

# 物理與經驗觀點談降水量預報

蔣志才

## Quantitative Precipitation Forecasting on Physical and Empirical Bases

Chih-tsai Chiang

### 一、前言

預報降水量是必需依據空氣垂直運動與水汽含量作估計，要直接解決這兩個問題也曾企圖試過，不過本篇是用較非直接方式解說。並未明確計算空氣垂直運動，然推理垂直運動必隨伴有低層大範圍之水平輻合，該項假定在許多情況下均可發生，如在地面圖之等壓線或低層等壓面圖之等高線必為氣旋式，方能有大範圍之輻合現象。但氣旋之發生又接於以下兩途：

(1) 動力軌跡顯示有平面縮小範圍，(2) 由輻散方程式之積分數值，假定可從當時天氣狀態估計氣旋量之強度

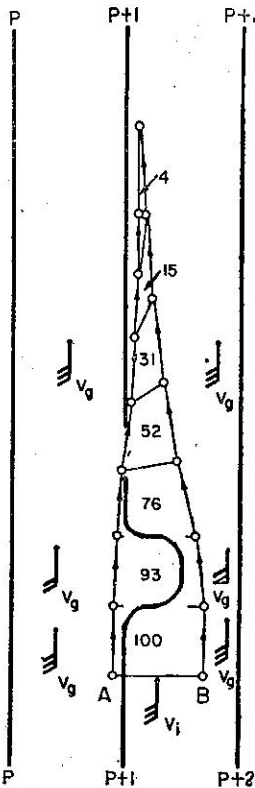


圖 1：氣壓場有氣旋型切變之動力軌跡，最後產生輻合

。至於水汽容積計算，為大氣中含水汽之容積（面積乘可降雨量），也是某一區域內降水量（面積乘深度）。

### 二、動力軌跡計算

Bjerknes<sup>(1)</sup> 與 Petterssen<sup>(2)</sup> 之研究認為氣流經過一半停留狀態之氣壓系統，該系統內之地轉風切，下流轉為較氣旋式，輻合將趨於發展。此種觀念可用作定量計算動力軌跡，以水平面或定壓面上，原為長方形之四角，隨時間之面積變化為依據。例如圖 1，動力軌跡計算是由原始四方形，吹向氣旋型地轉風切區域，乃該區域將在未來 7 小時內，將使原四方形面積趨於縮小至零。如圖 1 所示：圖中各多角形中數字

為原始面積之百分數，各○之間距離為每小時行跡。

氣壓單位毫巴 (mb)

$V_g$  = 地轉風

$V_i$  = 實際風

當氣流吹向等壓線（或等高線）氣旋型彎曲區域，將會發生同樣作用。如圖 2：

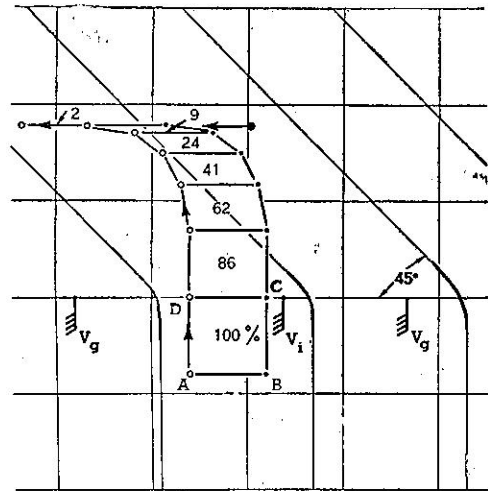


圖 2：氣旋型彎曲氣壓場之動力軌跡

原始方形面積隨風移向或經過氣旋型彎曲區域時，亦將縮小面積為零，因動力軌跡不計摩擦力，AB 線原在 CD 線之南方。經 7 小時後反在其北，當然實際上 AB 線是不致予超過 CD 線。

圖 3 及圖 4 表示風具有反氣旋型之切變及彎曲時，均各有使面積縮小之效應，惟氣壓場係線性者。

渦旋方程式可用作此項解釋，當風之渦旋隨時間轉變趨於氣旋形增加，則將產生輻合，若其他情況相同，實際風之渦旋改變為地轉風渦旋，使地轉渦旋變為更加氣旋型，設氣壓梯度隨時向氣流方向改變，輻合也將產生。

