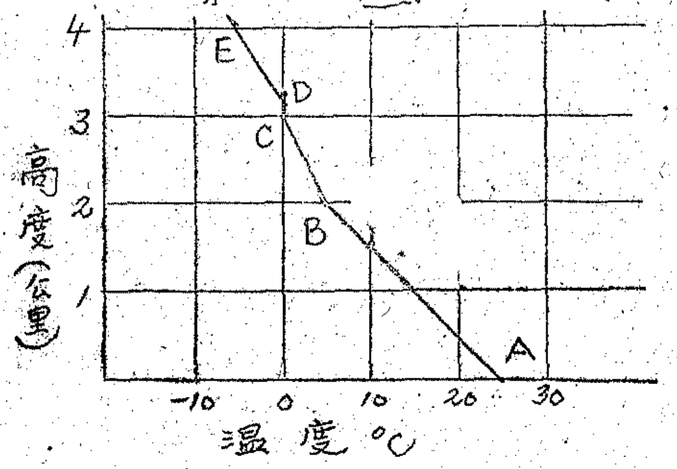
§1 含有水蒸氣的空氣之絶熱上昇

含有水蒸氣的空氣作上昇運動時，經過以下四個絶熱過程

1. 乾燥級 dry stage
2. 成雨級 rain stage
3. 成雹級 hail stage
4. 成雪級 snow stage

乾燥級 是第一个過程，在這過程中沒有水蒸氣的凝結 (condensation) 現象發生，而其氣温遞減率 (lapse-rate) 大約一定，就是 1°C/100公尺． 上昇空氣的温度漸々低下來，最後達到露点 (dew point) 假如空氣繼續上昇，即發生凝結，而氣温最後達到零度，這個過程就是成雨級 到了冰点氣温固定在零度，等全部的水滴變成冰以後才繼續下降，這過程就是零度等温層或成雹級 全部的水滴都變成冰以後，若空氣的上昇運動繼續進行，氣温降到零度以下，水蒸氣乃直接變雪，這是成雪級 這四過程可以次圖 (第一圖) 表示之

第一圖



AB 乾燥級
BC 成雨級
CD 成雹級
DE 成雪級

普遍在現代氣象界我們用乾燥級成雨級及成雪級

完全乾燥空氣之氣壓及溫度的關係可以包桑公式 (Poisson's equation) 表示

$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^K, \quad K = \frac{AR}{c_p} \quad \text{-----} \ (1) ※$$

T_0 表絕對溫度, P_0 表氣壓 (均最初狀態)

$A = \frac{1}{J} = 2.389 \times 10^{-8}$ calorie/erg　J: 熱功當量

$R = 2.8687 \times 10^{6}$ erg/grad = 乾燥空氣氣體常數

$C_p = 0.2399$ = 乾燥空氣定壓比熱

若P是標準的 (例如 $P = 1000$ mb) T就是位溫 (potential temperature), 我們以 θ 表之, 就是

$$\Theta = T_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^K = T_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{0.2884} \quad \text{---------} \ (2)$$

※ 從熱力學公式，若單位質量的乾燥空氣得熱量 dQ，溫度上昇 dT 容積增大 dv

則 $dQ = C_p dT - Av\,dp$

但是絕熱變化時 $dQ=0$

因此 $c_p dT - Av\,dp = 0$

由 Boyle-Charle's law $pv=RT$

$\therefore \quad \dfrac{dT}{T} - \dfrac{AR}{c_p}\dfrac{dp}{p} = 0$

積分之

$$\log T - \log p^{\frac{AR}{c_p}} = \text{const}$$

或 $T p^{-\frac{AR}{c_p}} = \text{const}$

則 $T p^{-\frac{AR}{c_p}} = T_0 P_0^{-\frac{AR}{c_p}}$

或 $T = T_0\left(\dfrac{P}{P_0}\right)^{\frac{AR}{c_p}}$ 這是包桑方程式

q. e. d.

實在的空氣並不完全乾燥，而其含有水蒸氣的、那末這含有水蒸氣的空氣之上昇運動結果如何？

第一在乾燥級

$$\log p - m_1 \log T = \text{const} \quad \text{------ (3)}$$

但 $m_1 = \dfrac{c_p}{AR} \times \dfrac{1 + x\frac{c_p'}{c_p}}{1 + \frac{x}{\varepsilon}}$

$c_p = 0.2399$ 乾燥空氣之定压比熱

$c_p' = 0.4574$ 水蒸氣之定压比熱

$\epsilon = 0.622$ 水蒸氣比重（對空氣）

x = 水氣混合比

在乾燥級 混合比 (mixing ratio)

$x = 0.622 \frac{f}{p-f}$ 是一定的.

在此我們假定 x 為 10，以 (3) 計算的結果和以 (1) 計算的結果差不多一樣的. 所以在乾燥級 我們用公式 (1)。

其次應該考察 成雨級過程，在此過程發生水蒸氣的凝結，因此，雖水分之總量 x 不變，飽和混合比 (saturation mixing ratio) $\xi = 0.622 \frac{E}{p-E}$ 却有變化. 所以方程式是

$$\log(p-E) - \frac{a_2}{p-E} - m_2 \log T = const \text{ ----- } (4)$$

但 $a_2 = \frac{Mr}{ART} \epsilon E$

$$m_2 = \frac{c_p}{AR}\left(1 + x\frac{c}{c_p}\right)$$

E = 飽和水蒸氣压力

$\xi = \frac{\epsilon E}{p-E}$

$c = 1$，水之比熱

$r = 597.3 - 0.57\,t$ 水之蒸発熱

$M = \log_{10} e = 0.4343$ 模數

由上述常數，可以計算 a_2 及 m_2 如下

$$a_2 = 3.94 \frac{rE}{T} \text{ ---------------- } (5)$$

$$m_2 = 3.47(1+4.186x) \text{ ----------- } (6)$$

普通我們取 $x=10$（一般之平均值）

所以 $m_2 = 3.61$ ----------- (7)

実際上並不一定的，有的時候會小到 $x=1$，有時會大到 $x=20$；但是其誤差極小、在実用上，我們決定 $x=10$，

第三過程就是成雪級，這和成雨級一樣的，但是常數要改變，

$$\log(p-E) - \frac{a_4}{p-E} - m_4 \log T = const \text{ ---- } (8)$$

但 $a_4 = \dfrac{ML}{ART}\epsilon E$

$$m_4 = \frac{c_p}{AR}\left(1+x\frac{c_i}{c_p}\right)$$

但 $L = 677$ 昇華熱（heat of sublimation）
$c_i = 0.5$ 冰之比熱

因此 $m_4 = 3.47$ （假定 $x=0$）------ (9)

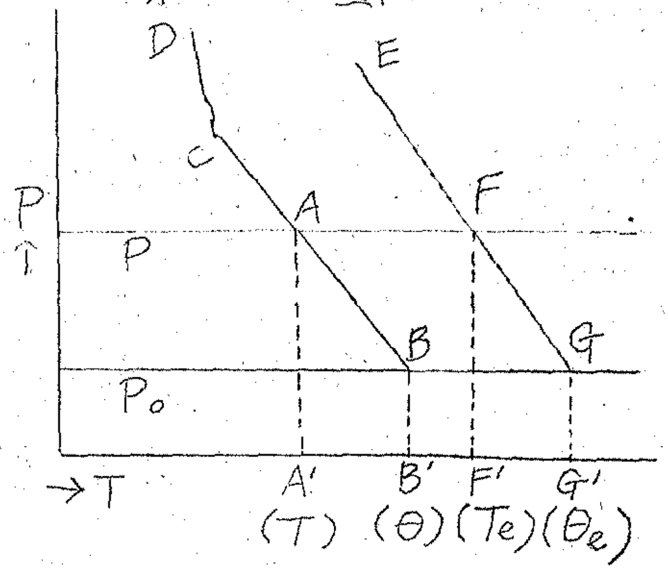
$$a_4 = 2668\frac{E}{T} \text{ ----------- } (10)$$

