

應用 ARIMA 模式對臺北市月平均溫度與總降水量的分析與預測

Analysis and Forecast of Taipei Monthly-mean Temperature and Total-amount Precipitation by ARIMA Model

胡 仲 英

Hu Chung-ying

ABSTRACT

This paper presents a statistical analysis and forecast of the monthly-mean temperature and total-amount precipitation in Taipei. The basic statistical tool used in this paper is the so-called "ARIMA model", which is developed by Box and Jenkins. These authors have constructed a very extensive class of time series models which are capable of representing stationary, nonstationary and seasonal data, and have developed an efficient model building procedure. Data covering the period January 1963 through December 1976 are used to construct the models. One-step-ahead forecasts are calculated from January 1974 to December 1976 and are compared with actual observations. Use the models we also forecast Taipei monthly-mean temperature and total-amount precipitation in 1977.

一、簡介

在一時期內對於一物理量作等時距連續觀測所得的數列稱之為時間數列。時間數列分析方法一般可分成兩類：(1)頻率域分析 (Analysis in frequency domain)，亦稱為分譜分析 (Spectral analysis)，係將時間數列之變化以不同頻率之分量部分表示，此法已為國內氣象學者⁽¹⁾，普遍應用，本文不擬討論。(2)時間域分析 (Analysis in time domain)，古典的時間域分析大致將影響觀測物理量的因素分成⁽²⁾長期趨勢 (Secular trend)，季節變動 (Seasonal variation) 循環變動 (Cyclical movement) 及偶

然變動 (Irregular fluctuation) 等四類，前三者均係有規則之變動，可用統計法測定，而偶然變動為一不規則變動，用古典時間數列分析法很難予以測定。Box and Jenkins 在 1970 年提出一種新的時間數列分析法⁽³⁾，係依各種觀測物理量時間數列的特性建立不同的隨機時間數列模式 (Stochastic model)，並應用所建立的隨機模式作預測，此隨機模式包括自迴歸 (Auto-regression 簡寫為 AR)，積分 (Integral, 簡寫為 I) 與移動平均 (Moving-average, 簡寫為 MA) 三部分，或簡稱為 ARIMA 時間數列模式，目前已經被廣泛地應用到工程、經濟、商業及自然科學方面的決策分析、控制研究與定

量預測。本文簡單介紹 ARIMA 時間數列模式，並將此模式應用到臺北月平均溫度與月總降水量預報，俾對國內長期定量預報提供一客觀的新方法。

二、模式的建立

ARIMA 基本概念在於一物理量的過去觀測值 (Z_t) 可由一線性隨機模式來代表，而該物理量未來的預報則可藉此模式由有限 p 個過去觀測值 (AR (p) 模式) 之權重和，再加上有限 q 個過去的擾動值 (MA (q) 模式) 之權重和作成。AR (p) 模式可寫成：

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t \quad (2.1)$$

此處 $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$, μ 為觀測物理量平均值， $\phi_1, \phi_2 \dots \phi_p$ 為 AR (p) 模式的 p 項參數， $\{a_t\}$ 數列為擾動 (Shocks)，統計上假設此擾動數列有一常態分配 (Normal distribution) 其期望值 (Expect value) 為 0，變異數 (Variance) 為 σ_a^2 ，此一序列之隨機變數 a_t, a_{t-1}, \dots 又稱為白噪音 (white noise)。

吾人若定義函數 $\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$, B 為後移運算子 (Backshift operator)， $BZ_t = Z_{t-1}, B^2Z_t = Z_{t-2}, \dots$ 則 (2.1) 式可改寫成：

$$\phi(B) \tilde{Z}_t = a_t \quad (2.2)$$

MA (q) 模式可寫成：

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.3)$$

$\theta_1, \theta_2 \dots \theta_q$ 為 MA (q) 模式的 q 項參數， a_t, a_{t-1}, \dots 係白噪音，吾人若定義函數 $\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$ ，則 (2.3) 式可寫成：

$$\tilde{Z}_t = \theta(B) a_t \quad (2.4)$$

綜合 (2.1), (2.3), ARMA (p,q)，混合模式可寫成：

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_t = & \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t \\ & - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \end{aligned} \quad (2.5)$$

或簡寫成：

$$\phi(B) \tilde{Z}_t = \theta(B) a_t \quad (2.6)$$

上式係適用於時間數列在一統計的平穩狀態 (Stationary)，亦即觀測數列在其平均值有限範圍內變動，而其機率分配不因時間改變，實際上甚多時間數列具有某一傾向或趨勢的非平穩性 (Non-stationary)，此時可用下式代表 ARIMA (p,d,q)：

$$\phi(B) \nabla^d Z_t = \theta(B) a_t \quad (2.7)$$

∇^d 運算子的功用係將一非平穩性的時間數列 Z_t 取 d 次差分後變換為平穩的時間數列， $\nabla = (1 - B)$, $\nabla^2 = (1 - B)^2, \dots$

以上係介紹 ARIMA 的數學結構，吾人得依觀測物理量的性質建立最適當的 ARIMA 模式，模式建立的程序可概述如下：

- 1.由對觀測物理量的瞭解，決定採用經驗模式的類型。
- 2.利用統計方法鑑定模式類型。
- 3.由已有的觀測數列來估計模式中未知參數值。
- 4.診斷並檢驗此模式是否適當：模式是否能正確的代表觀測時間數列，模式是否合乎精簡原則 (Principle of parsimony)。
- 5.如果模式為適當，則可用於分析與預測，如果模式不適當，吾人需重新作 2~4 步驟，直到尋獲適當模式為止。茲進一步討論模式建立的每一程序：

1. 鑑定模式類型 (Identification) :⁽⁴⁾

A. 非季節性模式

如觀測物理量沒有明顯的週期性存在，吾人可用非季節性 (Non-seasonal) 時間數列模式來處理，非季節性模式的鑑定係利用自相關及部分自相關函數 (Autocorrelation and partial autocorrelation function)，自相關函數 (簡寫為 acf) 統計量可由下式求得：

$$\hat{\rho}_k = -\frac{R_k}{R_0} \quad k=0,1,2,\dots,L \quad (2.8)$$

$\hat{\rho}_k$ 為遲滯 (Lag) k 時間的 acf, R_k 為遲滯 k 時間的自協變量數 (Autocovariance)，其數學公式為：

$$R_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-L} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})$$