此種輻合產生情形很可以察覺，在此等情況中，氣旋性出現後，輻合即出現，在其下游氣旋性最大區，輻合亦達最大值。

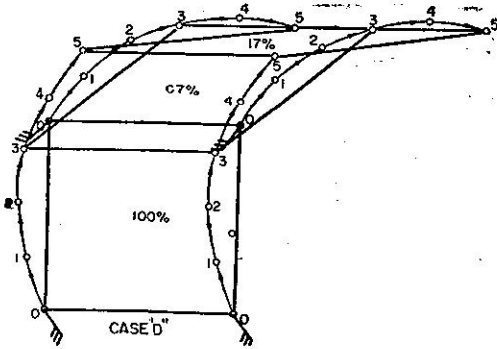


圖 3：反氣旋型旋轉之風場產生輻合 (D)  
 $\phi = 30^\circ N$ , 氣壓梯度 = 0

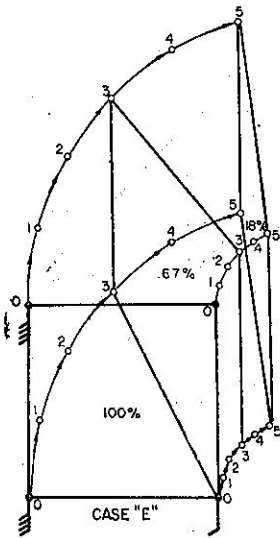


圖 4：反氣旋型風切場產生輻合 (E)

### 三、輻散發展方程式

上節已將產生輻合之情況，作數個簡單例子說明，本節目的為基於數學觀點，與在各種情況下可得之數量研究。軌跡法則常以無摩擦為例，在 Goodyear<sup>(3)</sup> 對三個角以上之多角形之軌跡法已有解說，並該法對輻合區域之位置已能確定。可是數學方法，在有些簡單例證中對某種特質，更能作量的計算，此為軌跡法多

次試用所不及者，本法為 1944 年熱帶氣象研究所 Bellamy 氏之「輻合說」一篇，所最先建議採用，之後該氏也曾簡化修改，與 Charney<sup>(5)</sup> 之「均衡方程式」有密切之關連。

輻散發展方程式，說明輻散與真風 (Real Wind)  $\eta$  渦旋率之關係，以下有兩相似之方程式說明輻散為地轉渦旋率 (Geostrophic Vorticity)  $\eta_g$  之函數，至於真風渦旋率，在此方程式內也已含義說明。

在 A 水平面積上，平均水平速度輻散  $\overline{\text{Div } \mathbf{V}}$  可列為：

$$A \overline{\text{Div } \mathbf{V}} = \frac{dA}{dt} = \phi(udy - vdx) \dots \dots (1)$$

依時間之微分方程式

$$\frac{d}{dt} \overline{\text{Div } \mathbf{V}} + (\overline{\text{Div } \mathbf{V}})^2 = \frac{1}{A} \left[ \phi \left( \frac{du}{dt} \right) \right]$$

$$dy - \frac{dv}{dt} dx) + \phi(udv - vdu) \dots \dots (2)$$

在旋轉之地球水平運動無摩擦方程式：

$$\frac{du}{dt} = fv' \dots \dots (3)$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu' \dots \dots (4)$$

$U'$  與  $V'$  為地轉偏向分力，故(2)式右面第一組可寫為：

$$\frac{1}{A} \left[ \phi \left( \frac{du}{dt} dy - \frac{dv}{dt} dx \right) \right] = \frac{1}{A}$$

$$\phi f (v' dy + u' dx) = \overline{\text{curl } f \mathbf{V}'} \dots \dots (5)$$

$\mathbf{V}'$  為總地轉偏向，如科氏參數之變化極小

$$\overline{\text{curl } f \mathbf{V}'} = \overline{f\eta'} \dots \dots (6)$$

第(2)式右面第二組為 A 面積上，兩倍 ( $U \cdot V$ ) 之吉可賓 (Jacobian) 平均值，或為單位面積  $U$  與  $V$  等速線交叉數之兩倍，在有些特別情況下該組可估計而得，但為簡化略而不計。在(7)式演釋後，將再作進一步討論之。

