

變換函數模式之鑑定估計及診斷*

陳 熙 揚¹

摘 要

本文詳細的說明 Box-Jenkins 鑑定、估計及診斷變換函數模式的統計方法，並以月平均太陽黑子數及加拿大 Alberta 省 Edmonton 地方的月臭氧量為例，作實際應用，經研究結果發現變換函數模式可以 $(0,0)_2$ 代表，而干擾模式則為 $ARIMA(0,0,1) \times (0,0,1)_{12}$ 。

EDMONTON 地方的月臭氧量兩數列為例，作實際分析與應用。

一、前 言

時間數列可分為連續時間數列與離散時間數列兩類：在一段時間內，對某一現象做連續觀測所產生的數列，稱為連續時間數列；而用連續時間數列中，做定時取樣或取累積量者，則稱為離散時間數列。

數據資料常以時間數列的形態出現，而且除確定量外，通常含有隨機分量部分，形成了隨機過程 (stochastic process)。時間數列分析的目的即在於建立隨機時間數列模式，以表示時間數列之特性，並應用所建立之隨機模式做分析與預測。

1970年，Box 和 Jenkins 提出 ARIMA 時間數列預測模式，此模式包括自迴歸 (Auto-regression 簡寫為 AR)，積分 (Integral 簡寫為 I) 及移動平均 (Moving Average 簡寫為 MA) 等三部份；目前已廣泛地被應用在工程、自然科學、商業及經濟等方面之決策分析、控制、研究模擬、最適性分析及定量預測等方面。(向傳心、張德新，1977，胡仲英，1977)

惟通常學者只將此模式應用在單一數列 Z_t 之建立上，而此數列之建立乃基於線性濾過器 (linear filter) 的理論將白噪音 (white noise) 視為輸入數列， Z_t 本身則為輸出數列。但在自然界有很多現象，它的輸入數列並不是白噪音，而是一般數列 X_t ，輸出數列則為 X_t 所產生之另一數列 Y_t ，此時已無法應用線性濾過器的理論來描述，我們必須研究輸入與輸出兩數列間的變換函數模式。

本文旨在說明 Box-Jenkins 提出之鑑定、估計及診斷變換函數模式的統計方法，並以 1965 至 1972 年月平均太陽黑子數與加拿大 ALBERTA 省

二、系統與變換函數

一個系統簡單的說就是刺激和反應或輸入與輸出間的關係。

在研究上，我們常常須要了解系統輸入與輸出間的關係；例如，潛熱釋放如何經過大氣系統產生渦度；然而由於系統的慣性，當改變輸入時，輸出並非立刻跟著改變，而是經過一段遲滯反應後才會達到某一平衡狀態，此種遲滯反應稱為變換函數。(圖1)

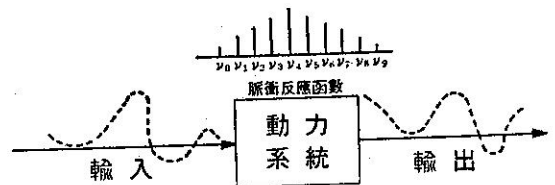


圖1 系統與變換函數

Fig. 1 System and transfer function.

如欲了解某一系統的動態特性 (Dynamic Characteristics) 就必須先了解該系統的變換函數，進而建立變換函數模式，此時即可同時應用過去的輸入和輸出值預報未來的輸出值。在很多情況下這樣做可以減少預報誤差。(Box & Jenkins, 1976)

三、變換函數模式

假設 (X_t, Y_t) , $t=1, 2, 3, \dots$ 是一個雙變隨機過程 (bivariate stochastic process)，則經由一離散線性變換函數，我們可以將輸出數列 Y_t ，以輸入數列 X_t 的加法函數 (additive function) 表示：

* 收稿時間：74年4月6日 送審日期：74年4月7日 收回日期：74年4月20日

1 中央氣象局資訊測站副主任。

$$\begin{aligned} Y_t &= \nu_0 X_t + \nu_1 X_{t-1} + \nu_2 X_{t-2} + \dots \\ &= (\nu_0 B^0 + \nu_1 B^1 + \dots) X_t \\ &= \nu(B) X_t \dots \dots \dots (3.1) \end{aligned}$$

在此 B 為後移運算子 (Backward shift operator)

$$\begin{aligned} BX_t &= X_{t-1} \\ B^m X_t &= X_{t-m} \end{aligned}$$

而 $\nu(B) = \nu_0 + \nu_1 B + \nu_2 B^2 + \dots$ 即為變換函數，此函數必須為穩定，亦即，在 $|B| \leq 1$ 內必須收斂。但一般並不用 (3.1) 表示此離散型動力系統，而是用下述差分方程式表示：

$$\begin{aligned} (1 + \xi_1 \nabla + \dots + \xi_r \nabla^r) Y_t \\ = g(1 + \eta_1 \nabla + \dots + \eta_s \nabla^s) X_{t-b} \dots \dots \dots (3.2) \end{aligned}$$