N 為觀測物理量數目， L 為最大遲滯時間， \bar{Z} 為觀測物理量平均值。Bartlett⁽⁵⁾ 證明當模式為 MA(q) 時，acf 的估計標準差 (Standard error) 為：

$$SE(\hat{\rho}_k) = \sqrt{VAR(\hat{\rho}_k)}$$

$$VAR(\hat{\rho}_k) = \frac{1}{N} \{1 + 2 \sum_{v=1}^q \hat{\rho}_v^2\} \quad k>q \quad (2.9)$$

部分自相關函數 (簡寫為 pacf) 統計量可由下式求得：

$$\hat{\Phi}_{kk} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \dots & \hat{\rho}_2 \\ \hat{\rho}_2 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\rho}_{k-1} & \hat{\rho}_{k-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}} \quad \dots \quad (2.10)$$

$\hat{\phi}_{kk}$ 為遲滯 k 時間的 pacf，由 (2.10) 式可知 pacf 可由 acf 計算求得。Quenouille⁽⁶⁾ 證明當模式為 AR(p) 時，pacf 的估計標準差為：

$$SE(\hat{\phi}_{k,k}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad k \geq p+1 \dots \dots \dots (2.11)$$

由觀測數列的 acf 及 pacf，依照下述原則，吾人可鑑定模式類型：

(1) 若 acf 是漸漸消失 (tail off), 而 $k \leq p$ 時 $pacf$ 為顯着 *, $k > p$ 時 $pacf$ 為不顯着, 此時吾人可鑑定此數列為 $AR(p)$ 模式。

(2)若當 $k \leq q$ 時 acf 為顯着， $k > q$ 時 acf 為不顯着，而 $pacf$ 是漸漸消失，則可鑑定此數列為 $MA(q)$ 模式。

(3) 若 acf 於遲滯 $q-p+1$ 時間開始呈現指數 (exponential) 及阻尼正弦波 (damped sine wave) 混合型的衰退消失圖形，而 $pacf$ 亦於遲滯 $p-q+1$ 時間開始呈混合的指數及阻尼正弦波衰退消失圖形，則可鑑定此時間數列為 ARMA (p,q) 模式。

d 值的決定：由理論證明非平穩性時間數列的 **acf** 不會迅速趨近於零，此時吾人需先計算時間數列的差分值 ($W_t = \nabla^d Z_t$, $d=0,1,2,\dots$) 使差分值數列的 **acf** 很快趨於零，此最小的 **d** 值即為所需差分的次數。

B.季節性模式

自然界的觀測物理量，例如溫度或降水均具有一個或多個自然週期，因此自然界的觀測數列需要用季節性 (seasonal) 模式來處理，季節性 ARIMA 模式由下述兩部分組成：

(1) 週期變化部分：如觀測數列有 s 的季節性週期存在，則可用下述模式表示其週期變化部分：

$$(1 - \phi_1^* - \dots - \phi_{p_1}^* B^{p_1 s}) (1 - B^s)^{d_1} \tilde{Z}_t \\ = (1 - \theta_1^* B^s - \dots - \theta_{q_1}^* B^{q_1 s}) e_t \dots (2.12)$$

上式中 $\phi_1^* \dots \phi_p^*$ 為季節性 AR(p_1) 模式的 p_1 項係數， d_1 為差分次數， $\theta_1^* \dots \theta_{q_1}^*$ 為季節性 MA (q_1) 模式的 q_1 項係數， $\{e_t\}$ 為另一時間數列。

(2) 非週期變化部分：

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) (1 - B)^d e_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) a_t \dots \dots \dots (2.13)$$

此處 $\{a_i\}$ 數列係滿足常態分配，期望值為 0，變異數為 σ_a^2 ，

聯合 (2.12), (2.13) 兩式，吾人可得季節性 ARIMA 的一般式：

$$\phi_p(B)(1-B)^d \phi_{p1}^*(B^s) (1-B^s)^{d1} Z_t \\ = \theta_q(B) \theta_{q1}^*(B^s) a_t \dots \dots \dots \quad (2.14)$$

此處 $\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$,

$$\theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q),$$

$$\phi_{p^1}^*(B^e) = (1 - \phi_1^* B^s - \dots - \phi_{p^1}^* B^{p^1 s}),$$

$$\theta_{q_1}*(B^s) = (1 - \theta_1*B^s - \dots - \theta_{q_1}*B^{q_1 s}),$$

(2.14) 式稱為 $(p, d, q) \times (p_1, d_1, q_1)$ 的相乘

季節性模式，此類模式的鑑定參見⁽⁷⁾。

2. 估計模式中參數值 (Estimation) (6):

經由模式鑑定，吾人可得代表觀測時間數列的隨機模式（2.6 式或 2.14 式），模式中的諸參數 (ϕ_1 , θ_1 及 $/$ 或 ϕ_{p1}^* , θ_{q1}^*) 可先由理論（查圖或表）找到初始參數值（Initial value）代入模式可求得與觀測同時間的預測值 \hat{Z}_t ，利用殘差（實際值與預測值的差）的非線性最小平方差法（Non-linear least square error method），應用 Marquardt 數值解法，經過若干次疊代（Iterations）計算，即可求出較精確的參數值，疊代次數視吾人所要求模式參數的精確度及初始參數值的恰當與否而定。

3. 模式診斷 (Diagnostic checking) ⁽⁹⁾

當鑑定模式的參數估計後，吾人需進一步瞭解此模式是否能最佳地代表觀測時間數列，即需對模式的適性 (Goodness of fit) 作診斷工作，診斷的方法有下述兩種：