因(2)式不包括面積 A 之垂直傾斜變化，而僅考慮水平面積之水平輻散，本項類似渦旋率方程式中渦旋管之轉動。(2)式可改寫為：

$$\frac{d}{dt} \overline{\text{Div } \mathbf{V}} + (\overline{\text{Div } \mathbf{V}})^2 = \overline{f\eta'} \dots \dots (7)$$

從水平氣流無摩擦運動方程式，也可得出已忽略組之第(7)式，並以通熟形式表示

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv \dots \dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \dots \dots (9) \end{aligned}$$

微分方程式(8)式基以 x，及微分(9)式基以 y，相加

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\text{Div } \mathbf{V}} + (\overline{\text{Div } \mathbf{V}})^2 &= \frac{1}{\rho} \nabla^2 p + f\eta \\ &+ 2J - T - \beta u \dots \dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{然 } J &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}, T = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \\ &+ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z}, \text{ 又 } \beta = \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

以上各項如以前般被忽略，可是 Shuman<sup>(12)</sup> 用 Charney's<sup>(5)</sup> 「平衡方程式」，此式為忽略輻散項之(2)式，計算各種天氣情況 500mb 吉可賓之大小。且發現輻散項有時與  $-f\eta'$  同一大小，而兩者均頗大

於(2)式中前兩項，邏輯思考(2)式未論及吉可賓，不可能適用於一般區域，可是應該相信(2)式對加強幅合發展計算是相當有價值，採用參考資料之拉克倫琴(Lagrangian)座標觀念，發現特徵如下：當一濕舌氣流自(10)式各項值均極小地區，移動數小時後，而進入(10)式右面第一項特大(地轉渦旋率)之地區，其開始階段(10)式之決定性必在左右面之第一項，當幅合變大，左面之第二項變為重要。尤其當幅合產生在極小區域，而觀測網資料無法察覺之際，更具價值，不過從過去降兩紀錄與用連續方程式之推論，發覺其計算者超過觀測者數倍，因此有若干情況幅合加強發展之前數小時，似乎採用方程式(7)敘述，方為適合。

$$\text{設 } 2J = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$$

因第二項為  $\frac{1}{2}(\text{Div } \nabla)^2$ ，乃(7)式左面第二組可降低一半寫，恰巧與本式之邏輯相符，當然不可能說該演算是具有極實用理由，除非構成吉可賓之其他各項，在這些情況下已作詳盡計算。

取地轉風方程式之渦旋率

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = f \eta_g \dots \dots \dots (11)$$

$$\text{而 } \eta' = \eta - \eta_g \dots \dots \dots (12)$$

$\eta'$  為地轉偏向渦旋率 (Vorticity of the geostrophic deviation)。

$\eta$  為真風絕對渦旋率 (Absolute vorticity of the real wind)。

$\eta_g$  為地轉風絕對渦旋率 (Absolute vorticity of the geostrophic wind)。

故方程式(10)相當於(7)式。

對  $y$  微分方程式(8)，及對  $x$  微分(9)式，相減

$$\frac{d\eta'}{dt} + \frac{d\eta_g}{dt} = -(\eta' + \eta_g) \text{Div } \nabla \dots \dots \dots (13)$$

此即為著名之渦旋方程式，其力管項 (Solenoid Term)、扭轉項 (Twisting Term)、摩擦項與科氏參數 (Coriolis Parameter) 變量等均已省略。

方程式(7)與(13)是非線方程式 (Non-linear Equation)，關係幅散增強對地轉渦旋率隨時間之變動，它們可藉數值積分法同時解化，其解化方法將後予以解釋，並將後被稱之非吉可賓方程式 (Non-Jacobin Equation)。

對時間微分方程式(7)，得一簡化之解法如下：

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \overline{\text{Div } \nabla} + 2 \overline{\text{Div } \nabla} \frac{d}{dt} - \overline{\text{Div } \nabla} \\ & = -\frac{d}{dt} \overline{f \eta'} = \frac{d}{dt} \overline{f(\eta - \eta_g)} \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

