

中央氣象局全球波譜模式之非線性正模初始化

陳建河

中央氣象局氣象資訊中心

郭鴻基

國立台灣大學大氣科學研究所

摘要

考慮靜止且靜力穩定的大氣，對原始方程組做線性化，由連續方程及熱力程得到一垂直結構方程，則此垂直結構方程的解，就是所謂的相當厚度。另外，由連續方程與動量方程配合一個相當厚度會得到一組水平結構方程，即所謂的淺水方程，此方程組的解（正模）含有三種形態的波動，即向西傳播的羅士培波，向東與向西傳播的重力波。線性正模初始化就是直接將欲過濾的重力波之振幅設為零，而非線性正模初始化(NNMI)則是令高頻率的重力波之振幅隨時間的變化為零(Machenhauer, 1977)，兩者最大的差別在於NNMI可以讓重力波存在於初始場中。本文重點在於詳細描述 NNMI完整的製作過程，例如，怎樣從分割(discrete)的原始線性方程求垂直結構矩陣，以及在水平結構方程中如何求對稱與反對稱矩陣，這是整個NNMI處理過程最重要的地方，即由對稱與反對稱矩陣的固有值(eigen value)可以知道各波動的頻率，進而設定所欲過濾掉的波動。另外，也描述程式中重要的資料結構，即利用Legendre函數在球面上的南北的對稱性，可在處理波譜與物理空間的轉換時，有較高的計算效率。

使用中央氣象局第二代，以T79、垂直18層的解析度的波譜模式，用1994年3月21日12Z的個案測試所發展完成的NNMI，本文將經過NNMI處理與未經NNMI處理的24小時地面氣壓預報做為NNMI模組正確與否的比對，很明顯地經過NNMI的處理可以減少地面氣壓的振盪。此外，經過NNMI處理之後，對於客觀分析場的修正量，在海平面氣壓分析場方面大致不超過3mb，500mb高度場則不超過30gpm。另外，也比較在垂直上取2個（外模、第一內模）、3個、4個垂直模的測試結果，三者之間由24小時的地面氣壓預報及對分析場的修正等均沒有很顯著的差別。

關鍵詞：非線性正模初始化(NNMI)、垂直模、水平模、波譜轉換。

一、前言

數值天氣預報(NWP)自1950年化開始發展，在電腦硬體設備不斷地更新之下，在技術上也有非常顯著的進步，以目前發展最好的歐洲氣象中心(ECMWF)為例，對天氣的可預報度已可達七天左右。基本上，構成NWP作業有四個要素，即：觀測資料(observation data)、客觀分析(objective analy-

sis)、初始化(initialization)及預報模式(forecast model)。

對於全球模式而言，預報模式可說是一個初始值問題，而觀測資料、客觀分析是在製造初始場，初始化是在修飾初始場讓預報模式能夠正常地預報。另外，也可以透過修飾模式方程組的方式來達到預報的目的，像準地轉模式即是。然而目前多數NWP以原始方程組為預報模式的情況下，初始化的

方法就希望跟預報模式結合一起，例如非線性正模初始化(nonlinear normal mode initialization)及動力初始化(dynamic initialization)。

一般而言，觀測資料在經過客觀分析之後，由於質量場與風場之間的不平衡，在進入預報模式之後會激發重力波的產生，雖然目前使用最佳客觀分析方法，在中高緯度可以滿足地轉平衡的限制(geostrophic constraint)，然而在低緯度此種地轉平衡限制並不存在。儘管如此，此種地轉平衡的初始場也不一定能被模式的原始方程組所接受，因此模式的初始化就顯得相當重要，它可以縮短預報模式在預報初期自我調整的時間。有關模式初始化的發展，在早期有以診斷方程如非線性平衡方程為限制條件讓風場與質量達到平衡，此種方式稱之為靜態(static)方法，例如中央氣象局(CWB)第一代全球系統所使用的方法，此法最嚴重的問題是初始化之後的場不含有輻散分量，如此過濾掉重力波會造成地轉調節(geostrophic adjustment)上的問題，對於已發展完成的天氣系統在預報上會產生嚴重的誤差(Williamson, Daley and Schlatter, 1981)。另一種初始化方法稱之為動力初始化(dynamic initialization)，最初是由Miyakoda and Moyer (1968)，Nitta and Hovermal (1969)等所發展出來的，方法的主要精神是將模式往回積分一段時間(例如六小時)然後再往前積分至初始預報時間。此法的主要缺點是實際應用在NWP作業上並不十分經濟，同時此法也會使得環流系統有過弱的現象。

至於線性正模初始化的發展則是Dickinson與Williamson (1972)在NCAR的大氣環流模式中首先應用，但是並不十分成功，原因是線性正模初始化並沒有考慮重力波會因為模式方程組的非線作用而再度產生。Machenhauer (1977)與Bear (1977)同時發展出非線性正模初始化(NNMI)，而Anderson (1977)將NNMI應用到全球波譜模式上，隨後NNMI就被廣泛的使用。雖然NNMI可以改進線性正模初始化的缺點，但是它也有一些缺點存在，Daley (1979)的研究認為NNMI對於降水的預報並沒有很大的改進；Bengtsson (1981)認為使用NNMI會減弱熱帶地區的環流。這些缺點的主要原因被認為是NNMI所使用的是乾絕熱的方程組；因此很多研究

都嘗試加入濕絕熱的效應(Tidade, 1983; Errico and Rasch, 1988; Harms et al, 1993)，其結果普遍都認為有助於降水的預報。NNMI使用Machenhauer方法的另一個缺點是在使用疊代(interaction)法時缺乏一般的收斂條件，Williamson and Temperton (1981)將NNMI應用於ECMWF模式時，在考慮對流加熱及大尺度降水時Machenhauer的方法並不收斂。另外，即使是在乾絕熱的情況下，如果也將那些較淺的重力波(即相當厚度較小者)過濾掉，也會造成疊代法的不收斂。Errico(1983)對於Machenhauer的方法其收斂的性質有詳細的討論。

本文的重點在於詳細介紹CWB全球波譜模式所使用的非線性正模初始化方法的處理程序及一些物理空間與波譜空間的轉換公式，有助於增加對波譜模式的了解。本文共分四節，第一節為簡介，第二節介紹非線性正模初始化方法及正模分析方法，第三節敘述NNMI結合波譜模式的預報結果，最後一節為結論。

二、非線性正模初始化

考慮在一個靜止的大氣，並給定一垂直穩定的溫度剖面，對乾絕熱的原始方程式做線性化，得到

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -2\Omega \mu \underline{D} - 2\Omega \underline{V} \quad (1)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 2\Omega \mu \underline{U} - \nabla^2 \underline{\Phi} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -A \underline{D} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -q^T \underline{D} \quad (4)$$