(1) 殘差數列自相關的個別檢定：

假設吾人由一時間數列經過鑑定及參數估計求得的隨機模式爲：

式中 $\hat{\theta}_p(B)$, $\hat{\theta}_q(B)$ 為由最小平方差估計的參

*在模式鑑定時，吾人取 95% 信賴度，即兩倍標準差當作顯着區間，當 acf 或 $pacf$ 大於其兩倍標準差時，吾人可視為顯着，反之則為不顯着。

列模式實驗，月平均溫度係先由 24 小時逐時觀測計算每日平均值，再取月平均而得之，由圖 1 可看出月平均溫度變化相當規則，通常一、二月最低溫，七、八月最高溫，觀測數列 Z_t 總數為 168 個，表 1 是 Z_t 自遲滯 1 到遲滯 36 個月的 acf，ST.E. 為依 (2.9) 式計算的估計標準差，acf 呈波動變化，在遲滯 1, 12,

24, 36 處均出現高峯且波幅不隨遲滯時間減小，顯然有一週期為 12 個月的季節變化存在，故取 $s=12$ ，並令 $y_t = (1-B^{12})Z_t = Z_t - Z_{t-12}$ ，再求 y_t 的 acf 結果見表 2(a)，遲滯 1, 10, 11, 12 的 acf 大於兩倍標準差，遲滯 8 的 acf 約等於兩倍標準差，其餘 acf 均小於兩倍標準差，計算 y_t 的 pacf 見表 2(b)，

表 1. 臺北月平均溫度時間數列的 acf

1-12 ST. E.	0.82 0.08	0.46 0.12	-0.01 0.13	-0.46 0.13	-0.78 0.14	-0.90 8.16	-0.78 0.19	-0.45 0.21	0.00 0.21	0.43 0.21	0.75 0.22	0.87 0.23
13-24 ST. E.	0.75 0.25	0.42 0.27	-0.01 0.27	-0.42 0.27	-0.72 0.27	-0.83 0.28	-0.72 0.30	-0.41 0.31	0.00 0.31	0.41 0.31	0.70 0.31	0.80 0.32
25-36 ST. E.	0.69 0.34	0.39 0.34	-0.00 0.35	-0.39 0.35	-0.67 0.35	-0.77 0.36	-0.66 0.37	-0.38 0.37	0.01 0.38	0.38 0.38	0.65 0.38	0.74 0.38

表 2. (a) 臺北月平均溫度季節差分的 acf

1-12 ST. E.	0.29 0.08	0.15 0.08	0.05 0.08	0.15 0.09	0.06 0.09	-0.09 0.09	-0.16 0.09	-0.19 0.09	-0.07 0.09	-0.21 0.09	-0.27 0.09	-0.48 0.10
13-24 ST. E.	-0.08 0.11	-0.08 0.11	-0.02 0.11	-0.05 0.11	0.05 0.11	0.12 0.11	0.08 0.11	0.11 0.11	0.03 0.11	0.16 0.11	0.04 0.12	0.11 0.12
25-36 ST. E.	0.02 0.12	0.06 0.12	0.01 0.12	0.07 0.12	0.02 0.12	0.01 0.12	-0.02 0.12	-0.04 0.12	0.08 0.12	-0.02 0.12	0.07 0.12	-0.13 0.12

表 2. (b) 臺北月平均溫度季節差分的 pacf

1-12	0.29	0.07	-0.01	0.14	-0.01	-0.14	-0.12	-0.13	0.02	-0.16	-0.17	-0.38
13-24	0.15	-0.06	0.02	0.01	0.03	-0.04	-0.09	-0.02	-0.06	0.00	-0.17	-0.07
25-36	0.09	-0.01	0.02	0.11	0.05	0.03	-0.08	0.01	0.12	0.00	0.02	-0.12

pacf 的標準差由 (2.11) 式計算為 0.08，由表 2(b) 可見遲滯 1, 10, 11, 12, 23 均大於或等於兩倍標準差，其餘 pacf 均較小，故初步鑑定臺北月平均溫度數列為下述模式：

$$(1-\phi_1 B - \phi_{12} B^{12})(1-B^{12})Z_t = \theta_0 + (1-\theta_1 B - \theta_{12} B^{12}) a_t \quad \dots \dots \dots (3.1)$$

經過參數估計程式計算，吾人得 (3.1) 式各參數

值如下：

$$\phi_1 = 0.067, \phi_{12} = -0.159$$

$$\theta_0 = -0.220, \theta_1 = -0.152, \theta_{12} = 0.690 \dots (3.2)$$

接着吾人對 (3.1) 式模式作適性的診斷，由 (2.16)

式計算此模式的殘差數列，殘差平方和為 200.3，再用 (2.18) 及 (2.10) 式分別計算殘差的 acf 及 pacf，結果見表 3(a) 及 3(b)，由二表可看出殘差遲滯 11

表 3. (a) 臺北月平均溫度 (3.1) 式 殘差的 acf

1-12 ST. E.	0.01 0.08	0.08 0.08	-0.04 0.08	0.14 0.08	0.00 0.09	-0.10 0.09	-0.12 0.09	-0.10 0.09	-0.02 0.09	-0.07 0.09	-0.20 0.09	0.08 0.09
13-24 ST. E.	-0.03 0.09	-0.02 0.09	0.01 0.09	0.05 0.09	0.06 0.09	0.14 0.09	-0.03 0.09	0.03 0.09	0.05 0.09	0.07 0.09	-0.09 0.10	0.02 0.10
25-36 ST. E.	-0.01 0.10	-0.05 0.10	-0.06 0.10	0.05 0.10	0.01 0.10	0.10 0.10	0.01 0.10	-0.10 0.10	0.16 0.10	-0.03 0.10	0.09 0.10	-0.12 0.10

表 3. (b) 臺北月平均溫度 (3.1) 式 殘差的 pacf

1-12	0.01	0.08	-0.04	0.14	0.01	-0.13	-0.11	-0.18	-0.02	-0.04	-0.18	0.11
13-24	-0.03	-0.08	0.06	0.00	0.01	0.13	-0.08	0.01	0.05	-0.00	-0.02	0.03
25-36	-0.00	-0.03	-0.04	0.11	0.06	0.06	0.06	-0.13	0.15	-0.07	0.09	-0.05