以渦旋方程式(13)之  $\frac{d\eta'}{dt}$  項代入，則(14)式變為：

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \overline{\text{Div } \nabla} + 2 \overline{\text{Div } \nabla} \frac{d}{dt} - \overline{\text{Div } \nabla} \\ & + \overline{\eta' f \text{Div } \nabla} = -f \frac{d\eta_g}{dt} \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

省略該式之左面第二項，並設  $\eta = f$ ，即成(16)式，稱之比較方程式 (Comparison Equation)。

$$\frac{d^2}{dt^2} \overline{\text{Div } \nabla} + f^2 \overline{\text{Div } \nabla} = -f \frac{d\eta_g}{dt} \dots \dots (16)$$

因(7)式之左面第二項從不為負，顯然的，當幅散為正，而在增加時，(15)式之增長率始終小於(16)式者，又當幅散為正而在減弱時，(16)式降低率也遠較(16)式者大，故以比較方程式論幅散在任何所給之原始條件下，將過高估計，幅合則將估計過低。又絕對幅散值愈大，則過高或過低估計之比率也愈大。

(16)式在數理方面有許多研究方式，故為一盛譽之方程式，本篇將後以數值例子說明之。

#### 四、摩擦作用與黏着力

雖則關於大氣中之摩擦與黏着力，尚無法以運動方程式精確解答此問題，不過摩擦力如何影響幅合發展，可由現有之有限資料獲得觀念，在無摩擦方程式所預測之降水與實際降水兩者比較，可獲悉大氣摩擦特性之大概情形。

摩擦力與速率成正比例，方向相反

關於摩擦力之最簡單假定，是用以下方式之運動方程式表示大小

$$\frac{du}{dt} = f v' - k u \dots \dots \dots (17)$$

$$\frac{dv}{dt} = -f u' - k v \dots \dots \dots (18)$$

$K$  為大氣中任何一層之常數

再演算(7)式之各步驟，則為：

$$\frac{d \overline{\text{Div } \nabla}}{dt} + \overline{\text{Div } \nabla}^2 = \overline{f \eta'} - k \overline{\text{Div } \nabla} \dots (19)$$

$J$ 、 $T$  與  $f$  變量如以前均可省略，因摩擦作用為阻止幅散與幅合發生，常數  $K$  在地面大於空中，事實上如此，乃幅合與幅散在地面將比高層極不易發生，姑以下各項例證之。

$$\overline{(\text{Div } \mathbf{V})^2} = -k \overline{\text{Div } \mathbf{V}}$$

$$\overline{\text{Div } \mathbf{V}} = -k$$

若 K 隨高度減小，乃輻合也隨高度減弱，則摩擦作用也隨高度而變為不太重要，雖(17)與(18)式之 K 在計算風速數值是相當準確，不過 K 之小變量也能使(19)式最後一項造成大差誤。

摩擦力與風速之高次方成正比，與方向成反比

較複雜假說表示摩擦力之運動方程式：

$$\frac{du}{dt} = fv' - ku^n \dots\dots\dots(20)$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu' - kv^n \dots\dots\dots(21)$$

此 K 為任何一層之常數，並  $n > 1$

再同上推演得：

$$\frac{d\overline{\text{Div } \mathbf{V}}}{dt} + \overline{(\text{Div } \mathbf{V})^2} = \overline{f \eta'}$$

$$-k \left[ \overline{u^{n-1} \frac{\partial u}{\partial x}} + \overline{v^{n-1} \frac{\partial v}{\partial y}} \right] \dots\dots\dots(22)$$

Navier-Stokes 論調

該二氏運動方程式之形式 (閱 Lamb<sup>(6)</sup> 與 Haurwitz<sup>(7)</sup>) 為：

$$\frac{du}{dt} = fv' + \frac{\mu}{\rho} (\nabla_h^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) \dots\dots\dots(23)$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu' + \frac{\mu}{\rho} (\nabla_h^2 v + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}) \dots\dots\dots(24)$$

$\mu$  為渦流黏度係數，對  $x$  與  $y$  之  $(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})$  伸張變量業已省略，其最後一項之如此表示法，是為加強垂直與水平間變量之區別。