§2 位温（Potential temperature）
相當位温（Equivalent Potential temperature）
相當温度（Equivalent temperature）

第二圖中，橫軸表温度，縱軸表氣压、P_0 表示標準氣压（如1000 mb），点A表示

空氣之狀態点温度爲T,氣压爲P. 若使点A依乾絶熱線降下來到標準氣压P_0,温度達到B',這是位温Θ

第二圖



這空氣A若依乾絶熱線上昇起來,在点C達到凝結点以後便改以濕絶熱線(wet adiabatic) CD上昇去. 若此空氣在大氣之上際放出全部的水汽、而依乾絶熱線EF再降下來、到了氣壓P,温度爲F',這是相等温度Te 若繼續下降,最後達到標準氣压P_0,温度達到G',這是相當位温

那末Θ_e的公式如何?

首先我們考慮假絶熱成雨級(pseudo-adiabatic rain stage)

$$(c_p + x c_p')\,dT - ART\frac{dP_d}{P_d} + Td\left(\frac{rx}{T}\right) = 0 \text{ ------ (11)}$$

P_d表示乾燥空氣之分压(partial pressure)

但是xc_p'比c_p小很多,可以省去,以得

$$C_p \frac{dT}{T} - AR \frac{dP_d}{P_d} + d\left(\frac{rx}{T}\right) = 0$$

積分之

$$c_p \log T - AR \log P_d + \frac{rx}{T} = const \text{ ------(12)}$$

在此 乾燥空氣之分壓位温 θ_d (partial potential temperature of dry air) 為

$$\theta_d = T\left(\frac{P}{P-E}\right)^{\frac{AR}{c_p}} \text{ 或 } \frac{T}{\theta_d} = \left(\frac{P_d}{P}\right)^{\frac{AR}{c_p}} \text{ ----(13)}$$

故

$$\log T - \log \theta_d = \frac{AR}{c_p}(\log P_d - \log P)$$

或 $c_p \log T - c_p \log \theta_d = AR \log P_d - AR \log P$ ----(14)

(12) 減 (14)、得

$$c_p \log \theta_d - AR \log P + \frac{rx}{T} = const \text{ -----(15)}$$

本來飽和空氣由假絶熱變化上昇起來放出全部的水分、以後再降下來而達到標準氣压、所以

$$c_p \log \theta_e - AR \log P = const \text{ ---------(16)}$$

由 (15) 及 (16)

$$c_p \log \theta_e = c_p \log \theta_d + \frac{rx}{T}$$

就是

$$\theta_e = \theta_d \, e^{\frac{rx}{c_p T}} \text{ ----------------(17)}$$

其中 $\theta_d = T\left(\frac{P}{P_d}\right)^{\frac{AR}{c_p}}$

§3 混合比(mixing ratio) 熵(Entropy)及重力位(Geopotential)

(甲) 混合比 普通空氣含有水蒸氣，現在我們定義與單位質量之乾燥空氣共存之水蒸氣量為混合比，以 x 表之。現有 $(1+x)$ 克之空氣，其压力 P，溫度 T 而容量 v，那末乾燥空氣之压力是 $p-f$（但 f 是水蒸氣張力），所以

$$(p-f)v = R_d T, \quad fv = xR_wT$$

R_d 為乾燥空氣之氣体常數

R_w 為水蒸氣之氣体常數

$$\therefore \quad \frac{f}{p-f} = x\frac{R_w}{R_d}$$

但

$$\frac{R_d}{R_w} = 0.622 \quad \text{------------} (18)$$

$$\therefore \quad x = 0.622\frac{f}{p-f} \quad \text{------------} (19)$$

乙 比濕(Specific humidity)

1克之濕空氣中的水蒸氣量 S 可以稱為比濕。首先由氣体的法則

$$f = R_w \sigma_w T \quad \text{------------} (20)$$

$$p-f = R_d \sigma_d T \quad \text{------------} (21)$$

σ_d 及 σ_w 表示乾燥空氣及水蒸氣之密度

是混合空氣之密度是 $\sigma_d+\sigma_w$，但

$$\sigma_d=\frac{p-f}{R_d T},\quad \sigma_w=\frac{f}{R_w T}$$

∴

$$\sigma_d+\sigma_w=\frac{p-f}{R_d T}+\frac{f}{R_w T}$$

因此比濕是

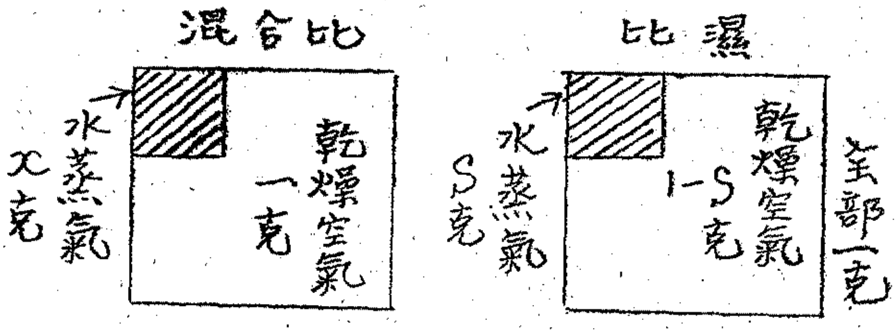
$$S=\frac{\sigma_w}{\sigma_d+\sigma_w}=\frac{\dfrac{f}{R_w T}}{\dfrac{p-f}{R_d T}+\dfrac{f}{R_w T}}$$

結果是

$$S=0.622\frac{f}{p-0.377f} \quad \text{-----------------(22)}$$

混合比及比濕可以表現如第三圖

第三圖



丙 <u>熵</u> Entropy

在乾燥空氣之絕熱變化，其熵 φ_a 如下

$$\varphi_a=C_p\log\theta+const=C_p\log\frac{T}{T_0}-AR\log\frac{p}{p_0} \quad \text{--------(23)}$$

若我們設立溫度之基準為 $100^\circ K$，氣壓之基準為 $1000\,mb$，而 φ_a 用焦耳單位表示，結果是

$$\varphi_a = 2.318(\log\theta - 2) \text{ ---------- } (24)$$

要加在濕絕熱過程，

$$\varphi = c_p \log\theta_e + \text{const} \text{ ------------ } (25)$$

丁 重力位 (Geopotential)

重力位就是在海面上高度 Z 的單位質量之位能 (potential energy)

就是

$$\phi = \int g\, dZ$$

若假設 g 一定

$$\phi = gZ \text{ 或 } \phi = g(Z - Z_0) \text{ ---------- } (26)$$

§4 絕熱圖之組成

在前三節已說明了關於含有水蒸氣的空氣之絕熱上昇過程、現在我們可以適當的數值代入上述的各過程方程式而繪成絕熱圖（Adiabatic chart）。各種絕熱圖只在其坐標之種類不同，其基本式是一樣的、主要的是計算乾絕熱線，濕絕熱線，最大混合比線等。