個月的 acf 及 pacf 均略大於兩倍標準差，雖然僅此一個不通過殘差個別檢定，其機率小於 5%，且 Q 值為 34.1 也小於 $\chi^2(31)$ 理論值，原 (3.1) 式應為可適用模式，但為求模式能最佳的擬合，吾人作下述的改進：

$$(1 - \phi_1 B - \phi_{11} B^{11} - \phi_{12} B^{12})(1 - B^{12})Z_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 B - \theta_{11} B^{11} - \theta_{12} B^{12})a_t \quad (3.3)$$

(3.3) 式各參數值經過估計後得下列值：

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 0.121, \phi_{11} = -0.076, \phi_{12} = 0.132 \\ \theta_0 &= -0.022, \theta_1 = -0.087, \theta_{11} = 0.099, \\ \theta_{12} &= 0.664\end{aligned}\quad (3.4)$$

(3.3) 式模式的殘差平方和減少為 195.2，表 4

(a) 及 (b) 分別為修正模式殘差的 acf 及 pacf，由二表可看出均無一者為顯著，殘差的平均值為

表 4. (a) 臺北月平均溫度 (3.3) 式 殘差的 acf

1-12 ST. E.	0.00 0.08	0.07 0.08	-0.07 0.08	0.13 0.08	0.01 0.09	-0.09 0.09	-0.08 0.09	-0.12 0.09	-0.01 0.09	-0.07 0.09	-0.04 0.09	0.05 0.09
13-24 ST. E.	0.02 0.09	-0.04 0.09	0.02 0.09	0.03 0.09	0.07 0.09	0.13 0.09	-0.04 0.09	0.03 0.09	0.02 0.09	0.09 0.09	-0.06 0.09	0.03 0.09
25-36 ST. E.	-0.02 0.09	-0.06 0.09	-0.07 0.09	0.05 0.09	0.02 0.09	0.09 0.09	0.01 0.09	-0.10 0.09	0.16 0.09	-0.03 0.10	0.12 0.10	-0.14 0.10

表 4. (b) 臺北月平均溫度 (3.3) 式 殘差的 pacf

1-12	0.00	0.07	-0.07	0.13	0.02	-0.12	-0.06	-0.12	-0.02	-0.03	-0.03	0.08
12-24	0.01	-0.08	0.03	-0.01	0.04	0.15	-0.06	0.03	0.03	0.04	-0.02	0.04
25-36	0.01	-0.05	-0.06	0.09	0.03	0.09	0.06	-0.13	0.14	-0.07	0.08	-0.06

-0.02，平均值標準差為 0.1，強烈顯示殘差的分配趨向零平均。再者，修正模式的 Q 值為 28.1 也遠小於 $\chi^2(29)$ 理論值，並由表 5 可看出 (3.3) 式各參數間相關係數均甚小，至此可確定 (3.3) 式為臺北月平均溫度數列的最佳模式。展開 (3.3) 式，吾人得：

$$\begin{aligned}Z_t &= \phi_1 Z_{t-1} + \phi_{11} Z_{t-11} + \phi_{12} Z_{t-12} - \phi_1 Z_{t-13} \\ &\quad - \phi_{11} Z_{t-23} - \phi_{12} Z_{t-24} + \theta_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1} \\ &\quad - \theta_{11} a_{t-11} - \theta_{12} a_{t-12} \quad (3.5)\end{aligned}$$

由 (3.5) 式可看出臺北某月的平均溫度，受前

1, 11, 12, 13, 23 及 24 等月份平均溫度影響，並且受前 1, 11, 12 及當月份擾動的影響。利用 (3.3) 式最佳模式，吾人自 1974 年 1 月開始作逐月預測 (One-step-ahead forecast)，結果繪於圖 2 實線，虛線則為實際觀測值。由圖 2 顯示 (3.3) 式對臺北月平均溫度數列有很好的擬合，預測的季節變化大致與實際一致，惟 1974 年 12 月 (第 12 點) 實際月平均溫度為 18.8，預測為 16.7°C，誤差達 2.1°C，其餘各月誤差均接近或小於 1 度，36 個月的平均絕對誤差僅為 0.7 度。

表 5. (3.3) 式各參數相關係數表

	ϕ_1	ϕ_{11}	ϕ_{12}	θ_0	θ_1	θ_{11}	θ_{12}
ϕ_1	1.0000						
ϕ_{11}	0.0981	1.0000					
ϕ_{12}	0.1954	-0.1632	1.0000				
θ_0	0.0344	-0.0067	-0.0761	1.0000			
θ_1	0.6877	0.0788	0.2197	-0.0228	1.0000		
θ_{11}	0.0641	0.5888	-0.0751	-0.0666	0.0804	1.0000	
θ_{12}	0.0025	0.0321	0.5261	-0.1092	-0.0005	0.0432	1.0000