再同上推演，並省略其相同各項。

$$\frac{d}{dt} \overline{\text{Div } \mathbf{V}} + \overline{(\text{Div } \mathbf{V})^2} = \overline{f \eta'}$$

$$+ \frac{\mu}{\rho} (\nabla_h^2 \overline{\text{Div } \mathbf{V}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \overline{\text{Div } \mathbf{V}}) \dots\dots\dots(25)$$

先考慮右面第二項，可發覺輻合接近最大時，該項值為正，輻散接近最大則為負，由此可見該項作用，始終趨勢減慢輻合輻散之發展。

層與層間之輻合差(25)式，最後一項所得之結果，與其他物理關係類似式子所得結果，將相符。如 Byers<sup>(8)</sup> 所分析水汽垂直輸送，熱量下沉輸送與動量之垂直輸送等均相似。

五、容積方程式

在一 A 面積變動區域上之降水量，可由(7)與(13)式之形式計算之。

$$-\frac{d}{dt} \overline{\text{Div } \mathbf{V} A} = \overline{f \eta' A} \dots\dots\dots(26)$$

$$\frac{d\eta' A}{dt} = -\frac{d\eta_g A}{dt} \dots\dots\dots(27)$$

在 A 區域中，如無小區域正值之地面輻散，與空氣上升是假絕熱的話，由地面輻合與露點即可決定在 A 面積中之降水率，Peterson<sup>(9)</sup> 已作此假定，若以上兩種情況符合，又原始  $\eta'$ 、 $\eta_g$  與  $\overline{\text{Div } \mathbf{V}}$  都很小的話，乃(27)式  $\eta' = -\eta_g$ ，代入(26)式得：

$$\frac{d\overline{\text{Div } \mathbf{V} A}}{dt} = -\overline{f \eta_g A} \dots\dots\dots(28)$$

若 V 為變動面積 A 之降水總量

$$\frac{dV}{dt} = -\int \overline{\text{Div } \mathbf{V} A} dw \dots\dots\dots(29)$$

w 為可降之水量，(28)式代入得：

$$\frac{dV}{dt} = \int \int \overline{f \eta_g A} dw dt \dots\dots\dots(30)$$

$$V = \int \int \int \overline{f \eta_g A} dw dt dt \dots\dots\dots(31)$$

此式可用作一般降水量之計算，該項計算與大區域氣壓之拉百拉欣 (Laplacian of Pressure) 平均值有關，假設該區域內無小區域之地面輻散，及上述之各假設為有效。

六、線壓場方程式 (Linear Pressure Field Equation)

若  $\eta_g$  可省略，乃輻散發展方程式(7)可寫為：

$$\frac{d}{dt} \overline{\text{Div } \mathbf{V}} + \overline{(\text{Div } \mathbf{V})^2} = \overline{f \eta} \dots\dots\dots(32)$$

與前同省略吉可賓 (Jacobin)，轉彎 (Turning)，Rossby 參數，與摩擦項。

化渦旋方程式(13)為：

$$\frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dt} = -\text{Div } \mathbf{V}$$

已知  $\eta$  與  $\overline{\text{Div } \mathbf{V}}$  之原始值，乃該兩方程式可用下節所用之相同方法，數值解答切變，輻合如何發生請閱圖 3 與圖 4。

七、輻散發展方程式數值解法

本節主要討論比較方程式(16)，與非吉可賓方程式(7)與(13)數值解化，輻合對時間之曲線，係按特定不同時間及各種  $\eta_g$  強度，用該兩方程式計算而得，並分析計算求出  $\eta_g$  之時間久暫，對輻合發展影響之程度。

比較方程式解法

(16)式之解法 (除去平均符號)

$$\text{Div } \mathbf{V} = \left[ \frac{1}{f} \left( -\frac{d}{dt} \text{Div } \mathbf{V}_0 \right) + \int_0^t \cos ft \frac{d\eta_g}{dt} dt \right] \sin ft + \left[ \text{Div } \mathbf{V}_0 - \int_0^t \sin ft \frac{d\eta_g}{dt} dt \right] \cos ft \dots\dots\dots(33)$$