我們可以 $B = 1 - \nabla$ ，將 (3.2) 化為

$$\begin{aligned} (1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r) Y_t \\ = (\omega_0 - \omega_1 B^1 - \dots - \omega_s B^s) X_{t-b} \end{aligned}$$

亦即

$$\delta(B) Y_t = \omega(B) B^b X_t \dots \dots \dots (3.3)$$

在此 b 為遲延時間 (delay time)，而 (3.3) 稱為 $(r, s)_b$ 階之離散線性變換函數模式，此模式須估計 r 個 δ ， $s+1$ 個 ω ，及 b 等係數，但這些係數有什麼關係？我們又如何加以鑑定呢？

我們由 (3.3) 可得：

$$Y_t = \left[\frac{\omega(B) B^b}{\delta(B)} \right] X_t$$

但由 (3.1)

$$Y_t = \nu(B) X_t \text{ 所以}$$

$$\delta(B) \nu(B) = \omega(B) B^b \dots \dots \dots (3.4)$$

由此式，我們知道了 s ， ω 和 b 間的關係，如果進一步將左右兩邊係數展開，我們可得到下面三個關於反應權重 ν_j 的結果：

$$(\neg) b \text{ 個 } \nu_j \text{ 為零，亦即 } \nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_{b-1} = 0$$

$$(\neg) s-r+1 \text{ 個不為零但却無固定型態的 } \nu \text{ 值}$$

$$(\nu_b, \nu_{b+1}, \dots, \nu_{b+s-r})$$

$$(\neg) \nu_{b+s-r+1}, \nu_{b+s-r+2}, \dots \text{ 是阻尼正弦波}$$

(damped sine) 和指數波衰退的混合型式。

由這些結果可以看出，如果知道 ν 值，則可以應用這些 ν 值鑑定 r 、 s 及 b 之值。然而前述的結論乃是基於無干擾 (noise) 存在的情況下得到的，在實際情況下，我們觀測到的輸出數列並不會剛好等於上述的理論輸出數列，其中往往會有干擾存在，而此種干擾 N_t 通常與輸入數列 X_t 不相干 (independent)，因此，歸納起來，模式可以下式表示：

$$Y_t = \nu(B) X_t + N_t$$

亦即

$$Y_t = [\delta(B)]^{-1} \omega(B) B^b X_t + N_t \dots \dots \dots (3.5)$$

但 N_t 可被鑑定、估計、及診斷為 ARIMA (p, d, q) 模式，即

$$N_t = [\phi(B) (1-B)d]^{-1} \theta(B) a_t$$

故得出實際應用模式為

$$\begin{aligned} Y_t = [\delta(B)]^{-1} \omega(B) B^b X_t + [\phi(B) (1-B)d]^{-1} \\ \theta(B) a_t \dots \dots \dots (3.6) \end{aligned}$$

此式隱含的意義是吾人可以將輸入及輸出兩數列用變換函數模式及干擾模式兩部份表示。而我們的目的即是利用觀測到的兩數列 X_t 、 Y_t ，將 (3.6) 式鑑定出來，並加以精確之估計及診斷，再進一步將之應用於分析與預測。

作者在此僅就變換函數模式部份加以詳細討論，至於干擾模式 N_t 部份的鑑定、估計及診斷，由於一般學者已有論及，故本文不擬再詳細討論。

四、變換函數模式之建立

當了解一系統之變換函數模式後，我們希望估計此變換函數模式，也就是估計代表此系統的微分方程式或差分方程式的係數。

傳統上常用下面幾種方法估計變換函數模式 (曾忠一，1980)

(一) 建立機構性理論模式 (數學模式) 然後再求解。

(二) 脈衝反應法 (Impulse response method)：某一時刻給系統很大的輸入值，然後看輸出值隨時間的變化。

(三) 頻率反應法 (Frequency response method)：令輸入值為正弦函數 (Sinusoidal function) 然後看一段時間後之振幅和位相。

(四) 步進反應法 (Step response method)

其中第一種方法必須先完全了解觀測現象之基礎機構性 (Underlying mechanism)，但實際觀測到的系統往往非常複雜，並不一定能建立數學模式，也不一定能夠求出其解；至於其他三種方法，則非但須要估計甚多之變數，而且當系統的輸出明顯的受到雜波影響時，效果往往不佳，所以我們常須依賴統計方法來估計變換函數模式，其程序如下：