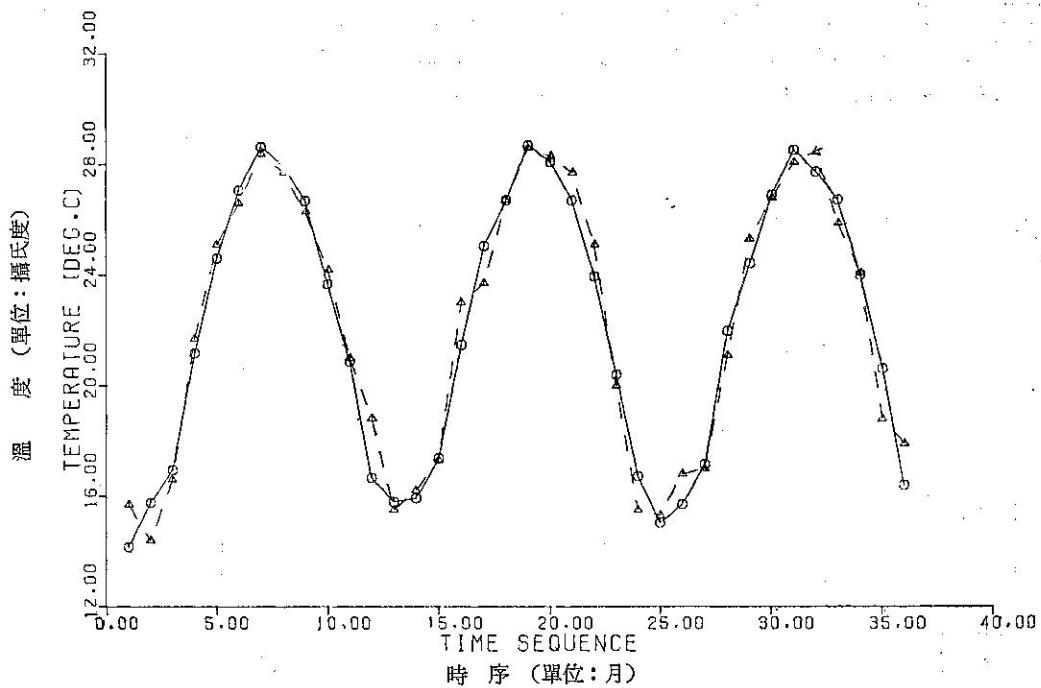


圖 2. 臺北逐月平均溫度預測 (1974 年 1 月至 1976 年 12 月)：實線為預測值，虛線為實際觀測值

(二) 作者其次取 1963 年 1 月至 1976 年 12 月臺北逐月總降水量時間數列(見圖 3)作 ARIMA

模式實例討論。表 6 是 Z_t 自遲滯 1 到遲滯 36 個月的 acf，由於呈明顯波動變化，且在遲滯 1, 12,

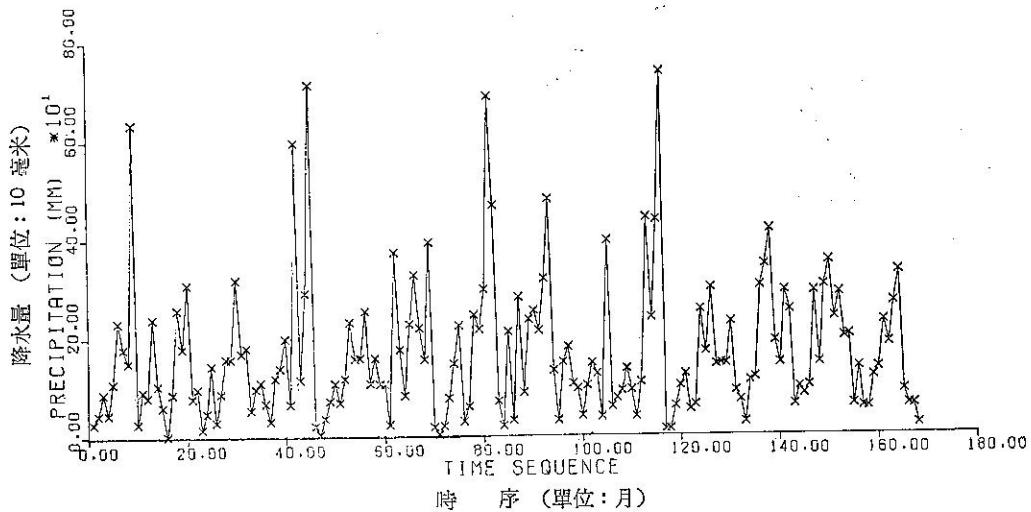


圖 3. 臺北逐月總降水量 (1963 年 1 月至 1976 年 12 月)

表 6. 臺北月降水量時間數列的 acf

24, 36 號均出現高峯，波幅不隨時間減小，顯然有一週期為 12 的季節變化存在，故取 $s=12$ ，並令 $y_t = (1 - B^{12})Z_t$ ，再求 y_t 的 acf，結果見表 7(a)，遲

滯 12 的 acf 遠大於兩倍標準差，遲滯 3 的 acf 等於兩倍標準差，其餘諸值均遠小於兩倍標準差，由 y_t 的 $pacf$ (見表 7 (b))，可看出遲滯 12, 24, 36

表 7. (a) 臺北月降水量季節差分的 acf

表 7. (b) 臺北月降水量季節差分的 pacf

1-12	0,05	-0,00	0,16	-0,07	-0,05	0,00	0,07	-0,03	-0,15	-0,04	0,01	-0,45
13-24	-0,07	-0,03	0,08	0,04	0,02	0,04	-0,14	0,08	-0,22	0,01	0,01	-0,31
25-36	-0,02	-0,02	0,10	-0,06	0,05	-0,04	0,05	0,02	-0,07	0,16	-0,03	-0,12

顯著地大於兩倍標準差，遲滯 3 的 pacf 約等於兩倍標準差，故初步鑑定臺北逐月總降水量為下述模式：

$$(1-\phi_3 B^3) (1-\phi_{12} * B^{12}) (1-B^{12}) Z_t = \theta_0 + (1-\theta_2 B) (1-\theta_{12} * B) a, \dots \dots (3.6)$$

經過參數估計程式計算，吾人得 (3.6) 式各參數

值如下：

$$\phi_3 = -0.007, \phi_{12}^* = -0.185$$

$$\theta_0 = 5.668, \quad \theta_3 = -0.046, \quad \theta_{12}^* = 0.83\cdots \quad (3.7)$$

其次，吾人對(3.6)式模式作適性診斷，其殘差的平方和為 2.31×10^6 ，殘差的 acf 及 pacf 見表 8(a) 及 8(b)，由此二表可看出遲滯 9 的 acf 及