方程式中物理變數有下面的形成

$$\underline{x}(\lambda, \mu) = [x(\lambda, \mu, \sigma_1), x(\lambda, \mu, \sigma_2), \dots, x(\lambda, \mu, \sigma_\tau)]^T \quad (5)$$

L表示模式的垂直層數，各變數的放置如圖1所示，而各變數的定義如下：

ζ = 垂直渦度

$\underline{D}$ = 水平輻散

θ = 位溫

$\underline{\pi} = P - P_{i,0}$ ，P：地面氣壓， $P_{i,0}$ ：模式頂層之氣壓

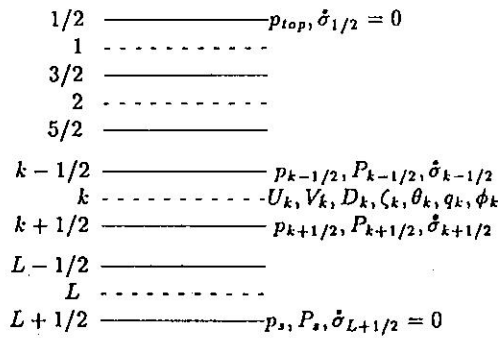


圖 1. 模式垂直分層及各變數排放位置示意圖。

$\underline{U} = u \cos \varphi / a$: 東西向水平風向量

$\underline{V} = v \cos \varphi / a$: 南北向水平風向量

a = 地球半徑

φ = 緯度

$\underline{\Omega}$ = 地球旋轉角速度

λ = 經度

Φ = 重力位，具有下式的關係

$\Phi = \phi_s + B\theta + c\pi$

ϕ_s = 地形高度上的重力位

$B = c^{-1}b$

$$e_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{if } k=l \\ -1 & \text{if } k=l+1, k \neq L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$b_{kl} = \begin{cases} c_p(p_{k+1/2} - p_k) & \text{if } k=l \\ c_p(p_{k+1} - p_{k+1/2}) & \text{if } k=l+1, k \neq L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

因此 B 是一個 $L \times L$ 的矩陣。

c = L 個元素的 column 的矩陣，以下式表示

$$c_k = c_p \theta_k \left(\frac{\partial p_{k+1/2}}{\partial \pi} - \frac{\partial p_k}{\partial \pi} \right) + c_p \theta_{k+1} \left(\frac{\partial p_{k+1}}{\partial \pi} - \frac{\partial p_{k+1/2}}{\partial \pi} \right)$$

$$c_L = c_p \theta_L \left(\frac{\partial p_{L+1/2}}{\partial \pi} - \frac{\partial p_L}{\partial \pi} \right)$$

$P = \left(\frac{P}{P_0} \right)^k$ ，其中 $P_0 = 1000 \text{ mb}$

A = $L \times L$ 矩陣，以下式表示

$$A_{kl} = \left(\frac{\theta_{k+1/2} - \theta_k}{\Delta p_k} \right) \sigma_{k+1/2} \Delta p_l$$

$$+ \left(\frac{\theta_k - \theta_{k-1/2}}{\Delta p_k} \right) \sigma_{k-1/2} \Delta p_k$$

$$- h_{k1} \left(\frac{\theta_{k+1/2} - \theta_k}{\Delta p_k} \right)$$

$$- h_{k1} \left(\frac{\theta_k - \theta_{k-1/2}}{\Delta p_k} \right) \Delta p_l$$

$$h_{k1} = \begin{cases} 1 & \text{if } k \geq l \\ 0 & \text{if } k < l \end{cases}$$

(6)

其中 σ 的定義是 $\sigma = \frac{p - p_{top}}{p_s - p_{top}}$

$q = \Delta p_k$ 是一個 L 個元素的 column 的矩陣

Δp 是各層間的等壓面厚度

將(6)式對時間 t 微分得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = B \frac{\partial \theta}{\partial t} + c \frac{\partial \pi}{\partial t} \quad (7)$$

由(3)，(4)式得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -SD \quad (8)$$

其中

$$S = (BA + cq)^T \quad (9)$$

將物理變數在波譜空間以三角形截斷方式展開（詳見附錄）

$$X(\lambda, \phi) = \sum_{n=-M}^M \sum_{m=1}^M X_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (10)$$

M 為三角形截斷的波數， X_n^m 表示波譜係數，

$Y_n^m(\lambda, \mu)$ 為球面諧函數

$$X_n^m = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} X(\lambda, \mu) P_n^m(\mu) e^{-im\lambda} d\lambda d\mu \quad (11)$$

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu) e^{im\lambda}$$

其中 $P_n^m(\mu)$ 為 n 階 m 次方的連帶 Legendre 函數

將(1)，(2)，(8)式轉換到波譜空間得到

$$\frac{d}{dt} \zeta_n^m = -2\Omega \mu D_n^m - 2\Omega V_n^m \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} D_n^m = -2\Omega \mu \zeta_n^m - 2\Omega U_n^m + \frac{n(n+1)}{a^2} \Phi_n^m \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} \Phi_n^m = -SD_n^m \quad (14)$$

(一) 垂直結構

基本上，垂直結構是S來決定，因此是一個固有值問題(eigen-value problem)，即

$$SZ = gHZ \quad (15)$$

g是重力，Z是矩陣S的固有向量就是垂直模(vertical normal mode)，H表示每一個垂直正模的相當厚度(equivalent depth)，圖2是用表1的垂直分層及溫度剖面所計算出來的垂直結構（僅列出前9個模）。表1中模式共有18個分層(L=18)，相對應有18個相當厚度，對接近10km的相當厚度而言(l=1)稱之為外模(external mode)，而第二個相當厚度約3 km稱為第一內模(first internal mode)，以下類推