首先我們舉出現代世界各國使用的主要絕熱圖概略、如第一表

第一表 主要絕熱圖要目

種類 ＼ 要目	橫軸	縱軸	溫度範圍	压力範圍
Fjeldstad	T	P	$-60 \sim +40^{\circ C}$	$1100 \sim 200^{mb}$
Stüve 圖	T	P^{K}	$-93 \sim +40^{\circ C}$	$1050 \sim 30^{mb}$
美國假絕熱圖	T	P^{K}	$-45 \sim +40^{\circ C}$	$1050 \sim 400^{mb}$
Thephigramm	T	$\log\theta$	$-45 \sim +35^{\circ C}$	$-17 \sim +80^{\circ C}_{\theta}$
Schinze θ-gramm	θ_e	P	$-20 \sim 50^{\circ C}_{\theta_e}$	$1050 \sim 450^{mb}$
Aerogramm	$\log T$	$T\log P$	$-90 \sim +70^{\circ F}$	$1050 \sim 200^{mb}$
Rossby Diagramm	x	$\log\theta_d$	$0 \sim 20^{g/kg}$	$-22 \sim +77^{\circ C}_{\theta_d}$
logT logP 圖	$\log T$	$\log P$	$-40 \sim +80^{\circ F}$	$1050 \sim 400^{mb}$
Emagramm	T	$\log P$	$-40 \sim +40^{\circ C}$	$800 \sim 200^{mm}$

其次為計算乾絶熱線如[illegible]說明

用公式(2)

$$\theta = T_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{0.288+} \quad \text{-----------------} (2)$$

如 Emagramm 係以氣压及氣溫為主軸的絶熱圖 我們首先準備由θ及T求P的計算表 那末可以畫指定位溫的乾絶熱線、在第二表計算一部份的數值、這可以藉着考案的位溫計算尺計算※

第二表 從位溫θ及氣溫T求压力P之表

標準氣压 $P=750^{mm}$ 或 1000^{mb}

$\theta-273$ \ t	−60°C	−40°C	−20°C	0°C	20°C	40°C
−40	549.0 mm	750.0 mm				
−20	412.0	562.5	750.0 mm			
0	317.0	431.0	575.8	750.0 mm		
20	248.0	338.0	450.0	586.2	750.0 mm	
40	197.0	269.3	358.5	467.0	597.0	750.0 mm
60	159.0	217.0	288.8	376.0	480.8	604.5
80	129.8	177.7	235.5	306.8	392.0	493.0
100	107.2	146.2	194.5	253.5	324.0	408.0
120	89.4	122.2	162.6	211.8	270.6	340.2

※田邊三郎 溫位計算尺及水蒸氣張力計算尺
台湾總督府氣象台彙報 第一號

<u>濕絶熱線</u> 濕絶熱線即等相等位温線可以計算如下、成而級公式(4)(5)及(7)

$$\log(p-E)-\frac{a_2}{p-E}-3.61\log T=\text{const} \quad ---(4)$$

$$a_2=3.94\frac{rE}{T} \quad ---(5)$$

改變(4)得

$$R=\log(p-E)-\frac{a_2}{p-E}=3.61\log T-S \quad ----(27)$$

$$S=\left[3.61\log T+\frac{a_2}{p-E}-\log(p-E)\right]_{p=p_0,\ T=T_0} \quad -----(28)$$

那末從一定点($p=p_0$, $T=T_0$)出發的濕絶熱線有一定的S值、所以我們在第一步如P_0採用750mmHg or 1000mb而以公式(28)計算與種々的T_0（普通如30°, 28°, 26°等每2度）對應的S。其次以公式(27)的右邊計算與種々的T對應的R、一方面以公式(27)的左邊計算R（從p及T或換言之從p及E）那末從這二个計算結果的一致点我們求得公式(4)所表示之濕絶熱線的P及T之關係。

在Fjeldstad的計算表P_0採用750mmHg而T_0採用如42°, 40°等每2度。

在現在使用的絶熱圖、<u>濕絶熱線</u>有指定的<u>相當位温</u>（比如每2度或每5度）所以我們用公式(27)及(28)計算時應該考慮如θ_e有指定的數值。

θ_e, P 及 T 的關係是如既述(17)

$$\theta_e = T\left(\frac{P}{P-E}\right)^{\frac{AR}{c_p}} \cdot e^{\frac{rx}{c_pT}} \text{ ---------- } (29)$$

若 $P=750^{mm}Hg$ 或 θ_e 決定 那末可以決定T 這樣我們可以以公式(28)(29)計算 θ_e, T 及 S 的數值如第三表。但是在第三表相當低溫到了12度以下 出發点的溫度已降下零度以下 這不是成雨級而是成雪級。我們必須用成雪級的公式。

第三表 S表 $\theta_e > 285°K$ $p = 750^{mm}Hg$

$\theta_e - 273$	$T - 273$	E mmHg	S	$\theta_e - 273$	$T - 273$	E mmHg	S
180	37.7	48.9	6.66080	60	18.7	16.2	6.20772
160	35.7	43.8	59492	50	15.8	13.5	16275
140	33.4	38.6	52689	40	12.5	10.9	11622
120	30.7	33.1	45334	30	8.7	8.4	06740
100	27.5	27.5	37641	20	4.3	6.2	02019
80	23.4	21.6	29143	16	2.2	5.4	5.99736
70	21.2	18.9	25032	12	0.2	4.6	97666

總而言之，在成雨級，即在冰点以上出發点的压力若一定，那末可以求得與種々之溫度對應的S。可是在成雪級 r 及 a_4 數值和成雨級的不同，所以不可能使用(28)及(29)所計算的結果。

普通從第三表計算的濕絕熱線達到溫度零度時所求得的氣压就是成雪級的出發点、

現在我們計算氷点以上的場合、就是用第三表的 S 而用公式(27) 從 Θ_e 及 T 計算 p 如第四表、

第四表 從 Θ_e 及 T 求氣压 p (氷点以上)

$P_0 = 750$ mm Hg

t \ $\Theta_e - 273$	180	160	140	120	100	90	80	70	60
36	707.3 mm	757.0 mm							
32	617.3	663.1	715.9	780.5					
28	539.0	580.7	629.3	689.0	761.0				
24	470.1	508.9	553.6	608.8	675.5	717.2	762.0		
20	411.0	446.2	487.4	538.5	600.4	639.2	681.0	725.3	775.4
16	359.3	391.6	429.7	477.0	534.6	570.8	609.8	651.3	698.2
12	314.8	344.6	379.8	423.8	477.5	511.3	547.8	586.7	630.8
8	276.0	303.7	336.4	377.3	427.5	459.1	493.4	529.9	571.3
4	242.8	268.4	298.8	337.0	383.9	413.6	445.8	480.0	519.0
0	214.4	238.2	266.5	302.2	346.2	374.1	404.3	436.6	473.3

在成雪級,與成雨級一樣的

$$R = \log(p-E) - \frac{a_4}{p-E} = 3.47\log T - S' \text{-----} (30)$$

$$S' = \left[3.47\log T + \frac{a_4}{p-E} - \log(p-E)\right]_{p=p_0',\ T=273} \text{-----} (31)$$

其中 P_0' 表示在第四表，即温度達到零度時獲得的氣压是也. 用這 P_0' 我們可以計算一部份對於冰点的 S' 如下.

第五表 S'表 $T=273$

$\theta_e - 273$	P_0'	S'
180	214.4 mm	6.34516
160	238.2	27675
140	266.5	20636
120	302.2	13035
100	346.2	05108
90	374.1	00709
80	404.3	5.96381
70	436.6	92168
60	473.3	87815

以上計算的結果不過是絶熱線之一部份. 若出發点，開始在成雪級時，公式(31)採用 P 如 $750^{mm}Hg$ 以計算對於指定的 θ_e 相等的 T. 現在我們計算用第五表的 S' 及公式(30) 成雪級的一部份，如第六表.