(一) 由對觀測現象之理論及實際知識，決定所採用變換函數模式之類型。

(二) 利用統計方法鑑定變換函數模式類型。

(三) 估計變換函數模式中之參數值。

四診斷並檢驗此變換函數模式是否適當？是否能正確的代表所觀測之輸出入數列？是否合乎精簡原則？

(四)如果模式為適當，則可用於分析與預測，如果模式不適當，則須重做 2 ~ 4 步驟，直到獲得適當的模式為止。

茲依此程序討論如下：

(一)變換函數模式類型之鑑定與估計：

在一雙變隨機過程中，我們有 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ 等一對對的觀測值，假定 X_t 和 Y_t 兩數列已經經過適當的差分，因而成為平穩數列，則 X_t 和 Y_t 將有一定的平均值 μ_x 和 μ_y 及變異數 σ_x^2 和 σ_y^2 ，而此兩數列之交互相關函數可由下式求得：

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\gamma_{xy}(k)}{\sqrt{\gamma_{xx}(0)\gamma_{yy}(0)}}$$

其中 $\rho_{xy}(k)$ 為遲滯 (lag) k 時間的交互相關係數， $\gamma_{xy}(k)$ 為遲滯 k 時間的交協變量數 (Cross Covariance)

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(k) &= \text{Cov}(X_t, Y_{t+k}) \\ &= E[(X_t - \mu_x)(Y_{t+k} - \mu_y)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{而 } \gamma_{xx}(0) &= \text{Cov}(X_t, X_t) = \sigma_x^2 \\ \gamma_{yy}(0) &= \text{Cov}(Y_t, Y_t) = \sigma_y^2\end{aligned}$$

至於 $\rho_{xy}(k)$ 的估計標準差 (standard error) 為：

$$\text{VAR}(R_{xy}(k)) \approx \frac{1}{N-k} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \rho_{xx}(t) \rho_{yy}(t)$$

式中 $R_{xy}(k)$ 是 $\rho_{xy}(k)$ 的估計值

$$R_{xy}(k) = \frac{C_{xy}(k)}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}}$$

在此，

$C_{xx}(0)$ 為 $\gamma_{xx}(0)$ 之估計值。

$C_{yy}(0)$ 為 $\gamma_{yy}(0)$ 之估計值。

$C_{xy}(k)$ 為 $\gamma_{xy}(k)$ 之估計值。

知道這些關係後，我們將利用交互相關函數來鑑定變換函數模式之類型。

由三中之討論，可將變換函數模式的鑑定及估計程序歸納如下：

1. 變換函數部份：

(1) 首先得到

$$\nu(B)\nu = \nu_0 + \nu_1 B + \nu_2 B^2 + \dots$$

式中各 ν 之估計值。

(2) 其次利用這些 ν 值，求得變換函數模式 $(r, s)_0$ 。

(3) 再以這些 ν 值，利用 ν 和 δ 及 ω 之關係：

$$\delta(B)\nu(B) = \omega(B)B^p$$

獲得 δ 和 ω 之暫時估計值。

2. 干擾部份：

茲將估計 N_t 各程序分別再詳細敘述如下：

(1) 獲得 ν 之估計值：

i 先差分 X_t 和 Y_t 兩數列，使之平穩。

ii 鑑定 X_t 之模式類型：

先以白噪音 (white noise) 過程來表示 X_t ，亦即

$$\phi_x(B)X_t = \theta_x(B)\alpha_t$$

在此 α_t 是個白噪音過程，稱為先白噪化輸入 (prewhitened input)

$$\alpha_t = [\phi_x(B)][\theta_x(B)]^{-1}X_t$$

此 $[\phi_x(B)][\theta_x(B)]^{-1}$ 是個線性濾波器 (linear filter)。

iii 對 Y_t 施以相同的變換，亦即讓 Y_t 經過同樣的線性濾波器：

$$[\phi_x(B)][\theta_x(B)]^{-1}Y_t = \beta_t$$

此時 β_t 稱為先白噪化輸出 (prewhitened output)

iv 對原始變換模式

$$[Y_t = \nu(B)X_t + N_t]$$

施以變換：

$$\begin{aligned}\phi_x(B)[\theta_x(B)]^{-1}Y_t &= \phi_x(B)[\theta_x(B)]^{-1}\nu(B)X_t \\ &+ \phi_x(B)[\theta_x(B)]^{-1}N_t\end{aligned}$$

所以： $\beta_t = \nu(B)\alpha_t + \varepsilon_t$

此時 ν 值已變為 α_t 和 β_t 間之交互相關函數，

而 α_t 和 ε_t 不相干。但如何求出 ν 值呢？將

$$\beta_t = \nu(B)\alpha_t + \varepsilon_t$$

左右兩邊各乘以 α_{t-k} 再取期望值，可得

$$\gamma_{\alpha\beta}(k) = \nu_k \sigma_{\alpha}^2 = \nu_k \gamma_{\alpha\alpha}(0)$$

$$\therefore \nu_k = \frac{\gamma_{\alpha\beta}(k)}{\gamma_{\alpha\alpha}(0)} = \rho_{\alpha\beta}(k) \sqrt{\frac{\gamma_{\beta\beta}(0)}{\gamma_{\alpha\alpha}(0)}}$$

$$k=0, 1, 2, \dots$$

因為我們並不知道交互相關函數 $\rho_{\alpha\beta}(k)$ 之理論值，所以只能得到 ν_k 之估計值

$$\hat{\nu}_k = R_{\alpha\beta}(k) \sqrt{\frac{C_{\beta\beta}(0)}{C_{\alpha\alpha}(0)}}$$