表 8. (a) 臺北月降水量 (3.6) 式 殘差的 acf

表 8. (b) 臺北月降水量 (3.6) 式 殘差的 pacf

1-12	0,07	-0,06	0,03	-0,10	0,02	0,10	0,01	-0,04	-0,19	0,02	0,05	0,09
13-24	-0,12	-0,03	-0,03	0,01	0,06	-0,03	-0,02	0,07	-0,07	0,10	0,03	-0,00
25-36	-0,05	-0,01	0,04	-0,07	0,02	-0,11	0,22	-0,07	0,07	0,09	0,02	0,03

pacf 為顯着，雖然僅比一個不通過殘差檢定，其機率小於 5%，且 Q 值為 27.3 遠小於 $\chi^2(31)$ 理論值，但吾人為求模式能最佳的擬合，故取修正模式如下：

$$(1-\phi_3 B^3 - \phi_9 B^9)(1-\phi_{12}^* B^{12})(1-B^{12}) Z_t = \theta_0 + (1-\theta_3 B^3 - \theta_9 B^9)(1-\theta_{12}^* B^{12}) a_t \quad (3.8)$$

(3.8) 式各參數經過估計後得下列值：

$$\phi_3 = 0.09, \quad \phi_9 = -0.147, \quad \phi_{12}^* = 0.06$$

$$\theta_0 = 5.508, \quad \theta_3 = -0.016, \quad \theta_9 = 0.04,$$

(3.9) 式模式殘差平方和減少為 2.29×10^6 ，表 9 (a) 及 9 (b) 分別為此修正模式的 acf 及 pacf。由兩表可看出均無一者為顯著，其 Q 值為 18.9 遠小於 $\chi^2(29)$ 理論值，由於 (3.8) 式的參數較多，吾人進一步分析各參數間的相關性，計算相關係數見

表 9. (a) 臺北月降水量 (3.8) 式 殘差的 acf

1-12 ST. E.	0.08 0.09	-0.04 0.09	-0.01 0.09	-0.12 0.09	-0.06 0.09	0.11 0.09	0.00 0.09	-0.02 0.09	0.01 0.09	-0.02 0.09	0.06 0.09	0.04 0.09
13-24 ST. E.	-0.05 0.09	-0.04 0.09	-0.05 0.09	-0.03 0.09	0.03 0.09	0.05 0.09	-0.09 0.09	0.04 0.09	-0.09 0.09	0.09 0.09	0.08 0.09	0.05 0.09
25-36 ST. E.	-0.02 0.09	-0.02 0.09	0.03 0.09	-0.05 0.09	0.01 0.09	-0.06 0.09	0.09 0.09	-0.03 0.09	0.04 0.10	0.17 0.10	0.01 0.10	0.02 0.10

表 9. (b) 臺北月降水量 (3.8) 式 殘差的 pacf

1-12	0.08	-0.04	-0.00	-0.13	-0.04	0.11	-0.02	-0.03	-0.00	0.00	0.07	0.01
13-24	-0.05	-0.03	-0.04	-0.01	0.01	0.03	-0.10	0.06	-0.10	0.13	0.03	0.04
25-36	-0.02	-0.01	0.08	-0.08	-0.00	-0.08	0.14	-0.07	0.05	0.14	-0.01	0.08

表 10，由此表可看出 ϕ_3 與 θ_3 , ϕ_9 與 θ_9 間有甚高的相關，為符合模式的精簡原則，吾人捨去參數較小的 θ_3 與 θ_9 ，得下述模式：

$$(1 - \phi_3 B^3 - \phi_9 B^9)(1 - \phi_{12}^* B^{12})(1 - B^{12})Z_t = \theta_0 + (1 - \theta_{12}^* B^{12}) a_t \dots \quad (3.11)$$

(3.11) 式模式的諸參數，計算如下：

$$\begin{aligned} \phi_3 &= 0.107, \quad \phi_9 = -0.174, \quad \phi_{12}^* = -0.05 \\ \theta_0 &= 5.26, \quad \theta_{12}^* = 0.839 \end{aligned} \quad (3.12)$$

(3.11) 式模式殘差平方和為 2.30×10^6 ，表 11 (a) 及 11 (b) 分別為 (3.11) 式模式殘差的 acf 及 pacf，由二表可看出均無一者為顯著，Q 值為 18.4 遠小於 $\chi^2(31)$ 的理論值，並由表 12 可看出 (3.11) 式各參數間相關係數均甚小。至此可確定 (3.11) 式為臺北月降水量時間數列的最佳模式，展開 (3.11) 式，得到下式：

表 10. (3.8) 式各參數相關係數表

	ϕ_3	ϕ_9	ϕ_{12}	$*\theta_0$	θ_3	θ_9	θ_{12}^*
ϕ_3	1.0000						
ϕ_9	-0.2100	1.0000					
ϕ_{12}^*	0.5553	-0.1695	1.0000				
θ_0	-0.4377	-0.1637	-0.2846	1.0000			
θ_3	0.9779	-0.2156	0.5460	-0.4156	1.0000		
θ_9	-0.2032	0.9370	-0.1678	-0.1374	-0.2157	1.0000	
θ_{12}^*	0.0102	0.0547	0.3531	0.1654	0.0293	0.0324	1.0000

表 11. (a) 臺北月降水量 (3.11) 式 殘差的 acf

1-12 ST. E.	0.07 0.09	-0.04 0.09	-0.01 0.09	-0.12 0.09	-0.05 0.09	0.10 0.09	0.02 0.09	-0.02 0.09	-0.00 0.09	-0.03 0.09	0.04 0.09	0.04 0.09
13-24 ST. E.	-0.06 0.09	-0.04 0.09	-0.04 0.09	-0.03 0.09	0.04 0.09	0.05 0.09	-0.08 0.09	0.04 0.09	-0.12 0.09	0.08 0.09	0.08 0.09	0.05 0.09
25-36 ST. E.	-0.02 0.09	-0.02 0.09	0.04 0.09	-0.05 0.09	0.02 0.09	-0.07 0.09	0.10 0.09	-0.04 0.09	0.01 0.09	0.16 0.09	-0.00 0.09	0.03 0.10