從第四表及第六表我們可以畫濕絶熱圖如第四圖

第六表 從θ_e及T求氣压p (冰点以下)

t \ θ_e-273	180	160	140	120	100	90	80	70	60
0	214.4 mm	238.2 mm	266.5	302.2	346.2	374.1	404.3	436.6	473.3
−4	186.6	208.7	235.0	268.3	309.5	335.8	364.2	394.6	427.1
−8	164.0	184.5	209.1	240.4	279.1	303.8	330.5	359.3	391.9
−12	145.1	164.3	187.4	216.8	253.3	276.5	301.8	328.9	359.7
−16	129.5	147.6	169.3	197.0	231.4	253.4	277.2	302.8	332.0
−20	119.1	136.0	156.4	182.5	215.0	235.8	258.4	282.6	310.2

以上獲得主要的絶熱線之數值.

最後還得計算最大混合比線

就是 $$x = 0.622\frac{E}{p-E} \text{ ------------------ } (32)$$

變形之 $$p = E\left(1+\frac{0.622}{x}\right) \text{ ------------ } (33)$$

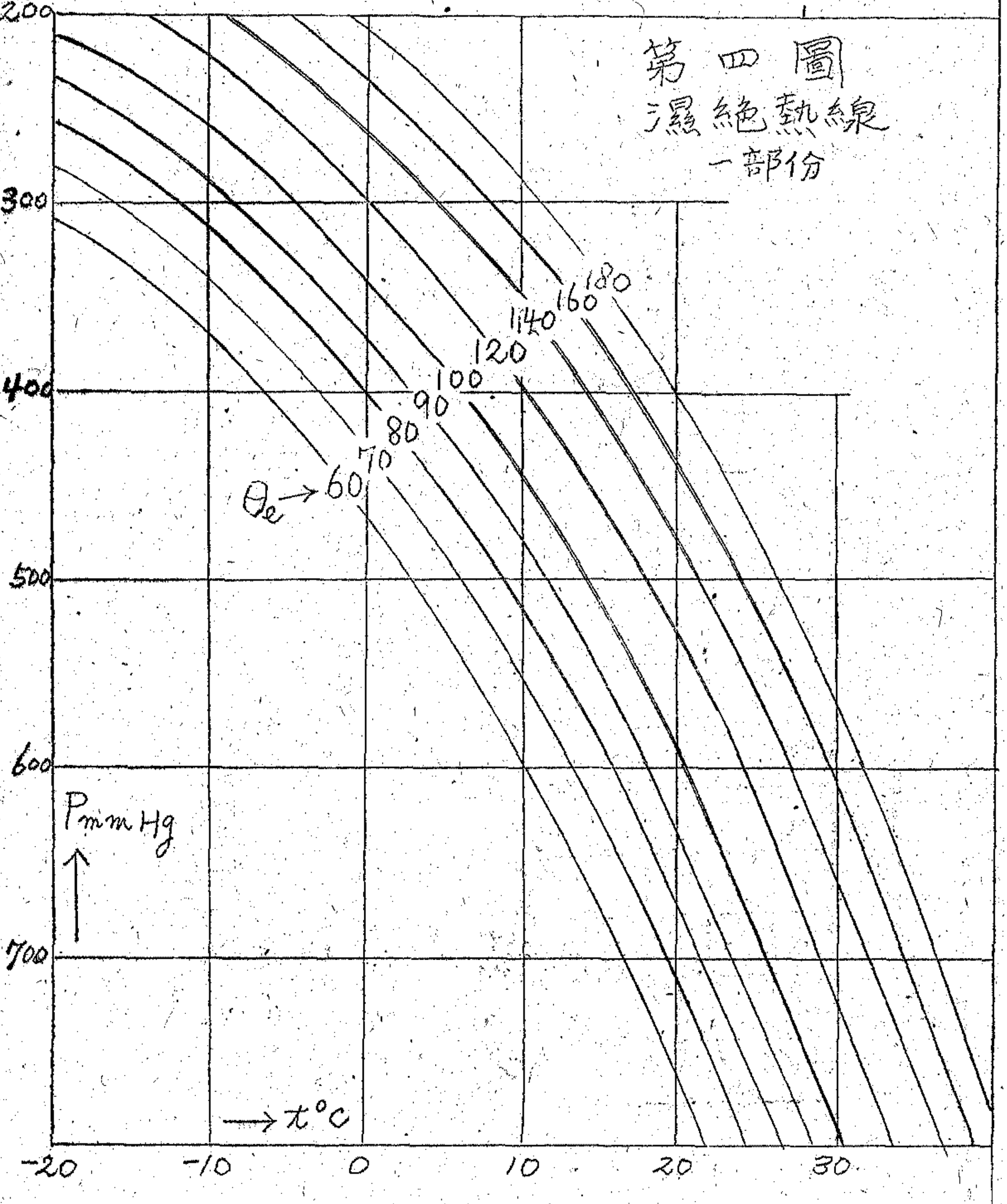
由T及x或由E及x計算p結果是可以畫等混合比線、但是x普通表示乾燥空氣1 kilogramm中的水蒸氣量、所以(33)應該改變如

$$p = E\left(1+\frac{622}{x}\right) \text{ ------------ } (34)$$

第七表是(34)的結果

第七表 從t及x求P

x \ t	35	30	25	20	15	10	5	0	-5	-10	-15	-20	-25	-30	-35	-40
0.1																5785
0.4													7315	4350	2655	1447
0.8												6010	3654	2180	1323	72.4
1.2											6439	4009	2441	145.4	88.3	
1.6										7583	4832	3009	1832	109.1		
2.0										6071	3860	2409	1466	874		
3.0									6270	4044	2583	160.8	97.9			
4.0								7168	4711	3045	1941	120.8	73.6			
5.0							8164	5744	3771	2446	1555	968				
7.0						8222	5850	411.6	2705	1749	111.4					
10					8007	578.3	411.4	289.4	190.2	123.0						
12					6694	4834	343.9	2420	157.0							
14				7908	5756	415.7	2958	208.1	136.7							
16				6928	5052	3649	2596	1826	120.0							
18				618.7	4505	325.4	231.5	162.9								
20			7550	558.5	4067	293.7	209.0	147.0								
25		8152	608.7	450.3	327.7	2368										
30	9079	6845	5112	378.1	2753											
35	7842	5913	441.5	326.6												


第四圖
濕絶熱線
一部份
200
300
400
500
600
700
P mm Hg
-20
-10
0
10
20
30
→ t°C
θe → 60
70
80
90
100
120
140
160
180