此時即可用 $R_{\alpha\beta}(k)$ 及其估計標準差 $\sqrt{\frac{1}{N-k}}$ 來鑑定 $(r, s)_0$ 。

(2) 利用估計的 ν 值 ($R_{\alpha\beta}$) 鑑定 $(r, s)_0$ ，鑑定方法如下：

i 起始的 b 個 ν 值或 $R_{\alpha\beta}$ 值為零。

ii $\hat{\nu}_b, \hat{\nu}_{b+1}, \dots, \hat{\nu}_{b+s-r}$ 等共 $s-r+1$ 個值沒有固定型態，可用此鑑定 $s-r$ 。

iii 從 $\hat{\nu}_{b+s-r+1}, \hat{\nu}_{b+s-r+2}, \dots$ 才有型態出現。當 $r=0$ 時， ν 值從 $b+s-r+1$ 後變為零。

(3) 建立 ν 及 δ, ω, b 間的關係，並估計 δ 及 ω 之值：

效舉例說明，如 $(r, s)_b = (2, 2)_s$ ，則

$$\begin{cases} \nu_j = 0, \text{ for } j < b \\ \nu_0 = \nu_1 = \dots = \nu_{b-1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = 0 \\ \nu_3 = \omega_0 \\ \nu_4 = \delta_1 \omega_0 - \omega_1 \\ \nu_5 = (\delta_1^2 + \delta_2) \omega_0 \\ \quad - \delta_1 \omega_1 - \omega_2 \\ \nu_j = \delta_1 \nu_{j-1} + \delta_2 \nu_{j-2}, \text{ for } j > b+2 \end{cases}$$

解這些式子即可得出 δ_1, δ_2 及 $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ 之估計值。

2. 干擾部份 (N_t) 之鑑定：

由前述已知輸入及輸出數列先行白噪化 (pre-whitened) 後可得

$$\beta_t = \nu(B) \alpha_t + \varepsilon_t$$

則可由 ε_t 的自相關函數 (Autocorrelation Function) 及偏自相關函數 (Partial Autocorrelation Function) 鑑定 ε_t 之 ARIMA (p, d, q) 類型，再將之變換至 N_t 亦即

$$\varepsilon_t = [\theta_x(B)]^{-1} \phi_x(B) \nabla^d N_t$$

關於 ARIMA (p, d, q) 之鑑定、估計及診斷，由於其他學者已有論及，故在此不再介紹。

(二) 模式之診斷

當模式經過鑑定類型並估計係數後必須加以診斷，以了解模式是否能適當地代表觀測之輸入及輸出數列，如果模式合適，則方可用之於預報，而模式是否合適可從下列二個地方反映出來：

1. 殘差數列 $\hat{a}_t$ 之自相關函數 $\gamma_{\hat{a}\hat{a}}(k)$

2. 先白噪化後之輸入數列 α_t 和殘差數列 $\hat{a}_t$ 間之交互相關函數 $\gamma_{\alpha\hat{a}}(k)$ 。

如果模式是錯誤的話，則殘差數列 $\hat{a}_t$ 將不為白噪音過程且和 α_t 間會有交互相關存在，故在診斷過程中會有下述狀況發生：

1. 變換函數模式為正確的，但是干擾模式不正

確：

此時 α_t 與 $\hat{a}_t$ 不相干，故 $\gamma_{\alpha\hat{a}}(k) = 0$ ，而 $\hat{a}_t$ 不是白噪音過程，故 $\gamma_{\hat{a}\hat{a}}(k) \neq 0$ ，我們必須修正代表干擾部份的 ARIMA (p, d, q) 模式。

2. 變換函數模式不正確：

此時 α_t 和 $\hat{a}_t$ 間有相關存在， $\gamma_{\alpha\hat{a}}(k) \neq 0$ ，必須修正變換函數模式部份。

3. 診斷之模式為正確的：

此時 $\gamma_{\alpha\hat{a}}(k) = 0$ 且 $\gamma_{\hat{a}\hat{a}}(k) = 0$

針對這些情況，我們必須判別 $\gamma_{\hat{a}\hat{a}}(k)$ 及 $\gamma_{\alpha\hat{a}}(k)$ 是否為零？但如何判別呢？對 $\gamma_{\hat{a}\hat{a}}(k)$ 而言，可以將之和兩倍標準差 $\frac{2}{\sqrt{N}}$ 比較 (N 為輸入與輸出數列之觀測對數)，若其值大於 $\frac{2}{\sqrt{N}}$ ，則 $\gamma_{\hat{a}\hat{a}}(k)$ 不為零。