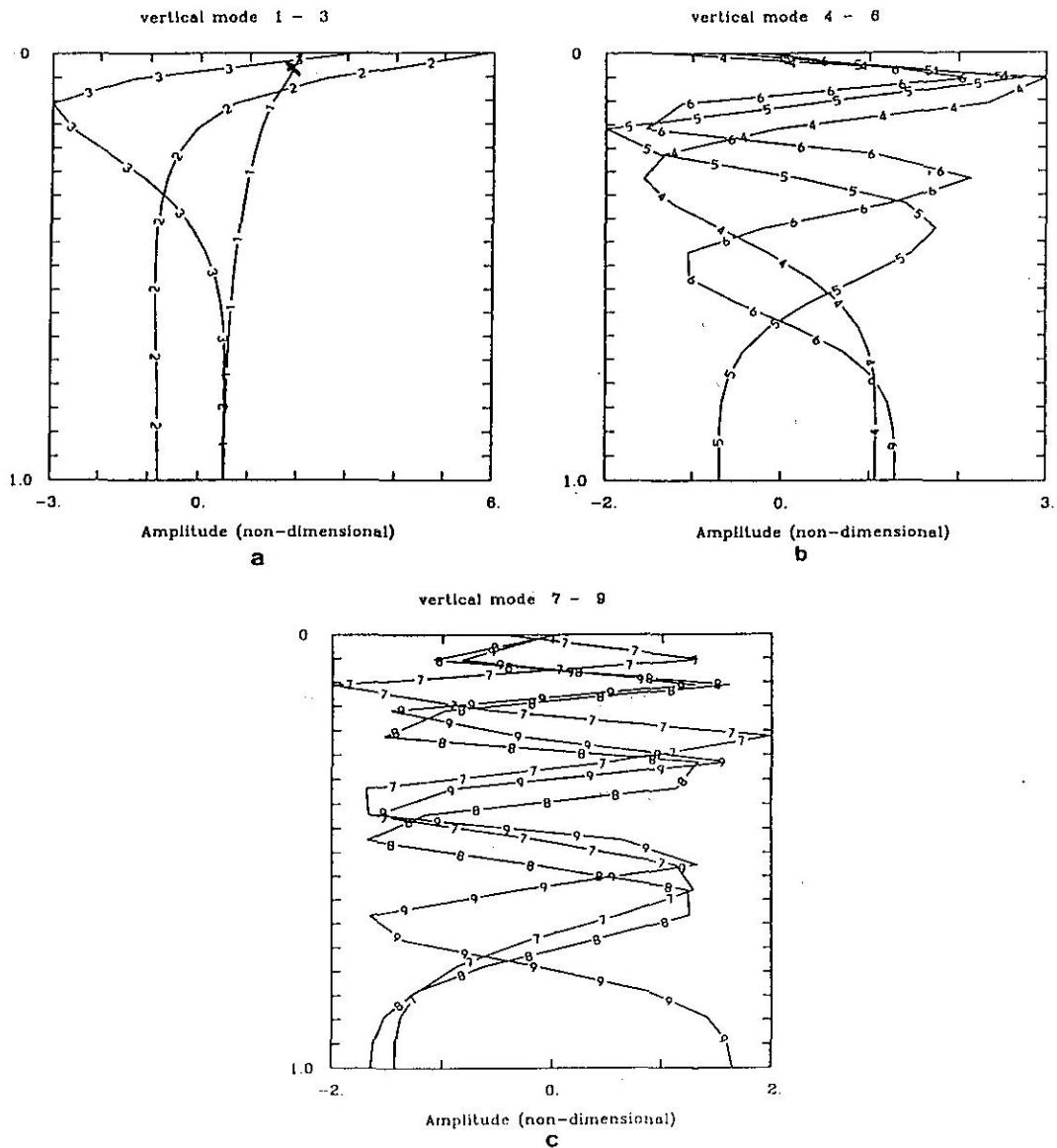


圖 2. 模式之垂直正模。(a)1-3,(b)4-6,(c)7-9。橫座標為振幅，縱座標為垂直 σ 座標。

表 1. 垂直層數、 σ 座標、各層平均溫度
與相當厚度

l	σ	T	H(m)
1	0.008	229.25	9718.67
2	0.028	209.14	3393.61
3	0.049	198.15	794.71
4	0.092	199.12	303.92
5	0.136	214.05	134.07
6	0.187	217.82	64.43
7	0.247	227.33	39.68
8	0.315	236.96	20.98
9	0.393	247.70	11.39
10	0.482	258.23	6.55
11	0.575	266.92	3.94
12	0.669	273.94	2.36
13	0.757	279.79	1.44
14	0.839	283.94	0.76
15	0.904	287.66	0.40
16	0.950	290.40	0.18
17	0.978	291.83	0.10
18	0.995	292.08	0.03

至最淺的內模 ($l=18$) 其相當厚度約只有幾公尺而已。從圖-2(a)看，外模從底層至高層並沒有變化，因此具有相當正壓 (equivalent barotropic) 的性質，而從第一內模隨高度顯示有一個變號，第二個內模則有兩個變號。

這些固有向量 (即垂直正模) 於是形成一組基底 (base) 以矩陣 Z 表示，將物理變數 x_n^m 投影到這組基底上，得到

$$\hat{x}_n^m = Z^{-1} x_n^m \quad (16)$$

將此式應用到(12)，(13)，(14)式，得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\zeta}_{n,l}^m = 2\Omega \left[\frac{im}{n(n+1)} \hat{\zeta}_{n,l}^m - \epsilon_n^m \left(\frac{n+1}{n} \right) \hat{D}_{n-1,l}^m \right. \\ \left. - \epsilon_{n+1}^m \left(\frac{n}{n+1} \right) \hat{D}_{n+1,l}^m \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{D}_{n,l}^m = 2\Omega \left[\frac{im}{n(n+1)} \hat{D}_{n,l}^m - \epsilon_n^m \left(\frac{n+1}{n} \right) \hat{\zeta}_{n-1,l}^m \right. \\ \left. + \epsilon_{n+1}^m \left(\frac{n}{n+1} \right) \hat{\zeta}_{n+1,l}^m \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\Phi}_{n,l}^m = -gH_l \hat{D}_{n,l}^m \quad (19)$$

這組方程組就是一個淺水方程式系統 (shallow water equation system)。

(二) 水平結構

從上段的敘述知道每一個相當厚度 (H_l) 就對應一組淺水方程系統，而每個淺水系統基本上有三組解，一組是向東的重力波，包括凱文波 (Kelvin wave)，另一組是向西的重力波及一組向西的羅士培波 (Rossby wave)。在許多文獻上均有這些波動的詳細描述 (Longuet-Higgins, 1968; Matsuno, 1966; Holton and Lindzen, 1998)。將各物理變數對時間 (Ω) 做無因次化 (non-dimensionalizing)，各物理變數的轉換如下：

$$\tilde{\zeta}_n^m = -h_{n,l} \hat{\zeta}_n^m \quad (20)$$

$$\tilde{D}_n^m = ih_{n,l} \hat{D}_n^m \quad (21)$$

$$\tilde{\Phi}_n^m = \hat{\Phi}_n^m \quad (22)$$

其中

$$\tilde{\zeta}_n^m = \hat{\zeta}_n^m / \Omega \quad (23)$$

$$\tilde{D}_n^m = \hat{D}_n^m / \Omega \quad (24)$$

$$\tilde{\Phi}_n^m = \hat{\Phi}_n^m / \Omega^2 a^2 \quad (25)$$

因此(17)，(18)，(19)可以寫成

$$\frac{d}{dt} \tilde{\zeta}_n^m = i(c_n^m \tilde{\zeta}_n^m + a_n^m \tilde{D}_n^m + a_{n+1}^m \tilde{D}_{n+1}^m) \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{D}_n^m = i(b_n^m \tilde{\Phi}_n^m + c_n^m \tilde{D}_n^m + a_{n+1}^m \tilde{\zeta}_{n+1}^m) \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\Phi}_n^m = i b_n^m \tilde{D}_n^m \quad (28)$$