§5 現用種々的絶熱圖

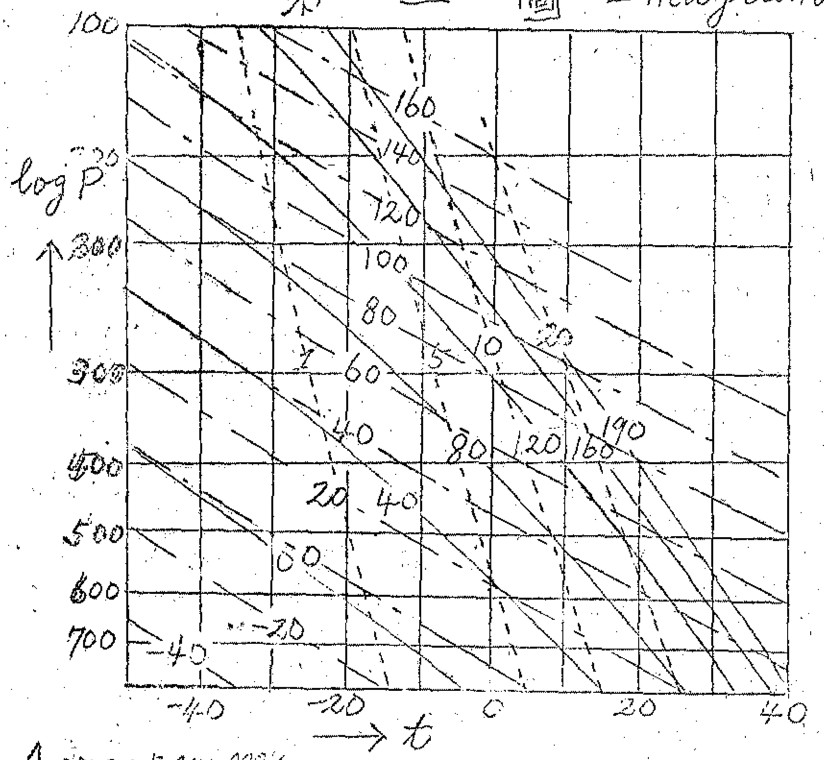
現在世界主要國使用的絶熱圖概略要目已見於第一表. 欲知其詳,可参閱國際氣象委員會國際高空委員會出版的高空圖表※ 現在著者擬就 *Emagramm, Aerogramm, Thephigramm* 及 *Rossby diagramm* 等四種圖表之組成方法及其主要目的分别加以說明。

(甲) Emagramm

横軸是温度T的直線標度 (linear scale), 縱軸是氣压的對數標度 (logarismic scale), 所以等温線 (isothermal) 是與縱軸平行的直線. 乾絶熱線可由第二表画出, 濕絶熱線即等相當位温線可由第四表及第六表画出, 最大混合比線可由第七表画出. Emagramm 的概略如第五圖. 圖中斜實線 (Oblique real line) 表示濕絶熱線, 鎖線 (chain line) 表示乾絶熱線, 点線 (dotted line) 表示最大混合比線. Emagramm 的主要目的是研究氣團的穩定與不穩定程度或為追求焚風現象的氣流下落.

※ Über Aerologische Diagrammpapiere
Internationale Meteorologische Organization
台省氣象局圖書館有此書

第五圖 Emagramm



(乙) Aerogramm

Aerogramm係挪威的 A. Refsdal 創製的圖表現在全世界尤其是歐洲用的很普遍，這很有用的圖表的，橫軸是溫度T的對數標度，縱軸是重力位 (Geopotential) gz 或 $-T\log P$，但是 gz 與 $-T\log P$ 是一樣的。其證明如次：

由大氣靜力學的方程式

$dp = -\rho g dz$ （ρ 表空氣密度 g 重力加速度）

或 $dp = -\frac{pg}{RT} dz$ （因 $pv = RT$）

因此在等溫大氣 (isothermal atmosphere) 從 p_0 到 p_1 積分之得以下關係

$$T\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R}\int_{z_0}^{z_1} dz$$

$$T\log\frac{P_1}{P_0} = -\frac{g}{R}(Z_1 - Z_0)$$

$$R(T\log P_0 - T\log P_1) = gZ_1 - gZ_0 = gZ \text{ ------ } (35)$$

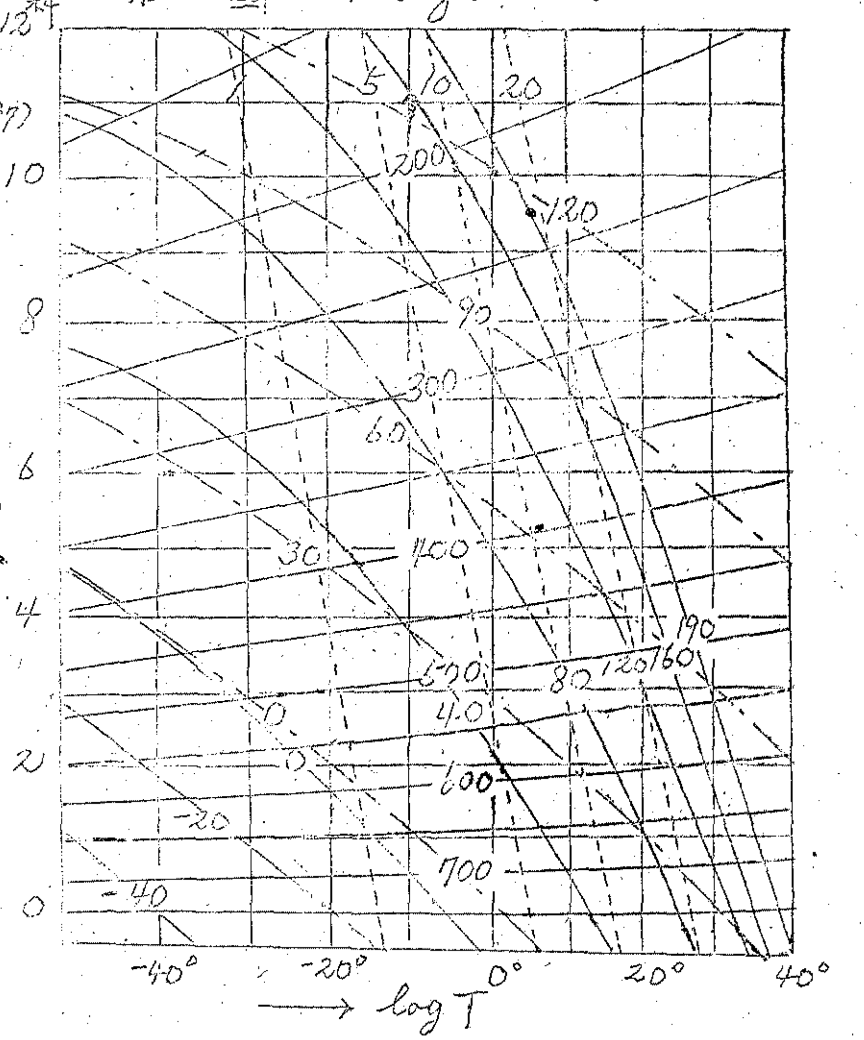
即在等溫大氣，$-T\log P$ 乘 R 等於重力位而在 Aerogramm 橫軸是 T 因此與縱軸平行的直線是等溫線、就是縱軸的座標 Z 與 $-T\log P$ 相同、其次在 Aerogramm 為畫等壓線我們首先考慮等溫大氣之氣压公式 即 $P = P_0 e^{-\frac{gZ}{RT}}$ ------ (36)

就是 $\log P = \log P_0 - \frac{Mg}{RT}Z$ -- (37)

公式(37)是由氣壓 P 及氣溫 T 求高度 Z 的公式，從此可以畫等压線

公式(37)的數值如第八表

第六圖 Aerogramm



第八表 在等溫大氣從p及t求Z

$(P_0=750^{mm}Hg)$

p \ t	40°C	30	20	10	0	−10	−20	−30	−40
700mm	632m	612m	592m	572m	552m	531m	511m	491m	471m
600	2045	1980	1915	1850	1784	1719	1653	1588	1523
500	3717	3598	3479	3360	3242	3123	3004	2885	2767
400	5762	5578	5394	5210	5026	4841	4657	4472	4289
300	8399	8131	7862	7594	7326	7057	6789	6521	6252
200	12120	11730	11340	10954	10567	10180	9793	9406	9019