至於 $\gamma_{\alpha\hat{a}}(k)$ 則亦與兩倍標準差 $\frac{2}{\sqrt{(N-d)-k}}$ 比較 (d 為 ARIMA (p, d, q) 中之 d)，如大於此量則 $\gamma_{\alpha\hat{a}}(k)$ 不為零。

在上述之個別檢定中，我們利用 $\hat{a}_t$ 來作診斷，但即使診斷之模式合適，估計之參數值與實際總會有些差異，且 $\hat{a}_t$ 之自相關分佈也會與實際 a_t 者不同，故必須再做下面兩種總體檢定：

1. $\hat{a}_t$ 之自相關總體檢定：

定義 $Q = m \sum_{k=1}^K [\gamma_{\hat{a}\hat{a}}(k)]^2$ ，則 Q 值在干擾式無趨勢項下近似 χ^2_{K-p-q} 分配；如干擾模式有趨勢項，則 Q 值近似 $\chi^2_{K-p-q-1}$ 分配，此處 p, q 為 ARIMA (p, d, q) 中之 p, q 值；如果 Q 值大於理論的 χ^2 值，則干擾模式不正確，必須加以修正。

2. $\gamma_{\alpha\hat{a}}$ 之交互相關總體檢定：

定義 $S = m \sum_{k=0}^K [\gamma_{\alpha\hat{a}}(k)]^2$ ，則 S 值近似 $\chi^2_{K+1-(r+s+1)}$ 分配，在此，
 $m = (N-d) - \mu - p$ ，

其中 $N-d$ 為 $\hat{N}_t$ 中之個數

μ 為 Max. ($r, s+b$)

p 為干擾模式 ARIMA

(p, d, q) 中 AR 參數之個數

($r+s+1$) 為變換函數模式中之參數個數。

如 S 值大於理論之 χ^2 值，則變換函數模式不正確，必須修正。

五、實例試驗

作者以1965至1972年月平均太陽黑子數及加拿大 Alberta 省 Edmonton 地方的月平均臭氧量做實例試驗。

選取此兩數列的理由乃因臭氧係由分子氧，經紫外輻射產生原子氧，然後再與分子氧結合而成；而太陽黑子數的多寡則代表太陽活力的增減，黑子數多表示太陽活力強盛，輻射熱亦同時增大；反之亦同。（林榮安，1962）故太陽黑子數與臭氧量間似有某種因果關係存在。在此例中，太陽黑子數為輸入數列，經太陽及地球系統產生的 Edmonton

地方臭氧量則為輸出數列，我們將以本文介紹的 Box-Jenkins 統計方法來鑑定、估計及診斷此系統的變換函數模式。

圖2及圖3分別為輸入與輸出數列，依前述說明，首先對輸入數列月平均太陽黑子數 X_t 加以鑑定，表1(a)是 X_t 自遲滯1至遲滯36個月的 acf (Autocorrelation Function) 及其估計標準差 ST. E.; 表1(b)則為其 pacf (Partial Autocorrelation Function)。由於 acf 為漸漸消失，且 pacf 只有遲滯1與2大於兩倍標準差，故初步鑑定輸入數列 X_t 之模式類型為 ARIMA(2,0,0)。由於數列之平均值為 72.532，此值除以標準差之值為

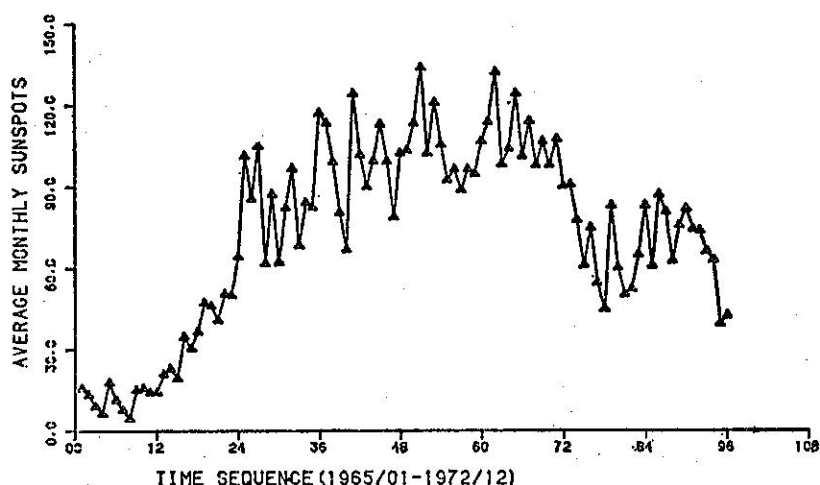


圖2. 1965至1972年月平均太陽黑子數
Fig 2. Averaged monthly sunspots from 1965 to 1972.