其中且 $a_0^m = b_0^m = c_0^m$ 且

$$a_n^m = -\frac{2\epsilon_n^m}{n} ((n+1)(n-1))^{1/2}$$

$$b_n^m = \left[\frac{gH}{\Omega^2 a^2} n(n+1) \right]^{1/2}$$

$$c_n^m = \frac{2m}{n(n+1)}$$

$$\epsilon_n^m = \left[\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1} \right]^{1/2}$$

而(26), (27), (28)式可依n-m的值來區分對稱 (symmetric) 與反對稱 (anti-symmetric) 兩組, 對稱組可以寫成

$$\frac{d\tilde{x}_s}{dt} = iM_s \tilde{x}_s \quad (29)$$

$$M_s = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & c_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & c_1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & b_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{N-2} & c_{N-2} & a_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & a_{N-1} & c_{N-1} \end{pmatrix}$$

而反對稱組則寫成

$$\frac{d\tilde{x}_a}{dt} = iM_a \tilde{x}_a \quad (30)$$

$$M_a = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & c_2 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & c_{N-2} & 0 & a_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \end{pmatrix}$$

其中 $i = \sqrt{-1}$

在上面兩組中 $N = M - |m| + 1$ 。從上面方程組的分解, 知道水平模 (horizontal mode) 的水平結構 (horizontal structure) 由矩陣M的固有向量來決定, 所以也是固有值問題, 即

$$ME = EW \quad (31)$$

其中E是M的固有向量所形成的矩陣, W是M的固

有值所形成對角矩陣 (diagonal matrix), 也就是所謂的頻率 (frequency), 因此, (31)式的解 (即normal mode) 為

$$\tilde{x} = \alpha_j e_j \exp(i\omega_j t) \quad (32)$$

其中 α_j 表示振幅係數

同樣地, 將物理變數投影到水平結構上得到振幅為

$$\alpha = E^T \tilde{x} \quad (33)$$

其中 $E^T = E^{-1}$

(3) 非線性正模初始化

初始化主要的目的在於消除初始資料中的一些不平衡現象, 以免這些不平衡現象在預報的初期產生高頻的重力波而影響預報的品質。從上面的討論中已求得振幅 $\alpha = E^T \tilde{x}$, 同時可以將方程式寫成

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = iM\tilde{x} + N$$

N表示預報方程組的非線性項, 將此式乘以 E^T 得到振幅隨時間的變化方程

$$\frac{d\alpha}{dt} = iW\alpha + R \quad (35)$$

其中 $R = E^T N$ 。對於第j的模, 方程式可以寫成

$$\frac{d\alpha_j}{dt} = i\omega_j \alpha_j + R_j \quad (36)$$

ω_j 是頻率, 就是矩陣M的固有值。所謂線性正模初始化就是在 $R=0$ 的情況下, 直接令 $\alpha_j=0$, 也就是將不必要的高頻重力波的振幅設為零。然而此種做法並沒有考慮方程組中因非線性項的作用會在預報的時候再產生高頻的重力波。因此Machenhauer (1977) 提出讓

$$\frac{d\alpha_j}{dt} = 0 \quad (37)$$

也就是讓開始預報時重力波的振幅隨時間的變化為零。因此(36)式變成

$$\alpha_j = -R_j / i\omega_j \quad (38)$$

在此, 並不直接計算非線性項而是用疊代法計算, 即將

$$\alpha_j^{n+1} = -R_j^{(n)} / i\omega_j \quad (39)$$

代入(36)式得到

$$\Delta \alpha^{(n)} = \alpha_j^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} = \frac{1}{i\omega_j} \frac{d\alpha_j^{(n)}}{dt} \quad (40)$$

其中

$$\frac{d\alpha_j^{(n)}}{dt} \approx \frac{\alpha_j^{(n)}(t_0 + \Delta t) - \alpha_j^{(n)}(t_0)}{\Delta t} \quad (41)$$

也就是預報模式的第一個預報的物理量隨時間的變化量，至於疊代的次數僅需要2到3次就可以達到收斂的條件

$$BAL_1 = \sum_{j=0}^n \frac{d\alpha_j}{dt} \frac{d\alpha_j^*}{dt} = 0 \quad (42)$$

1表示垂直模，目前僅就外模與第一內模（1=1,2）來做初始化， G_1 表示過濾掉的高頻重力波，*表示共軛數。在CWB模式中以24小時為切斷頻率，即過濾掉小於24小時的重力波。

三、NNMI結合預報模式之預報結果

上節中我們描述NNMI的製作過程，可見NNMI與預報模式是結合在一起的，本研究嘗試對不同垂直模做切初始化的結果比較，對水平模的切斷頻率均採24小時，同時疊代法只需做3次即可達到收斂效果。在此我們再綜合NNMI的步驟如下：

1. 設 $n=0$ ，從初始網格點資料 $x^{(0)}(t_0)$ 開始
2. 以 $x^{(0)}(t_0)$ 為資料用預報模式計算第一個時距（time step）網格點上的 $\frac{dx^{(n)}}{dt}$
3. 利用(33)式由 $\frac{dx^{(n)}}{dt}$ 計算得到 $\frac{d\alpha^{(n)}}{dt}$ ，同時以(40)式檢查收斂的程度
4. 將 $\frac{d\alpha^{(n)}}{dt}$ 以(40)式去計算得到 $\Delta\alpha^{(n)}$
5. 將 $\Delta\alpha^{(n)}$ 轉換成網格點空間上的 $\Delta x^{(n)}$ 修正量
6. 將修正量加回到 $x^{(n)}(t_0)$ 得到 $x_c^{(n)}(t_0)$ ，即 $x_c^{(n)} = x^{(n)}(t_0) + \Delta x^{(n)}$
7. 令 $x^{(n)}(t_0) = x_c^{(n)}(t_0)$ ， $n=n+1$ ，重複第2-7步驟直到 $n \leq 3$ 為止

使用中央氣象局的第二代波譜模式，以水平T79、垂直18層的解析度，任選一1994年3月21日12Z的個案來測試所發展完成的NNMI，初始場是最佳內插客觀分析（OI）的結果，經過NNMI處理之後，對於此初始場的修正並不大。為了解NNMI對預報模式的影響，本文著重於看單點地面氣壓預報的結果，另外也比較對不同垂直模的初始化結果。圖3(a)-(f)是不同點上的地面氣壓（terrain pressure）的24小時預報變化，圖3(a)是青康藏高原上的一點，實線是沒有做NNMI的結果，氣壓振盪的