至等位溫線（乾絶熱線）及等相等位溫線（濕絶熱線）及最大混合比線可以與Emagramm一樣的方法處理 第六圖表示Aerogramm的主要作圖方法、本來Aerogramm是很方便的絶熱圖 在每日的迅速業務上、欲知短時間內處理許多的高空觀測電報 這圖表是最適當的 就是在狀態曲線用圖式計算方法可以取得各觀測高度之海面高度

首先 重力位是

$$\phi=\int g\,dz$$

或 $d\phi=g\,dZ$ -------------------- (38)

由 $dp=-\rho g\,dZ$，即 $g\,dZ=-v\,dp$

$\because d\phi = -v\,dp$ ----------(39)

因此在(39)從 p_0, ϕ_0 到 p_1 及 ϕ_1 積分之，那末

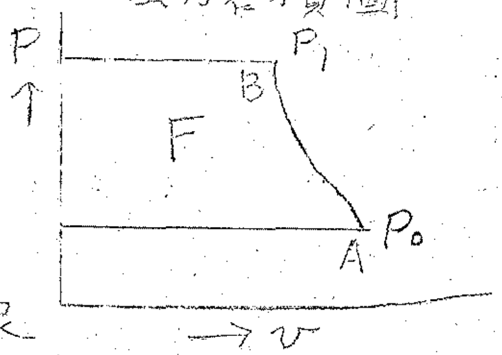
$$\phi_1 - \phi_0 = -\int_{p_0}^{p_1} v\,dp \quad \text{----------(40)}$$

現在我面畫大氣之狀態曲線在压力容積圖如第七圖

公式(40)右邊所表示之 $-\int_{p_0}^{p_1} v\,dp$ 是第七圖之F，亦即由等压線 p_0 及 p_1，狀態曲線AB與 v 零的縱線所圍繞的面積也。

第七圖

压力容積圖



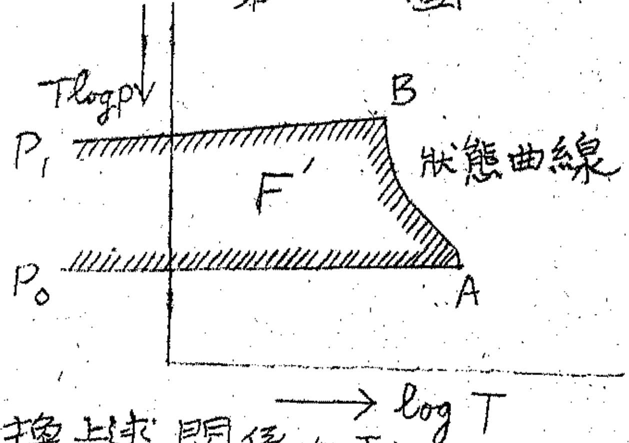
測算面積F，我們可以求得重力位差 $\phi_1 - \phi_0$，因此假若別的圖形是與压力容積圖等面積變換(Equal area transformation)，那末更可以由別的圖形計算與面積F相應的面積而求得 $\phi_1 - \phi_0$。

在氣体之狀態方程式，若压力一定時 $p\,dv = R\,dT$，那末在压力容積圖中

$$dp\,dv = R\,dT\frac{dp}{p} = R\,dT\,d(\log p)$$
$$= R\frac{dT}{T}T\,d(\log p) = R\,d(\log T)\,T\,d(\log p) \quad \text{----(41)}$$

Aerogramm的座標是橫軸 $\log T$ 而縱軸 $T\log p$、所以 Aerogramm 與压力容積圖是與乘係數 R 等面積變換也。那末第七圖的F對應在 Aerogramm 上如第八圖之 F'，压力範圍由 P_0 到 P_1，$\log T$ 範圍由負無限大 (negative infinite) 到狀態曲線。

第八圖



現在我們變換上述關係如下：

首先考慮各座標的微小部分而假定橫軸為 x 縱軸為 y；那末

$$\left.\begin{aligned} dx &= K_2\, d(\log T) \\ dy &= -K_1 T\, d(\log p) \end{aligned}\right\} \quad \text{------------(42)}$$

但 K_1 及 K_2 均常數

$$\therefore\ x = K_2 \log T + K_3,\quad T = e^{\frac{x-K_3}{K_2}} \quad \text{-----(43)}$$

K_3 亦常數也，又從压力 P_0 到 P_1 的縱軸之長度為 y_1，那末

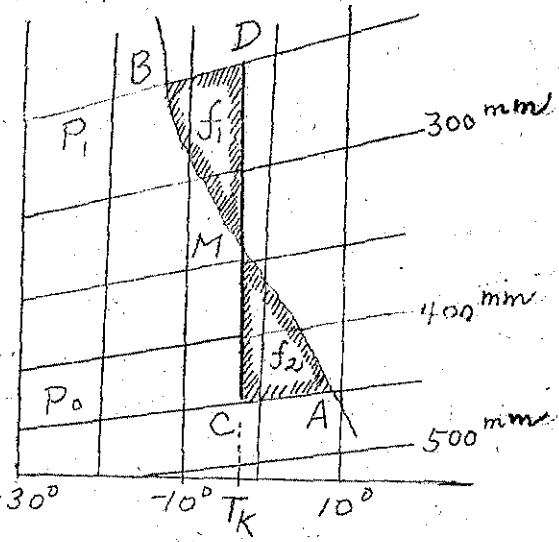
$$y_1 = K_1 T \log\frac{P_0}{P_1} = K_1 \log\frac{P_0}{P_1}\, e^{\frac{x-K_3}{K_2}} \quad \text{------(44)}$$

y_1 是 x 之指數函數 (exponential function) 也。現在我們求得，壓力由 P_0 到 P_1，x 由負無限大到 x 之面積那末

$$F'' = \int_{-\infty}^{x} y_1 dx = K_1 \left(\log \frac{P_0}{P_1}\right) K_2 e^{\frac{x-K_3}{K_2}} = K_2 y_1 \quad \text{-----(45)}$$

公式(45)之意義如次：壓力由 P_0 到 P_1，x 由負無限大到 T_K 的面積可以被表現以橫軸之數值為 T_K 的 P_0P_1 距離。在第九圖 AB 是狀態曲線，那末在 AB 曲線中採一点 M，其溫度 T_K，使假三角形 AMC 與 BMD 面積相等，那末第八圖所表示之 F' 與(45)所表示之 F'' 一樣的，更加 F' 與 F 相等，所以

第九圖



$$F = F' = F'' \quad \text{----------------(46)}$$

因此得結論如下：從(40)及(45)知在第九圖 AB 的重力位差可以被表現以 CD。以上重力位差可以很簡單的圖式方法被計算。

而且在我們普通觀測範圍內 g 的高度變化極小，可視為常數，那末 Φ 與 Z 有一定的關係。所以在 Aerogramm 上面我們可以添 Z 標度在 Φ 的標度旁邊，而可以曉得 $P_0 P_1$ 中的高度差（用公尺標度）。

(丙) Tephigramm

這圖表的橫軸是溫度 T 的直線標度，縱軸是乾燥空氣的熵（Entropy）的直線標度。

乾燥空氣之熵如公式(23)

$$\mathcal{S}_a = c_p \log\theta + \text{const} \quad \text{------------------} (23)$$

我們可以把 $\log\theta$ 代替 $\mathcal{S}_a$，那末乾絕熱線是與等 $\mathcal{S}_a$ 等一致而且與橫軸平行的。熵的基準是絕對溫度100度（100°K）及氣壓1000 mb，那末

$$\mathcal{S}_a = \frac{4.186\, c_p}{M} (\log_{10}\theta - 2) = 2.318 (\log_{10}\theta - 2) \quad \text{joule/gram, grad} \quad \text{--------} (47)$$