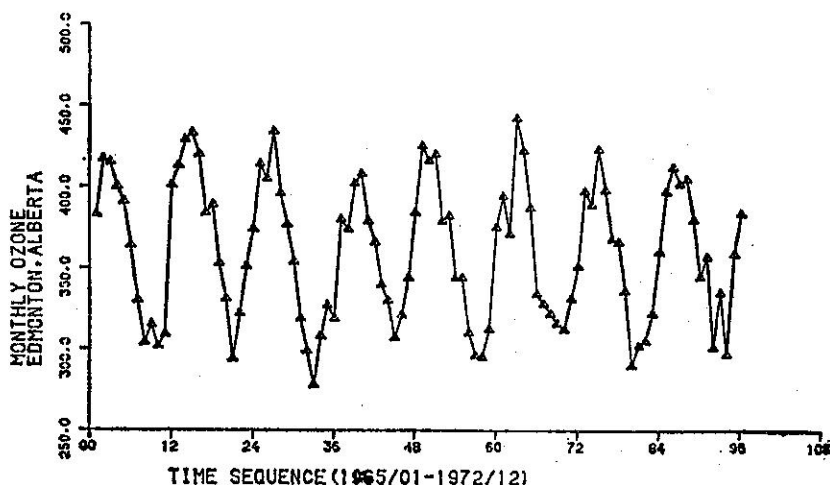


圖3. 1965至1972年加拿大 Edmonton 地方月·臭氧量
Fig 3. Monthly Ozone of Edmonton, Alberta, Canata from 1965 to 1972

20.8，遠大於 $t_{0.05}$ 分配之理論值1.96，故在所選時段內無趨勢項存在，所以初步鑑定之月平均太陽黑子數數列之模式為

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t \quad (5.1)$$

而 ϕ_1 及 ϕ_2 之估計值 $\hat{\phi}_1$ 及 $\hat{\phi}_2$ 可由下兩式算出：

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2} \quad (5.2)$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{r_2-r_1^2}{1-r_1^2} \quad (5.3)$$

在此 r_1 、 r_2 分別為遲滯1及2的acf， $r_1=0.86$ ， $r_2=0.82$ ，分別將之代入(5.2)及(5.3)後可得

$$\hat{\phi}_1=0.5945, \quad \hat{\phi}_2=0.3088$$

將 ϕ_1 及 ϕ_2 及 $\bar{X}$ 之預測值 0.5945，0.3088 及 72.532放入參數估計程式計算，可得輸入數列模式各參數值為

$$\phi_1=0.54676$$

$$\phi_2=0.37396$$

$$\bar{X}=74.363$$

接著，對輸入數列模式做合適性診斷，計算殘差數列的acf及pacf，結果見表2(a)及表2(b)，由兩表可看出無任一殘差大於兩倍標準差；再者殘差自相關的總體檢定Q值為16.445也小於 χ^2_{21} 分佈的

表1 (a) 月平均太陽黑子數的自相關函數

Table 1(a) The autocorrelation function of averaged monthly sunspots

1-12	0.86	0.82	0.77	0.73	0.71	0.64	0.63	0.56	0.54	0.49	0.44	0.40
ST.E.	0.10	0.16	0.20	0.23	0.25	0.27	0.29	0.30	0.31	0.32	0.33	0.34
12-24	0.34	0.32	0.26	0.23	0.20	0.15	0.13	0.08	0.03	-0.01	-0.05	-0.06
ST.E.	0.34	0.34	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35

表1 (b) 月平均太陽黑子數的偏自相關函數

Table 1 (b) The partial autocorrelation function of averaged monthly sunspots

1-12	0.86	0.30	0.11	0.02	0.10	-0.14	0.10	-0.16	0.05	-0.07	-0.03	-0.08
13-24	-0.03	0.02	-0.08	0.02	0.04	-0.06	-0.02	-0.06	-0.10	-0.03	-0.04	0.09

表2(a) 殘差數列的自相關函數

Table 2(a) The autocorrelation function of residuals

1-12	-0.07	-0.15	-0.01	-0.00	0.12	-0.12	0.12	-0.08	0.07	0.06	-0.03	0.03
ST.E.	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11
13-24	-0.12	0.07	-0.09	0.00	0.11	-0.04	0.08	0.02	-0.01	-0.05	-0.08	0.06
ST.E.	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.12	0.12	0.12	0.12

表2(b) 殘差數列的偏自相關函數

Table 2(b) The partial autocorrelation function of residuals

1-12	-0.07	-0.16	-0.03	-0.03	0.12	-0.11	0.15	-0.11	0.11	0.01	0.04	-0.01
13-24	-0.06	0.01	-0.09	-0.00	0.08	-0.01	0.08	0.08	-0.02	-0.02	-0.09	0.01