或

$$\text{Div } \mathbf{V} = A_0 \cos(ft - \alpha_0) + \left[ \left( \int_0^t \cos ft \frac{d\eta_g}{dt} dt \right) \sin ft - \left( \int_0^t \sin ft \frac{d\eta_g}{dt} dt \right) \cos ft \right] \dots\dots\dots(33a)$$

式中  $A_0^2 = \left[ \frac{1}{f} \left( -\frac{d}{dt} \text{Div } \mathbf{V}_0 \right) \right]^2 + \text{Div } \mathbf{V}_0^2$  ;

$$\alpha_0 = \tan^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{f} \left( -\frac{d}{dt} \text{Div } \mathbf{V}_0 \right)}{\text{Div } \mathbf{V}_0} \right]$$

以O指原始條件

因此 (33a) 式, 任何時間開始之輻散, 均為兩項之和, 右面第一項係正弦曲線函數, 而被限於在原始條件, 而第二項為一種函數, 由  $\eta_g$  之性質及時間所限定。

假設  $\eta_g$  隨時間有正弦曲線之變化, 其他假設亦可採用, 該項假設應具兩項特質: (1) 為大氣中單一氣塊有時按正弦曲線之形式, 作正或負地轉渦旋率之繼續變化。(2) 如此限定之函數, 可作為計算其值之用。

設  $\eta_g = f + k(1 - \cos nft) \dots\dots\dots(34)$

f 為科氏參數, K 為振幅, 在此特定條件下為 1。又 n 為  $\eta_g$  曲線時間與半擺日 (A half-pendulum) 長度之比率。

本題均以緯度 30°N 作準, 以時間微分(34)式, 並省略科氏參數, 得:

$$\frac{d\eta_g}{dt} = knf \sin nft \dots\dots\dots(35)$$

為研究  $\eta_g$  一週期對 Div V 之影響,  $\frac{d\eta_g}{dt}$  可自 t = 0 至  $\frac{2\pi}{nf}$  改變之, 再代(35)式入(33)式, 得:

$$\begin{aligned} \text{Div } \mathbf{V} &= \frac{1}{f} \left( -\frac{d}{dt} \text{Div } \mathbf{V}_0 \right) \sin ft + \\ &\text{Div } \mathbf{V}_0 \cos ft + \left[ knf \int_0^t \cos ft \sin nft dt \right] \\ &\sin ft - \left[ knf \int_0^t \sin ft \sin nft dt \right] \cos ft \dots\dots\dots(36) \end{aligned}$$

若原始條件  $\text{Div } \mathbf{V}_0 = 0$ , 與  $-\frac{d}{dt} \text{Div } \mathbf{V}_0 = 0$ ,

積分(36)式, 即計算  $\eta_g$  一週期各時間之負輻散值,  $\eta_g$  時間即移動空氣塊之時, 此決定在 n 值之差別。例如 n=12, 乃  $\eta_g$  時間為 2 小時, 如圖 5 所示;  $\eta_g$  一週期自  $\frac{1}{2}$  至 24 小時之間, 輻散均為負值之分佈。 $\eta_g$  曲線也不一定表示, 惟按(34)式之假設在週期之中途, 常達最高點, 同時圖 6 所示, 當  $\eta_g$  之時間為  $\frac{1}{2}$  小時, 輻合最