在普通的 Tephigramm 上面我們記錄 $\mathcal{S}_a$ 及 θ 兩个標度，$\mathcal{S}_a$ 及 θ 的換算表可以由(47)計算得之，略如第九表

第九表 Sa與θ換算表

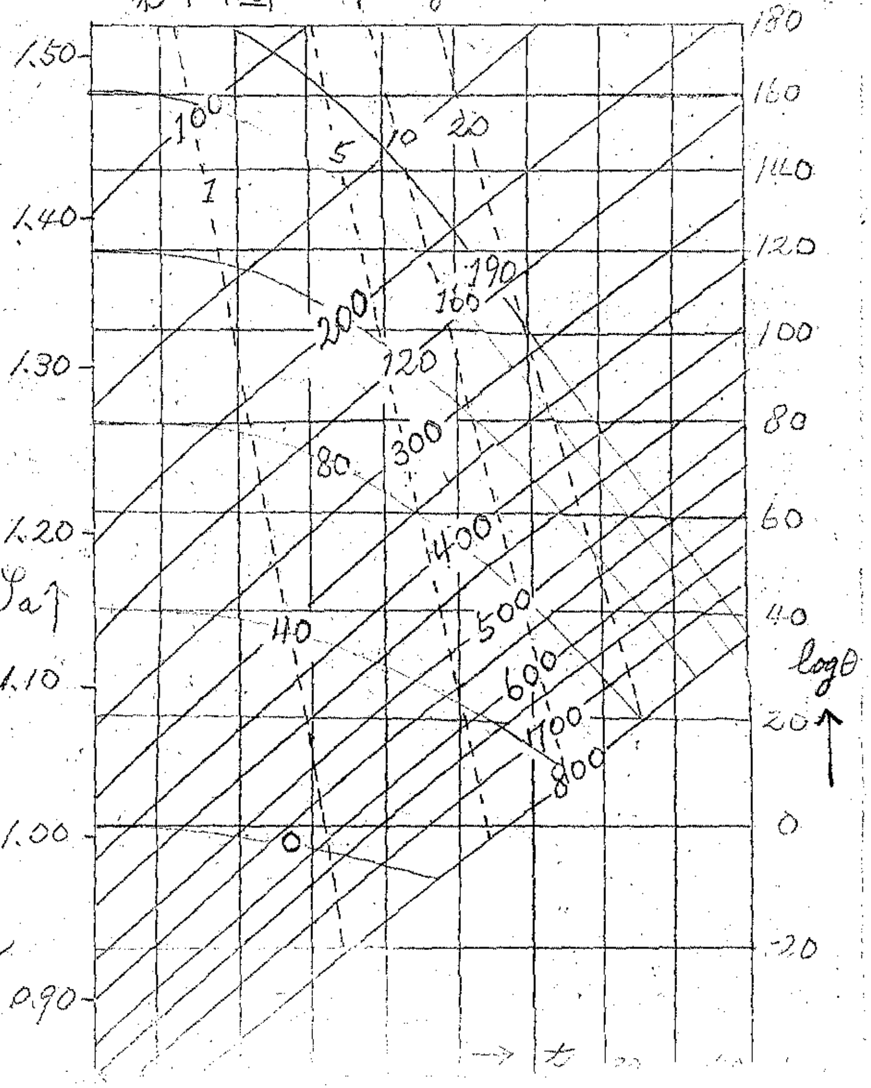
Sa	θ −273
1.50	170.7
1.40	128.8
1.30	90.8
1.20	56.4
1.10	25.2
1.00	−3.0
0.90	−28.5

等压線之畫法：因座標軸是位溫及溫度如第二表所表示的，我們可以由氣溫及氣压求位溫的方法畫等压線。

濕絕熱線及最大混合比線可以簡單的方法由等压線及氣溫畫出。

第十圖表示Tephigramm大略狀態。

第十圖 Tephigramm



(T) Rossby diagramm

Rossby diagramm 與普通的絕熱圖不同，而為氣團分析最適合的
横軸是混合比 x 的直線標度，縱軸是位溫 θ 的直線標度或分压温位 θ_d 的對數標度，在此圖表上面我們画各特性点 (characteristic point) 之達到凝結高度 (condensation level) 的温度及氣压、那末首先考慮関於等温線；在乾燥級或未達到凝結点以前，位温及混合比是不變的，即

$$\theta = T_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{0.2884}$$

採用對數

$$\log\theta = \log T_0 + 0.2884(\log P - \log P_0) \text{------}(48)$$

座標是 x 及 θ，在此方程式應該消去氣压 P、但是 x 到了凝結層是最大混合比、即

$$x = \frac{\epsilon E}{p-E} \quad \therefore p = E\left(1+\frac{\epsilon}{x}\right) \text{----------}(49)$$

代入 (49) 在 (48) 得

$$\log\theta = \log T_0 + 0.2884\left[\log P - \log E - \log\left(1+\frac{\epsilon}{x}\right)\right] \text{-----}(50)$$