理論值32.671，故所得之月平均太陽黑子數模式為合適的；亦即某月平均太陽黑子數受前一個月及前二個月的平均太陽黑子數影響。至此吾人可得先白噪化模式 (Prewhitened Model) 為

$$(1-0.54676B-0.37396B^2)(X_t-74.363)=a_t$$

對輸出數列 Y_t 施以同樣的變換，並計算兩數列間的交互相關函數 $R_{\alpha\beta}(k)$ 及脈衝反應權重 $\nu(k)$ ，分別如表3(a)及表3(b)所示。

表3(a) 月平均太陽黑子數與 Edmonton 地方月臭氧量間之交互相關函數

Table 3(a) The crosscorrelation function between averaged monthly sunspots and monthly ozone, Edmonton

No. of lags on X_t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{\alpha\beta}(k)$	-0.159	-0.128	0.315	-0.068	-0.068	-0.035	0.070	0.044	-0.101	0.121
No. of lags on X_t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$R_{\alpha\beta}(k)$	-0.180	-0.054	0.251	0.034	-0.147	-0.069	0.064	0.018	0.023	0.076

表3(b) 系統之脈衝反應權重函數

Table 3(b) The impulse response function of the system

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\nu(k)$	-0.340	-0.273	0.674	0.146	-0.075	0.150	0.094	-0.216	0.259	-0.384
k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\nu(k)$	-0.115	0.536	0.072	-0.314	-0.148	0.136	0.039	0.050	0.163	-0.375

將表3(a)中之交互相關函數值與兩倍估計標準差值0.20628比較，除了 $R_{\alpha\beta}(2)$ 及 $R_{\alpha\beta}(12)$ 外，餘均較其為小，因為我們要的是類型（pattern）所以可以忽略 $R_{\alpha\beta}(12)$ ，由

$$R_{\alpha\beta}(0)=R_{\alpha\beta}(1)=0, \text{ 可得}$$

$$b=2, r=0, s=0$$

故初步鑑定之變換函數模式為 $(0,0)_2$ ，也就是

$$Y_t = \omega_0 B^2 (X_t - \bar{X})$$

將 ω_0 之估計值 $\nu_2=0.674$ 代入可得

$$Y_t = 0.674 B^2 (X_t - 74.363)$$

至於干擾部份，其acf及pacf如表4(a)及表4(b)所示，從此兩表中可看出acf中僅遲滯為1者不為零；而pacf則為阻尼正弦波，故初步鑑定干

擾模式為ARIMA(0,0,1)，即

$$N_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

由公式

$$\gamma_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} = -0.32$$

可得 θ_1 之估計值 $\hat{\theta}_1 = 0.3619$ ，但此模式却無法通過殘差自相關的總體檢定。根據前述模式之診斷中所述，變換函數模式正確而干擾模式不正確，則必須修正干擾模式。作者曾嘗試以下列四個模式代表干擾部份：

$$(\rightarrow) \text{ARIMA}(0,0,1) \times (0,1,0)_{12}$$

$$(\rightarrow) \text{ARIMA}(1,0,1)$$

$$(\rightarrow) \text{ARIMA}(1,0,1) \times (0,1,0)_{12}$$

表4(a) 干擾數列的自相關函數

Table 4(a) The autocorrelation function of the noise

1-12	-0.32	0.15	0.04	0.03	0.20	-0.10	0.17	0.08	-0.07	0.11	-0.05	-0.13
ST.E.	0.11	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14
13-24	0.07	-0.05	0.24	-0.19	0.03	0.02	-0.06	0.02	-0.04	0.11	0.13	-0.08
ST.E.	0.14	0.14	0.14	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15

表4(b) 干擾數列的偏自相關函數

Table 4(b) The partial autocorrelation function of the noise

1-12	-0.32	0.05	0.11	0.07	0.24	0.02	0.11	0.16	-0.05	-0.01	-0.04	-0.30
13-24	-0.13	-0.04	0.25	0.08	0.06	0.04	0.01	-0.07	-0.06	0.02	0.19	0.06

$$(\rightarrow) \text{ARIMA}(1,0,0) \times (1,0,0)_{12}$$

但這些模式仍然無法通過殘差自相關的總體檢定，最後作者以 $\text{ARIMA}(0,0,1) \times (0,0,1)_{12}$ 亦即

$$N_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_2 B^{12}) a_t$$

代表干擾部份方才通過殘差自相關的總體檢定。經

參數估計程式計算後， $\hat{\theta}_1 = 0.7$ ， $\hat{\theta}_2 = 0.9$

故干擾模式為

$$N_t = (1 - 0.7B)(1 - 0.9B^{12}) a_t$$

至此，可以進行模式的診斷，首先檢查表5殘差數列 $\hat{a}_t$ 的acf，其中並無任一遲滯的acf大於兩倍標準差；次就 $\hat{a}_t$ 自相關的總體檢定，求得之Q值為28.1，較 $\chi^2_{0.05,22}$ 之理論值33.92為小，故 $\hat{a}_t$ 是白