現象相當地明顯，而細點線（1=2）是取前2個垂直模（即外模與第一內模）做初始化的結果，點線（1=3）與長短點線（1=4）分別是取前3個模及前4個模的結果，與未經NNMI處理結果相較之下，很顯然地經NNMI處理後，此種振盪現象減少很多。而比較1=2, 1=3, 1=4的結果，基本上對此點而言，前5小時1=3與1=4較接近，6-10小時是1=2與1=3較接近，但是10小時之後則三者相差不多，不過值得注意的是初始化前後的氣壓差並不大，因此不同垂直模做初始化的結果差異並不顯著。圖3(b)是西伯利亞冷高壓範圍內的一點，圖3(c)是選南半球上的一點，圖3(d)-(e)分別是美洲東岸與中緯度海洋的低壓系統內的點，而圖3(f)是熱帶海洋上的點，這些點的結果均與圖3(a)的結果類似，即NNMI可以減少地面氣壓初始預報的振盪，只不過有些點像圖3(d), 3(e)的1=2, 1=3, 1=4更接近。

從圖3的結果可以相信NNMI的確可以降低初始風場與質量場不平衡，而減少預報初期模式的調整時間，再者選取不同垂直模的初始化結果並沒有很明顯的差異。圖4(a)-(d)分別是1=2, 1=3, 1=4初始化後減去分析場的海平面氣壓差值，除了少數幾個區域有2-4mb的差值外其它均很小，可見在配合最佳客觀分析情況下，初始化並沒有對客觀分析場有很大的修正。高空500mb的情況如圖5所示，大致上與地面氣壓類似，即NNMI的修正量除了南美洲有超過30gpm的量之外，其它地方均低於30gpm。但是，一個值得注意的現象是，大部分的大值區都集中在南北緯20度之內，即使是在700mb或300mb（圖略）也一樣，這可能是熱帶地區的風場與質量存在著不平衡所致，這是我們需要進一步求證的地方。

四、結 論

非線性正模初始化基本上是利用線性化之後的預報方程組的解，將不必要的重力波過濾掉，本文詳細地介紹NNMI的製作過程，從原始預報方程組的線性化開始，接著將此方程組根據模式的解析度做分割（discrete），由連續方程與熱力方程得到垂直結構方程，此方程的固有值就是所謂的相當厚度，而其相對應的固有向量即為方程組的垂直結構。又

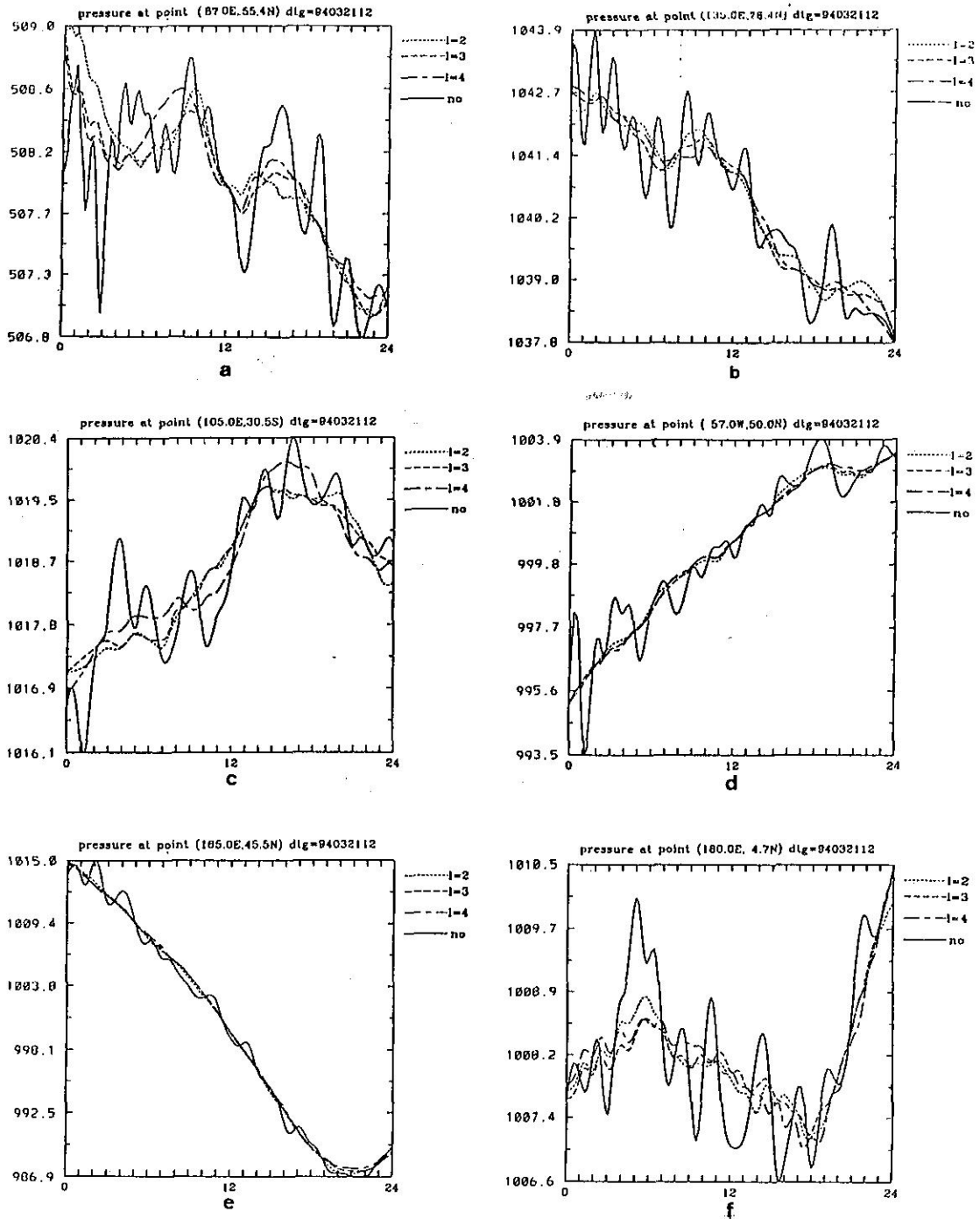


圖 3. 每隔1小時地面氣壓預報的時間序列。(a)青康藏高原上一點(87.5E,33.4N)，(b)西伯利亞冷高壓中的一點(135.0E,76.4N)，(c)南半球的一點(105.0E,30.5S)，(d)美洲東岸的一點(57.0E,50.0N)，(e)中緯度海洋低壓系統中的一點(165.0E,45.5N)，(f)熱帶海洋上的一點(180E,4.7N)。(1=no)為沒有NNMI，(---1=2)為垂取直取2個模，(---1=3)為取3個模，(---1=4)為取4個模的結果。橫座標為時間(單位：小時)，縱座標為氣壓值(單位：mb)。