表 11. (b) 臺北月降水量 (3.11) 式 殘差的 pacf

1-12	0.07	-0.04	-0.00	-0.12	-0.03	0.10	0.00	-0.03	-0.01	-0.01	0.06	0.02
13-24	-0.07	-0.03	-0.03	-0.01	0.02	0.02	-0.08	0.06	-0.13	0.13	0.02	0.05
25-36	-0.03	-0.00	0.08	-0.07	0.01	-0.09	0.15	-0.08	0.03	0.13	-0.02	0.08

$$\begin{aligned}
 Z_t = & \phi_3 Z_{t-3} + Z_{t-12} + \phi_{12}^* Z_{t-12} - \phi_3 \phi_{12}^* Z_{t-15} \\
 & - \phi_3 Z_{t-15} + \phi_{12}^* Z_{t-24} - \phi_3 \phi_{12}^* Z_{t-27} \\
 & + \theta_0 + a_t - \theta_{12}^* a_{t-12} \dots \dots \dots \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

由(3.13)式可看出臺北某月份降水量受前3,12,

15,24,27等月份降水影響，同時受前12月及當月擾動影響，吾人利用(3.11)式最佳模式，自1974年1月開始作逐月預測，結果繪於圖4實線，與實際降水(虛線部份)比較，可看出降水量模式的擬合顯然

表 12. (3.11) 式各參數相關係數表

	ϕ_3	ϕ_9	ϕ_{12}^*	θ_0	θ_{12}^*
ϕ_3	1.0000				
ϕ_9	-0.0866	1.0000			
ϕ_{12}^*	0.1048	0.0287	1.0000		
θ_0	-0.1537	-0.1436	-0.0913	1.0000	
θ_{12}^*	-0.0837	0.0652	0.4271	0.2095	1.0000

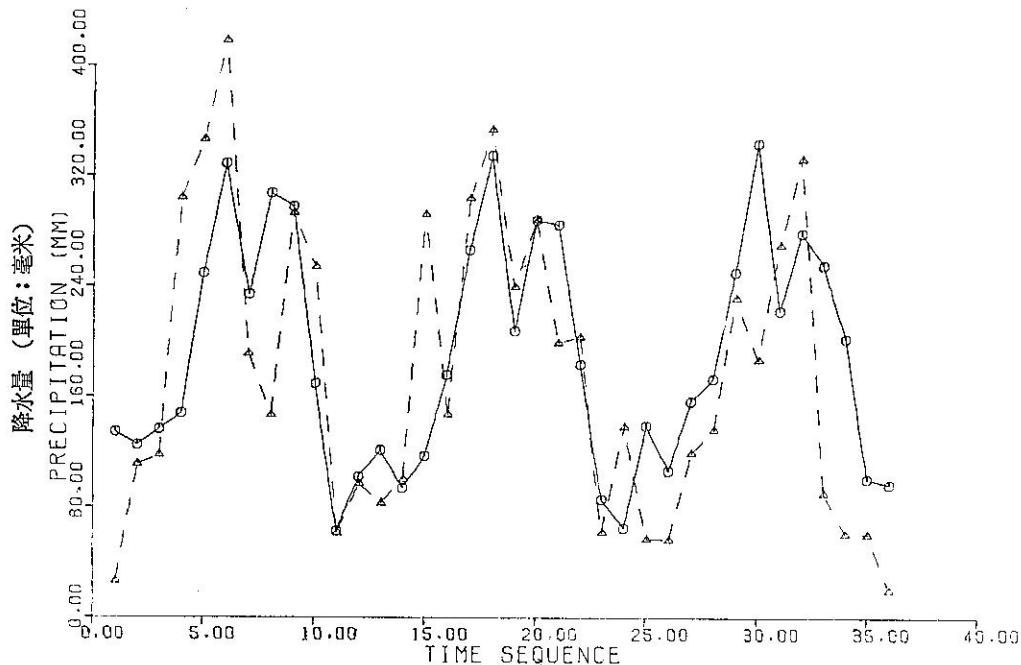


圖 4. 臺北逐月降水量預測(1974年1月至1976年12月)實線為預測值，虛線為實際觀測值

不及月平均溫度時間數列，此係因降水的擾動變量甚大，以致降水量時間數列的 acf 甚小(僅-0.3至0.3)所造成。檢視降水預測曲線吾人發現每年的降水預測均有兩個顯著高峯，此與實際降水非常符合，第一高峯出現在6月，係由梅雨造成，另一高峯出現在8、9月，係由颱風降水造成，而10月至次年4月降水量均較少。統計36個月預測的平均絕對誤差為68毫米，再進一步分析預測結果顯示1974年8月(第8點)預測偏高160毫米，查原因係該月沒有颱風侵襲，實際降水僅為該月累年平均(1897至1970年)

降水的一半(見表13)，1975年8月(第15點)

表 13. 臺北 1897 至 1970 年月平均值

月 別	一月	二月	三月	四月	五月	六月
平 均 溫 度	15.1	15.1	17.3	20.9	24.4	26.6
總 降 水 量	91	139	169	160	211	300
月 別	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
平 均 溫 度	28.3	28.1	26.6	23.2	20.2	17.0
總 降 水 量	141	280	243	120	68	74

表 14. 預測 1977 年臺北月平均溫度（單度：攝氏度）

1977 年	一月	二月	三月	四月	五月	六月
預測值	15.4	16.0	17.2	21.7	24.6	26.8
實際值	15.4	14.3	19.2	23.6	25.7	27.2
誤差	0	+ 1.7	- 2.0	- 1.9	- 0.9	
1977 年	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
預測值	28.4	28.2	26.7	24.5	19.9	16.7

表 15. 預測臺北 1977 年月降水量（單位：mm）

1977 年	一月	二月	三月	四月	五月	六月
預測值	120	112	184	160	252	358
實際值	121	97	77	26	330	
誤差	- 1	+ 15	+ 107	+ 143	- 78	
1977 年	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
預測值	263	297	278	192	89	105

預測偏低 173 毫米，查係因該月 12 日、13 日連續大雷雨，兩日內降水量高達 147 毫米，使實際月降水量（292 毫米）遠大於該月累年平均降水量（169 毫米），由此二極端情形可看出降水量的擾動變量的確甚大，用簡單的時間數列線性模式實在無法將這些突變（Interventions）作有效的預測。