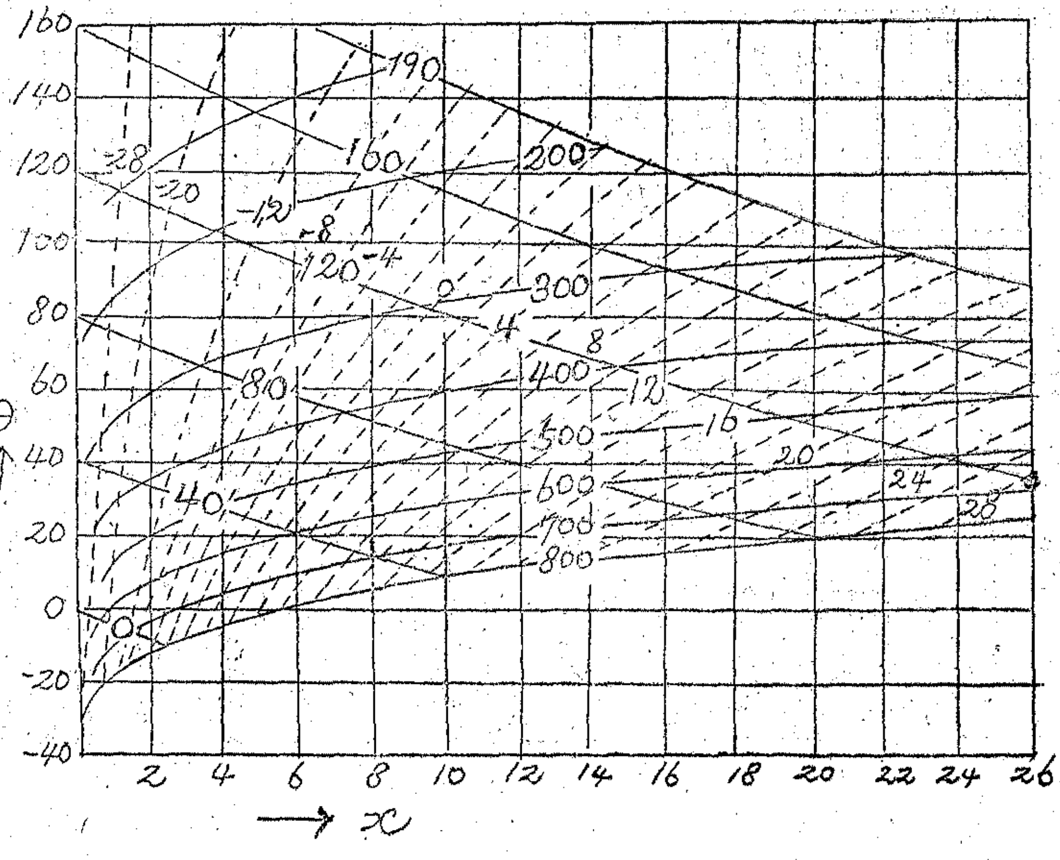
用這方程式可由 T (或 E) 及 x 求 θ，而畫出等温線，其計算表如次：

第十表 從x及t求θ

t \ x	0.3	0.6	1.0	1.5	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
28															19.3	26.6
26														19.5	27.3	34.8
24													18.9	27.7	35.7	43.4
22												17.5	27.2	36.3	44.5	52.5
20											15.8	25.9	35.9	45.3	53.7	61.9
18											23.3	34.8	45.0	54.7	63.4	71.8
16										19.5	32.3	44.1	54.7	64.6	73.6	82.3
14									13.1	28.4	41.6	53.7	64.7	74.9	84.2	93.1
12								3.9	22.1	37.8	51.4	63.9	75.2	85.7	95.3	
10								12.7	31.5	47.7	61.7	74.7	86.3	97.2		
8							-3.1	21.9	41.3	58.0	72.5	85.9	97.9			
6							5.9	31.7	51.7	69.0	84.0	97.8	110.2			
4							15.2	41.9	62.6	80.5	96.0	110.2				
2						-5.7	25.1	52.8	74.2	92.6	108.7					
0						3.6	35.5	64.1	86.3	105.4	122.0					
-2						15.0	48.3	78.0	101.0	121.0						
-4						27.1	61.7	92.8	116.8							
-6					-16.4	40.0	76.2	108.6	133.6							
-8				-26.6	-5.3	53.7	91.4	125.2								
-10				-15.9	6.4	67.9	107.2	142.5								
-12		-66.6	-33.8	-4.3	18.9	83.2	124.4									
-14		-57.2	-22.9	7.9	32.2	99.4	142.5									
-16		-47.1	-11.3	21.1	46.5	116.8										
-18		-36.6	0.9	34.7	61.3	134.9										
-20	-69.5	-24.6	14.8	50.4	78.3	155.7										
-22	-60.1	-13.0	28.2	65.4	94.6											
-24	-48.8	0.8	44.2	83.4	114.2											
-26	-38.1	13.9	59.4	100.5	132.8											
-28	-25.7	29.0	76.9	120.1	154.1											
-30	-11.4	46.4	97.1	142.8												

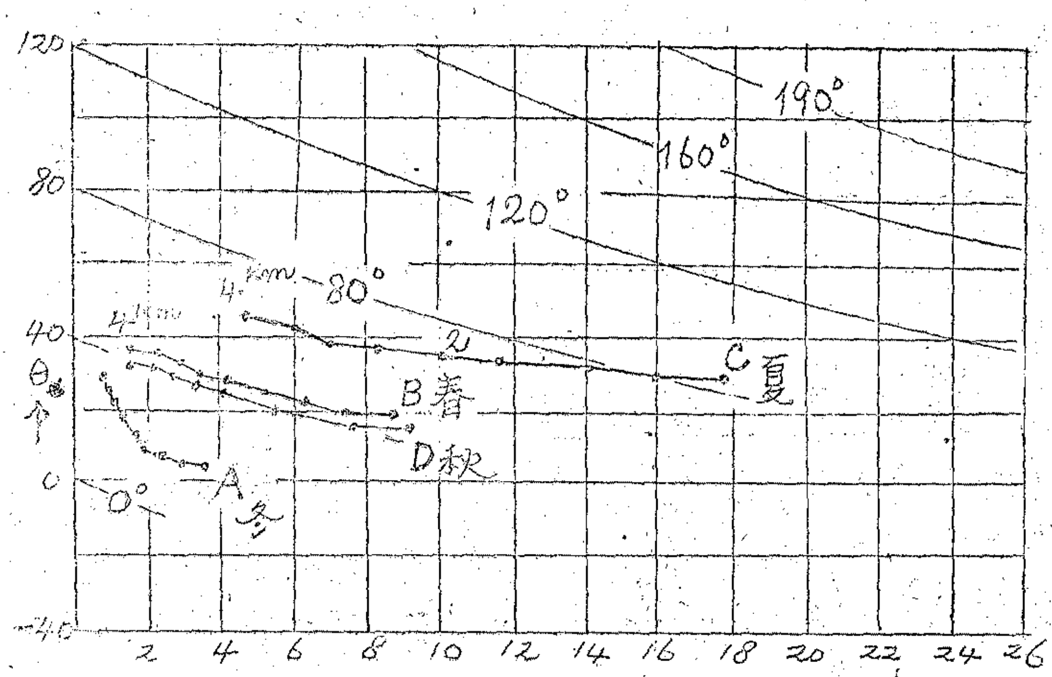
其次爲求等压線由p及T求θ而画等压線、乾絶熱線和Tephigramm一樣的與横軸平行、最後濕絶熱線可以由等压線及等温線画出。第十一圖表示Rossby圖的大略、從右下到左上的実線是等相等位温線,從左下到右上的実線是在凝結高度的等压線,点線是在凝結高度的等温線

第十一圖 Rossby diagramm



一般說起來，由高空探測作氣團分析，最要緊的是選擇表示氣團之特性的保存性量(conservative character)，於此目的，混合比位溫及相等位溫等是適當的，而Rossby圖表最合式的、第十二圖表示南京四季之平均狀態的特性曲線※

第十二圖 南京高空觀測



冬季的制空氣團是西比利亞氣團之南下變形氣團，A表示比發現地的純粹氣團很變形的情形、本來純粹

※ C.W. Tu (涂長望)
Result of Aerological investigations in China

的西比利亞氣團在發現地氣溫在地面附近表示逆增(inversion). 水蒸氣很少, 即其特性曲線在左邊與縱軸差不多平行的。而且最穩定的. 其次C表示夏季的特性曲線而南京的地面附近的空氣依南東季節風被占據. 特性曲線表示熱帶海洋性氣團的特性. 在下層非常濕潤而且表示條件不穩定平衡. 這樣各地方有各地方的標準氣團特性曲線. 換言之可以分類於同族型(Typhomologen)而由此可以研究氣團分析。

關於等面積變換

于一般的場合, xy 與 uv 有逆函數的關係時, xy-平面上的面積與對 xy 面上的平面對應的面積之變換可以實行如次※

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \quad \text{------------} (51)$$

現在如 uv 座標, 我們採用壓力容積圖

※寺澤寛一 自然科學者のための數學概論 85頁

那末

於Emagramm

$$\left|\frac{\partial T}{\partial p}\cdot\frac{\partial(-\log p)}{\partial v}-\frac{\partial(-\log p)}{\partial p}\cdot\frac{\partial T}{\partial v}\right|=\frac{1}{R}\text{ ---(52)}$$

於Aerogramm

$$\left|\frac{\partial(\log T)}{\partial p}\,\frac{\partial(-T\log p)}{\partial v}-\frac{\partial(-T\log p)}{\partial p}\,\frac{\partial(\log T)}{\partial v}\right|=\frac{1}{R}\text{ ----(53)}$$

於Tephigramm

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial p}\,\frac{\partial T}{\partial v}-\frac{\partial T}{\partial p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|=A\text{ ----------(54)}$$

因此Emagramm與Aerogramm同等的等面積變換而Tephigramm與前二者AR倍。

中華民國卅五年九月廿三日

於台北市