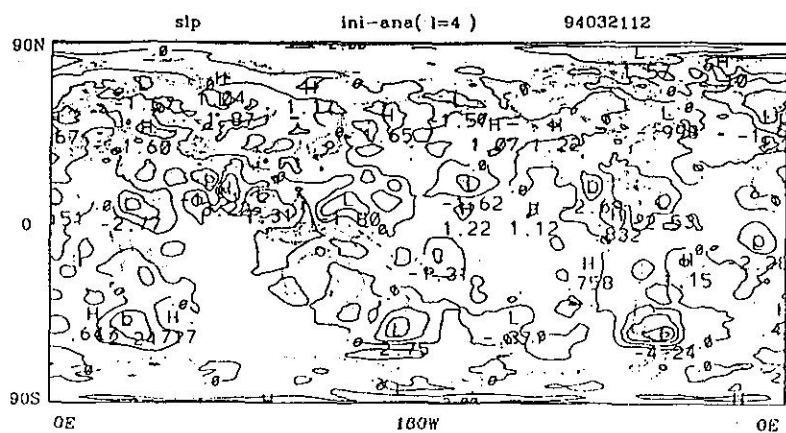
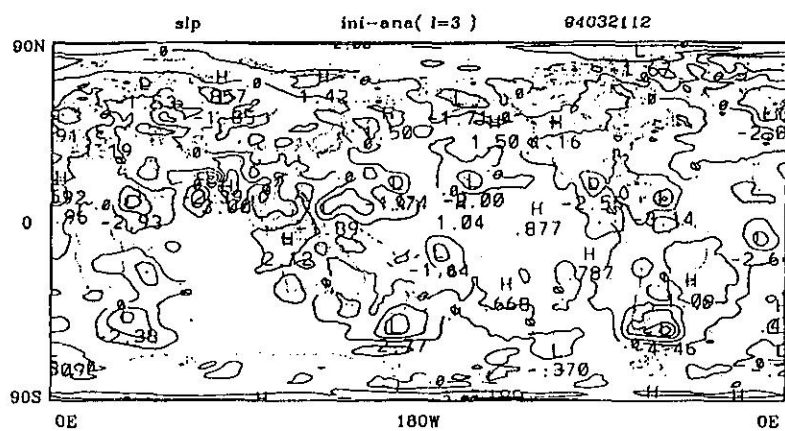
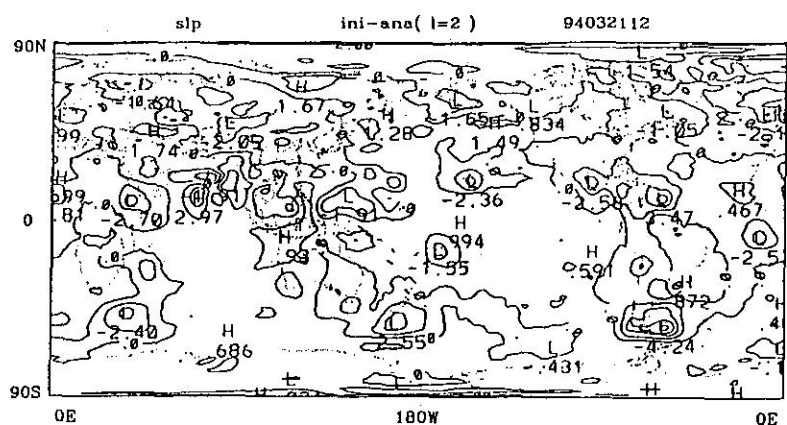


圖 4. NNMI之後的地面氣壓減分析之地面氣壓差值。(a)取2個垂直模，(b)取3個垂直模，(c)取4個垂直模。
等值線間隔為1mb。

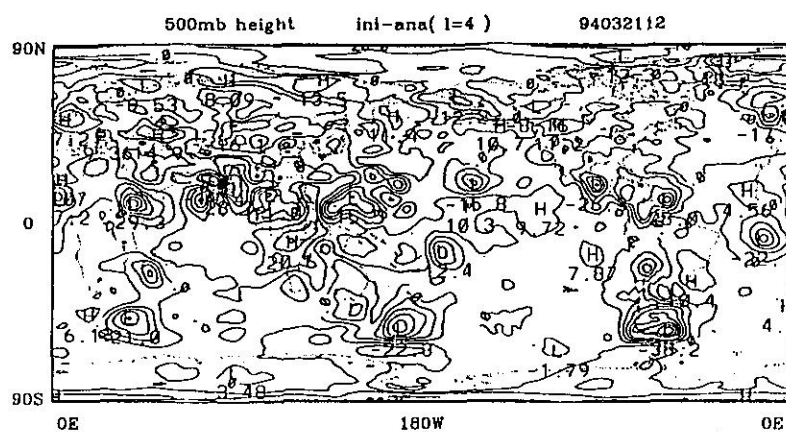
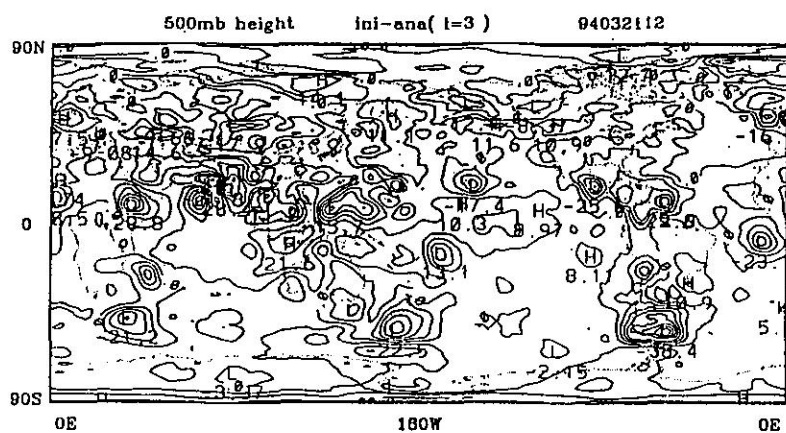
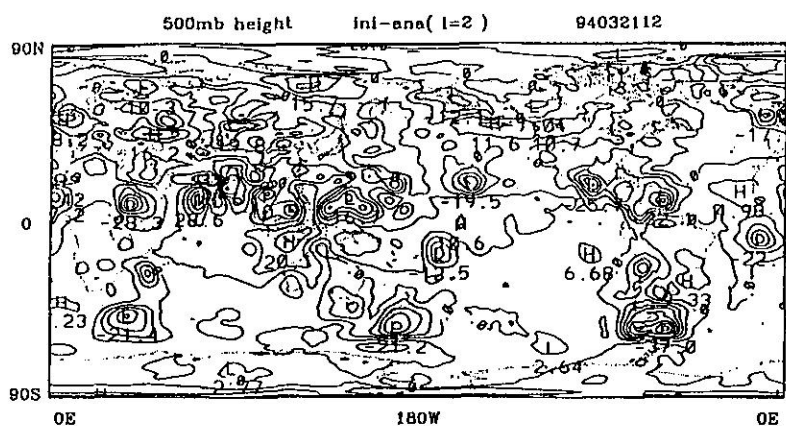