噪音過程。

再就先白噪化後之輸入數列 α_t 與殘差數列 $\hat{a}_t$ 間之交互相關函數加以檢定，表6列出了交互相關函數值，除遲滯1、11、19之值與兩倍標準差值相近外，餘均較小；而交互相關總體檢定值 $S=25.741$ ，遠較 $\chi^2_{0.05,18}$ 理論值49.78為小，故 α_t 與 $\hat{a}_t$ 不相關。

至此模式已通過診斷，故鑑定之變換函數模式及干擾模式均為正確，其中變換函數模式為 $(0,0)_2$ ，亦即

$$Y_t = 0.0122 B^2 (X_t - 74.363)$$

而干擾模式則為 $\text{ARIMA}(0,0,1) \times (0,0,1)_{12}$ ，即

$$N_t = (1 - 0.702B)(1 - 0.923B^{12}) a_t$$

表5 殘差數列 $\hat{a}_t$ 之自相關函數

Table 5 The autocorrelation function of $\hat{a}_t$

1-12	-0.09	0.07	-0.05	0.04	0.19	-0.16	0.14	-0.09	-0.09	-0.03	-0.23	-0.15
ST.E.	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.13
13-24	-0.19	0.03	0.13	-0.07	-0.10	-0.05	-0.06	0.03	0.13	0.05	0.06	-0.01
ST.E.	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14

表6 α_t 與 $\hat{a}_t$ 間之交互相關函數

Table 6 The crosscorrelation function between α_t and $\hat{a}_t$

No. of lags on α_t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\gamma_{\alpha\hat{a}}(k)$	-0.093	-0.270	0.050	0.118	-0.095	0.055	-0.055	0.047	-0.005	0.046
No. of lags on α_t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\gamma_{\alpha\hat{a}}(k)$	0.024	-0.222	0.076	-0.033	0.035	0.038	-0.110	0.010	-0.087	0.238
No. of lags on α_t	20	21	22	23	24					
$\gamma_{\alpha\hat{a}}(k)$	-0.057	-0.155	0.075	0.002	0.178					

六、結 論

傳統估計變換函數模式的方法，如脈衝反應法、頻率反應法及步進反應法等都是基於選擇特殊的輸入值輸入系統，然後直接在時間域（Time Domain）內測量反應函數；在頻率域內測量增益和相位等特徵，非但必須估計甚多之參數，而且當系統有相當之干擾時，這些方法往往無法得到正確之結果。

本文提出的 Box-Jenkins 統計方法，係將輸入及輸出兩數列用變換函數模式及干擾模式兩部份表示，由於干擾部份可用 ARIMA (p,d,q) 有效的代表，故連帶的使變換函數模式的估計更為有效。

文內除了詳細說明鑑定、估計及診斷變換函數模式的方法及過程外，並以1965至1972年月平均太陽黑子數與加拿大 Edmonton 地方的月臭氧量等兩數列為例做實際應用，經研究結果發現變換函數模式為 (0,0)₂，而干擾模式則為 ARIMA (0,0,1)

$\times (0,0,1)_{12}$ 。

作者認為 Box-Jenkins 提出的統計方法既能有效的估計變換函數模式，使吾人得以進一步同時利用過去的輸入及輸出值預報未來的輸出值，在氣象預報方面，此法不失為一有效的工具，值得進一步研究應用。

參 考 文 獻

1. Box G. E. P. and G. M. Jenkins, 1976: Time Series analysis forecasting and control. Holden-Day, San Francisco, 208-274.
2. 曾忠一，1980：時間數列分析，理論氣象講座第18卷，臺大大氣科學系講義，23—24頁。
3. 林榮安，1982：太陽黑子之研究，氣象學報 8 卷 2 期，第31頁。
4. 向傳心、張德新，1977：Lecture notes on time series analysis, 51-53.
5. 胡仲英，1977：應用 ARIMA 模式對臺北市月平均溫度與總降水量的分析與預測，氣象學報23卷第3期，15-26。

The Identification, Estimation and Diagnostic Checking of Transfer Function Model

Shi-Yang Chen

Deputy Director of Computer Center, C. W. B.

ABSTRACT

By using Box-Jenkins method, a detailed description of identification, estimation and diagnostic checking of transfer function model is presented. Also, this approach is applied to two time series of averaged monthly sunspots and monthly ozone of Edmonton, Alberta, Canada. It is realized that the transfer function model is $(0,0)_2$, and the noise model could be represented by the ARIMA $(0,0,1) \times (0,0,1)_{12}$.