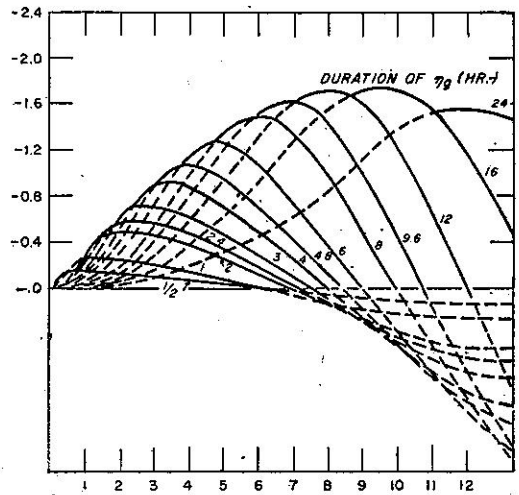


圖 5: 在  $\eta_g$  時間長短與比較方程式解化輻散之關係

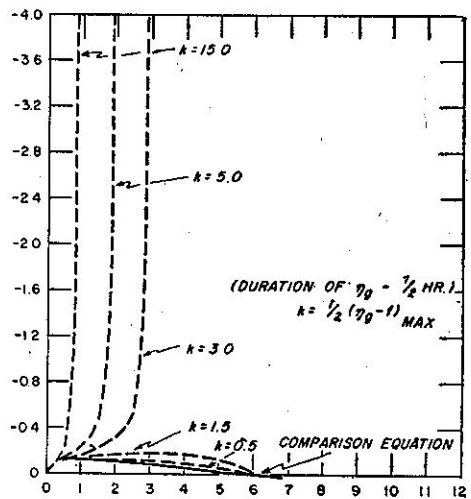


圖 6:

高點落後相當  $\eta_g$  最高點  $\frac{1}{2}$  小時, 當  $\eta_g$  為 10 小時之際, 落後多至  $2\frac{1}{2}$  小時, 由此較方程式計算之輻合數值, 常小於非吉可賓方程式數值計算者。該項比較方程式之特性, 是由於  $(\text{Div } \mathbf{V})^2$  因子略去之故。

非吉可賓方程式解法 (Non-Jacobian Equation)

該式為：

$$\frac{d}{dt} \text{Div } \Psi + \text{Div } \Psi = f\eta' \dots\dots\dots(37)$$

$$\frac{d\eta'}{dt} + \frac{d\eta_g}{dt} = -(\eta' + \eta_g) \text{Div } \Psi \dots\dots\dots(38)$$

此為非線微分方程 (Non-Linear Differential Equation)，用修正之 Euler 方法解化而得，該方法在 Scarborough<sup>(10)</sup> 已有解釋，概況如下：

③7與③8式應授予原始條件，若  $t=0$ ，乃  $\text{Div } \Psi_0 = 0$ ， $\frac{d}{dt} \text{Div } \Psi_0 = 0$ 。再設③4與③5兩式之  $f$  與  $n$  保持不變，惟  $k=12 (\eta_g - f) \max'$ ，則  $\eta_g$  各種時間及強度之負輻散值可算出，其以時間順次增加之計算步驟如下：

由  $t=0$  開始，因  $\eta_g$ 、 $\frac{d\eta_g}{dt}$ 、與  $f$  均為已知數  
通常計算近似、 $\text{Div}_0 \Psi$  與  $\eta_g$  之方程式如下：

$$(\ )_{t_{n+1}} = (\ )_{t_n} + \Delta t \frac{d}{dt} [ (\ )_{t_n} ] \dots\dots(39)$$

$\text{Div } \Psi$  與  $\eta'$  交互代入括弧內， $t_n$  指原始時間之值， $t_{n+1}$  為延續之連接數， $\Delta t$  為特定時間間隔，為此為一特定  $t$ ，其他假設，乃此式為：

$$(\ )_{t_{n+1}} = (\ )_{t_n} + \Delta t \frac{d}{dt} (\ )_{\text{Avg}(t_{n+1})} \dots\dots(40)$$

$$\frac{d}{dt} (\ )_{\text{Avg}(t_{n+1})} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt} (\ )_{t_{n+1}} + \frac{d}{dt} (\ )_{t_n} \right] \dots\dots\dots(41)$$

以  $\text{Div } \Psi$  與  $\eta'$  之連續數值用(40)與(41)兩式計算，迄各值集中後為止，乃再計算特定之  $\Delta t$  連續數值，方程式為用

$$(\ )_{t_{n+1}} = (\ )_{t_{n-1}} + 2\Delta t \frac{d}{dt} (\ )_{t_n} \dots\dots(42)$$

$t_n$  與  $t_{n+1}$  之意一如以上所說， $t_{n-1}$  依照  $\text{Div } \Psi$  與  $\eta'$  值之開始時間由  $t_n$  向前推，再如上說方法用(42)、(40)與(41)式修正此近似值，每個時間間量計算之，迄至所計算之負輻散數值變符號為止。如果  $\eta'$  與  $\text{Div } \Psi$  在任何時間之連續四次計算中並不集中，為避免計算差誤， $\Delta t$  宜用較小者，再用上項方法計算負輻散數值，其  $\eta_g$  時間用前  $\frac{1}{2}$  小時，1 小時、2 小時、4 小時、與 8 小時，而  $(\eta_g - f) \max$  值變化自 0.1 小時<sup>-1</sup> 至 30.0 小時<sup>-1</sup>，其結果如圖 6—10：