圖 5. 同圖4，但為500mb高度場，等值線間隔為5gpm。

依據每一個相當厚度經由動量方程與連續方程可以得到一組淺水方程，此方程組含有三種型態的波動解 (normal mode)，即向西傳播的羅士培波與向東及向西傳播的重力波。線性正模初始化就是將不必要的重力波的振幅設為零，此種方式的缺點是初始場中所含的重力波減少會影響到地轉調節作用，另一方面也會因模式預報方程的非線性項再度激發重力波。然而NNMI則是將重力波的振幅隨時間的變化設為零，採Machanhauer (1977)的方法用疊代的方法計算非線性項，此法的優點是仍可保留重力波而只是讓它在預報的初期不隨時間而增長。不過NNMI的過程卻是乾絕熱的大氣情況下，因此對於實際的濕大氣仍有出入，對於降水的預報出入尤其大，這也是下一步準備要進行的工作，就是在NNMI中加入濕絕熱效應。

本文的重點在於詳細說明發展NNMI的過程，從如何由分割 (discrete) 的線性原始方程求垂直結構方程矩陣，以及如何由水平結構方程中求對稱與反對稱矩陣，而該矩陣的固有值 (eigen value) 即為波動的頻率，進而可以設定所欲過濾掉的波動，這是發展NNMI最重要的地方。另外一個重點是詳細介紹物理空間與波譜空間的轉換，經由連帶Legendre函數的南北對稱性及其資料結構的特性，可以用較有效率的計算方式達到轉換的目的，並且透過這些轉換公式的幫助也有助於對波譜模式的了解。另外，在NNMI的製作過程中特別要注意的是系數矩陣的排列方式，有對稱與反對稱兩種，在應用上只要配合系數矩陣將變數矩陣以分析場取代就可以做正模分析，對診斷分析工作有很大的幫助。

以中央氣象局的第二代波譜模式，用水平解析度T79、垂直18層，並以1994年3月21日12Z的個案來測試所發展的NNMI模組，由單點的24小時氣壓預報比較經NNMI處理與未經NNMI處理的結果，很明顯地NNMI可以減小地面氣壓預報的振盪。同時，本研究也比較各不同垂直模的初始化結果，基本上取1=2、1=3、1=4並沒有很顯著的差別。另外，NNMI也並沒有對客觀分析初始場有很大的修正，這也是我們所期望的結果。不過，也顯示生另一個現象，即在熱帶地區風場與質量場似乎並不十分平衡，需要進一步加以求證。

五、附 錄

全球波譜的展開以三角形截斷 (簡稱T) 而言，以 $X(\lambda, \mu)$ 表示空間經緯網的點上的函數，則 X 的波譜展開式如下：

$$X(\lambda, \mu) = \sum_{n=-M}^M \sum_{m=-|n|}^{|n|} X_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (A1)$$

其中 λ 表示經度， μ 是緯度的函數即 $\mu = \sin \theta$ ， θ 為緯度， M 為三角形截斷的波數， X_n^m 表示波譜係數，球面諧函數 $Y_n^m(\lambda, \mu)$ 則為

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (A2)$$

其中 $P_n^m(\mu)$ 為 n 階 m 次方的連帶Legendre函數

$$P_n^m(\mu) = \left[\frac{2n+1(n-m)!}{2(n+m)!} \right] \cos(\theta) \frac{dP_n(\mu)}{d(\mu)^m} \quad (A3)$$

其中 P_n 為一般的Legendre多項式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (A4)$$

同時當 m 以 $-m$ 取代時會有 $P_n^{-m}(\mu) = (-1)^m P_n^m(\mu)$ 的特性；同時 $(n-m)$ 的值若為偶數則具有南北對稱的性質，為奇數時則為反對稱。依據上述 $P_n^m(\mu)$ 的定義， $P_n^m(\mu)$ 具有正交的特性，即

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_l^m(\mu) d\mu = \frac{2(k+l)!}{(2k+1)(k-l)!} \delta_{kl} \quad (A5)$$

此外，因為全球的場必需是實數，因此球面諧函數 $Y_n^m(\lambda, \mu)$ 有如下的特性：

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = Y_n^{m*}(\lambda, \mu) \quad (A6)$$

*表示共軛複數，因此波譜數 X_n^m 也有下列特性，即

$$X_n^m = X_n^{m*}$$

所以在電腦程式的設計上只要儲存 $m \geq 0$ 的值即可，以三角截斷而言，可如圖-1 (以T4為例) 所示。

從球面諧函數的正交性，波譜係數可由下式求得

$$X_n^m = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} X(\lambda, \mu) P_n^m(\mu) e^{-im\lambda} d\lambda d\mu \quad (A7)$$

對經向 (λ) 的積分可以快速傅立葉轉換(FFT)處理

$$F^m(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda \quad (A8)$$

而緯向 (μ) 的積分可用Gaussian quadrature處理，其基本的原理是：假設一個多項式 $g(\mu)$ 是小於或等於 $2k-1$ 次，其從-1至1的積分可以完成等於

$$\int_{-1}^1 g(\mu) d\mu = \sum_{j=1}^k W_j g(\mu_j) \quad (A9)$$

其中 W_j 稱為Gaussing權重，

$$W_j = \frac{1}{P'(\mu_j)} \int_{-1}^1 \frac{P_n(\mu)}{\mu - \mu_j} d\mu \quad (A10)$$

μ_j 則是此多項式的根；在球面上坐標上我們稱 μ_j 為Gaussian latitude。為了減少轉換時產生aliasing error多項式的階數必須小於或等於 $3M$ （ M 是三角形截斷波數）。綜合上述，波譜係數 X_n^m 可由下式算得

$$X_n^m = \sum_{j=1}^{(3M+1)/2} W_j F^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j) \quad (A11)$$

而在Gaussian網格上的值可以由(A1)式得到即：

$$X_{1,j} = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M X_n^m P_n^m(\mu_j) e^{im\lambda_j} \quad (A12)$$

從物理上來解釋 m 是東西方向的波數（由FFT處理）， n 是總波數（東西波數+南北波數）。在此必須提的一點是在執行波譜與物理空間的轉換計算時，可以利用連帶Legendre函數的南北對稱性，參照圖-6所示，可以一次做完奇數與偶數項，最後再單獨做 P_4^0, P_4^2, P_4^4 等這些項，這樣的計算方式在向量化的電腦上具有較高的效率。

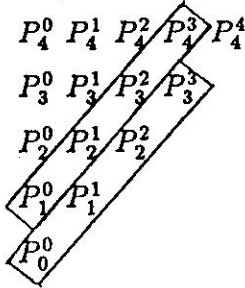


圖 6. associate Legendre函數之排列方式。 P_n^m ，當 $n-m$ 為奇數是反對稱項，為偶數時為對稱項。

使用球面諧函數為基函數（basis function）除了球面諧函具有正交性之外（必要條件），另外一個優點是它是球面座標上 Laplacian算子（ ∇^2 ）的 eigen function，其eigen value是 $-\frac{n(n+1)}{a^2}$ 即

$$\nabla^2(P_n^m(\mu)e^{im\lambda}) = -\frac{n(n+1)}{a^2}P_n^m(\mu)e^{im\lambda} \quad (A13)$$