四、1977 年預測與結論

吾人假設 1977 年 1 至 12 月的擾動 a_t 為期望值零，用 (3.3) 式及 (3.11) 式模式分別預測 1977 年臺北月平均溫度及月總降水量，結果見表 14 及表 15。由表 14 可看出 (3.3) 式對 1977 年臺北溫度預測，1 月份相當準確，2 月偏高 1.7 度，3,4,5 月則分別偏低 2.0、1.9 度及 0.9 度。表 15 顯示 (3.11) 式模式對 1977 年臺北降水量 1,2 月預測相當理想，3、4 月分別偏高 107 及 143 毫米，5 月份則偏低 78 毫米。與 1897 年至 1970 年平均資料（見表 13）比較，臺北今年 3,4 月確是異常地乾旱，尤其 4 月份係自 1964 年以來最嚴重的乾旱，因為缺乏雨水的調節，使得臺北 3,4 月平均溫度顯著地上升。這種極端

乾旱與 1975 年 3 月雷雨帶來極端降水，在統計上均屬於突變現象，用 ARIMA 時間數列模式無法作最有效的預測，Box 與 Tiao⁽¹¹⁾ 認為有突變的時間數列，在應用 ARIMA 模式時應先作突變分析，並將突變效應考慮到 ARIMA 模式內，此理論應用到加州經濟與污染的時間數列模式有很好的結果，作者對此一問題將再作進一步的研究。再者，由於受到小型電腦容量的限制*，本文僅取 14 年的月別資料來作 ARIMA 時間數列模式，遇到的 (3.3) 式與 (3.11) 式模式所具有的統計代表性略顯不足，如取更長的時間數列，用大型的電腦來建立臺北月平均溫度與月降水量的 ARIMA 模式，應有更好的結果。

五、建議

在統計學的領域裡，利用已有資料對未來情況加以預測的方法相當多，例如吾人常採用的迴歸分析法等。但是很少有一方法能夠對時間數列變化的趨勢、週期及擾動作一綜合的分析與預測，本文所討論的 ARIMA 時間數列模式能够對複雜的時間數列，經過有效的鑑定、估計與診斷後建立一簡單的線性隨機模式，此模式可相當程度準確地預測未來的情況。

由於吾人可充分利用電腦高速計算的功能來建立 ARIMA 時間數列模式，而利用 ARIMA 模式所作的預報非常客觀且為定量預報 (Quantity Forecast)，所以此法值得廣為介紹，作者將進一步研究並期望此法為中央氣象局長期預報提供一確實有效的工具。

誌謝

作者首先感謝中央研究院刁院士錦寰，由於他的諄諄教誨，使作者得以瞭解並應用 ARIMA 時間數列預測方法。刁院士並在百忙中給予本文若干指正，作者尤為感激。在本文執寫期間，作者曾參加交通大學向傳心教授及清華大學張德新教授聯合主持的「時間數列講習會」，獲益頗多，謹向兩位教授致謝。此外，中央氣象局陳熙揚先生協助整理資料，電子計算機中心全力支援，作者均極為感激。

*註：中央氣象局現有電腦為 GA SPC 16/45 型，容量為 48K，每個 Word 僅 16 個 Bits。

參 考 文 獻

- (1) Shun-Der Ko (柯順德) 1975: Surface wind field and precipitation activity over Taiwan in Meiyu season. 1974-annual report of the Institute of physics, Academia Sinica. 301-322.
- (2) 陳超塵, 1961: 統計學, 臺灣商務印書館, 869 pp.
- (3) Box G. E. P. and G. M. Jenkins, 1970: Time series analysis forecasting and control. Holden-Day, San Francisco, 534 pp.
- (4) _____ 同(3) : _____, 173-205.
- (5) Bartlett, M. S., 1946: On the theoretical specification of sampling properties of auto-correlated time series. Jour. Royal Stat. Soc.,

B8. 27.

- (6) Quenouille, M. H., 1949: Approximate tests of correlation in time series. Jour. Royal Stat. Soc., B11, 68.
- (7) 向傳心, 張革新, 1977: Lecture notes on time series analysis, 76 pp.
- (8) Box G. E. P. and G. M. Jenkins, 1970: Time series analysis forecasting and control. Holden-Day, San Francisco, 208-274.
- (9) _____ 同(8) : _____, 285-299.
- (10) _____ 同(8) : _____, 126-166.
- (11) Box G. E. P. and G. C. Tiao, 1975: Intervention analysis with applications to economic and environmental problem Jour. of the American Stat. Assoc., 70, 70-79.

作者通訊處：中央氣象局

氣 象 學 報 徵 稿 簡 則

- 一、本刊以促進氣象學術之研究為目的，凡有關氣象理論之分析，應用問題之探討，不論創作或譯述均所歡迎。
- 二、本刊文字務求簡明，文體以白話或淺近文言為主體，每篇以五千字為佳，如長篇巨著內容特佳者亦所歡迎。
- 三、稿件請註明作者真實姓名、住址及服務機關，但發表時得用筆名。
- 四、譯稿請附原文，如確有困難亦請註明作者姓名暨原文出版年月及地點。
- 五、稿中引用文獻請註明作者姓名、書名、頁數及出版年月。
- 六、惠稿請用稿紙繕寫清楚，並加標點。如屬創作論著稿，請附撰英文或法、德、西文摘要。
- 七、本刊對來稿有刪改權，如作者不願刪改時請聲明。
- 八、惠稿如有附圖務請用墨筆描繪，以便製版。
- 九、來稿無論刊登與否概不退還，如須退還者請預先聲明，並附足額退稿郵資。
- 十、來稿一經刊登、當致薄酬，並贈送本刊及抽印本各若干冊。
- 十一、惠稿文責自負，詳細規定請據本學報補充稿約辦理。
- 十二、惠稿請寄臺北市公園路六十四號中央氣象局氣象學報社收。

(請參閱補充稿約)