其中 a 是地球半徑，利用這種關係，我們就可以很方便地處理風場與渦度場及輻散場之間的波譜轉換；將速度場以速度位（ X ）（velocity potential）與

流函數 ψ （stream function）表示：

$$\vec{U} = \nabla X - \nabla \times (\vec{k}\psi) \quad (A14)$$

$\vec{k}$ 表垂直方向的單位向量，而渦度（ ζ ）及輻散（ D ）與流函數及速度位的關係分別是

$$\zeta = \nabla^2 \psi \quad (A15)$$

$$D = \nabla^2 X \quad (A16)$$

將(A14)式的風場以 $\cos$ 權重分開，得到

$$U = \frac{1}{a^2} \frac{\partial X}{\partial \lambda} - \frac{\cos^2 \phi}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \quad (A17)$$

$$V = \frac{\cos^2 \phi}{a^2} \frac{\partial X}{\partial \mu} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad (A18)$$

其中

$$U = \frac{ucos\phi}{a}$$

$$V = \frac{vcos\phi}{a}$$

由(A15)與(A16)式的關係便可得到

$$\zeta_n^m = -\frac{n(n+1)}{a^2} \psi_n^m \quad (A19)$$

$$D_n^m = -\frac{n(n+1)}{a^2} X_n^m \quad (A20)$$

因此由(A11)及(A17)，(A18)式及(A19)(A20)式得到

$$U(\lambda, \mu) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \frac{-im}{n(n+1)} D_n^m P_n^m(\mu) e^{im\lambda} + \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \frac{\cos^2 \phi}{n(n+1)} \zeta_n^m \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} e^{im\lambda} \quad (A21)$$

$$V(\lambda, \mu) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \frac{-im}{n(n+1)} \zeta_n^m P_n^m(\mu) e^{im\lambda} - \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \frac{\cos^2 \phi}{n(n+1)} D_n^m \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} e^{im\lambda} \quad (A22)$$

渦度與輻散的波譜係數可由下二式得到

$$\zeta_n^m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{im}{\cos^2 \phi} V(\lambda, \mu) P_n^m(\mu) e^{-im\lambda} d\mu d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 U(\lambda, \mu) \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} e^{-im\lambda} d\mu d\lambda \quad (A23)$$

$$D_n^m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{im}{\cos^2 \phi} U(\lambda, \mu) P_n^m(\mu) e^{-im\lambda} d\mu d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 V(\lambda, \mu) \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} e^{-im\lambda} d\mu d\lambda \quad (A24)$$

六、參考文獻

Andersen, J. H., 1977: A routine for normal mode initialization with non-linear correction for multi-level spectral model with triangular truncation.

ECMWF Internal Report No. 15, 41pp.

Bear, F., 1977: Adjustments of initial conditions required to suppress gravity oscillations in nonlinear flow. *Contrib. Atmos. Phys.*, 50, 350-366.

Bengtsson, L., 1981: Current problem in four-dimensional data assimilation. *Data Assimilation Method*, ECMWF Seminar 1980, 195-217.

Daley, R., 1979: The application of non-linear normal mode initialization to an operational forecast model. *Atmos Ocean*, 17, 97-124.

Dickinson, R., and D. L. Williamson, 1972: Free oscillations of a discrete stratified fluid with application to numerical weather prediction. *J. A. S.*, 29, 623-640.

Errico, R. M., 1983: Convergence properties of Machenhauer's initialization scheme. *Mon. Wea. Rev.*, 111, 2214-2223.

Errico, R. M., and P. J. Rasch, 1988: A comparison of various normal mode initialization schemes and the inclusion of diabatic processes. *Tellus*, 40A, 1-25.

Harms, E. D., R. V. Madala, S. Raman, and K. D. Sashegi, 1993: Diabatic initialization tests using the

Naval Research Laboratory limited-area numerical weather prediction model. *Mon. Wea. Rev.*, 121, 3184-3190.

Kitade, T., 1983: Nonlinear normal mode initialization with physics. *Mon. Wea. Rev.*, 111, 2194-2213.

Miyakoda, K., and R. W. Moyer, 1968: A method of initialization for dynamical weather forecasting. *Tellus*, 20, 115-128.

Machenhauer, B., 1977: On the dynamics of gravity oscillations in a shallow water model, with applications to normal mode initialization. *Contrib Atmos. Phys.*, 50, 253-271.

Nitta, T., and J. B. Hovermale, 1969: A technique of objective analysis and initialization for the primitive forecast. *Mon. Wea. Rev.*, 97, 652-658.

Williamson, D. L., R. Daley, T. Schlatter, 1981: The balance between mass and wind field resulting multi-variate optimal interpolation. *Mon. Wea. Rev.* 109, 2357-2376.

Williamson, D. L., and C. Temperton, 1981: Normal mode initialization for a multi-level grid-point model, Part II: Nonlinear aspects. *Mon. Wea. Rev.*, 109, 744-757.

NONLINEAR NORMAL MODE INITIALIZATION OF THE CWB GLOBAL SPECTRUM MODEL

Jen-Her Chen

Central Weather Bureau

Hung-Chi Kuo

Department of Atmospheric Sciences

National Taiwan University

ABSTRACT

For a rest and statically-stable atmosphere, a vertical structure equation can be obtained from the continuity and thermodynamic equations through the linearization of the primitive equation. By solving this vertical structure equation, we can get a set of equivalent depths, and, for each of the equivalent depths, there is a shallow water system. The solutions of this shallow water system are westward-propagating Rossby and gravity waves and eastward-propagating gravity waves. The linear normal mode initialization is to set the amplitude of the removed gravity wave to zero, whereas the nonlinear normal mode initialization (NNMI) is to set the tendency of the amplitude of the removed gravity to zero. The major difference of these two methods is that the NNMI can have the gravity wave in the initial fields. In this paper, we would describe the procedure of NNMI in detail. The most important part of NNMI is how to construct the matrix of vertical structure equation and the matrix of horizontal structure equation. We also depict the data structure of the program which enables a more efficient computation on spectrum coefficients.

We used CWB's second generation global spectrum model with 18-level and T79 resolution to test the NNMI and found that NNMI can reduce the pressure oscillation notably by the time series of 24-hour surface pressure forecast. In addition, the differences between the initialized fields and the analysis ones are small, which means NNMI does not change analysis very much. At the same time, we also compare the initialized fields with different vertical mode and found there is of no obvious difference.

Keywords: Nonlinear normal mode initialization (NNMI), vertical mode, horizontal mode, spectrum transform.