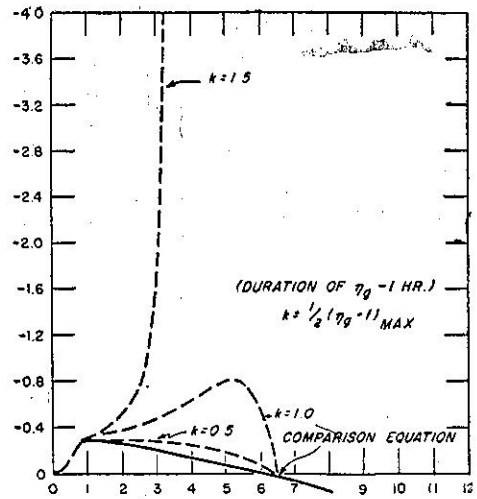


圖 7：

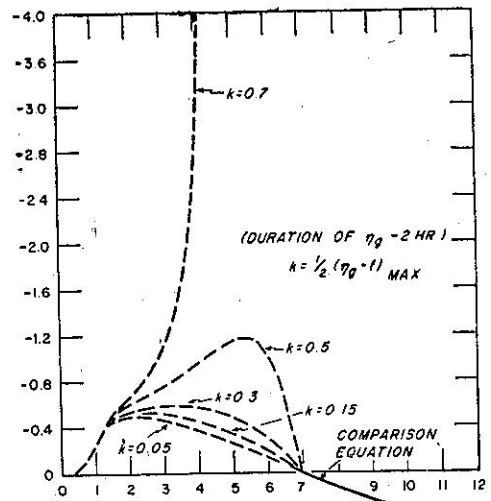


圖 8：

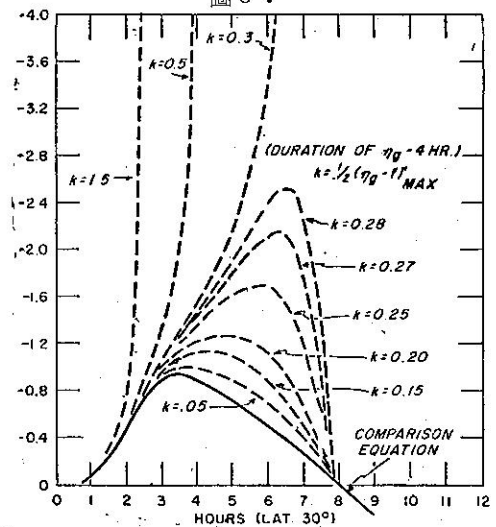


圖 9：

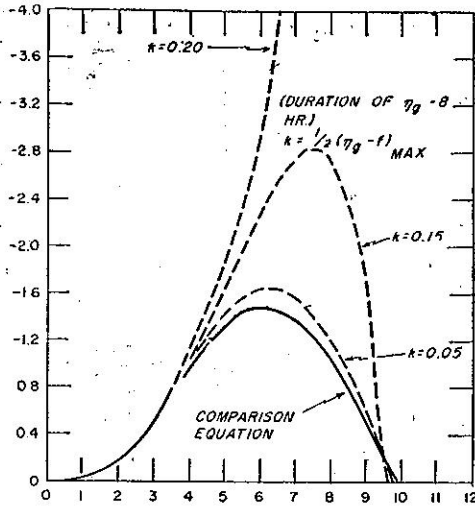


圖10：

其K值之計算，可能與以下觀測氣壓場有關

$$\frac{1}{2\rho f} \left( \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - 4P_0}{L^2} \right)$$

若L=100哩，P=1.20公斤/立方公尺，f為35°N之值，乃1.0毫巴線間隔之K值應為0.0693小時<sup>-1</sup>。

圖6之 $\eta_g$ 時間為 $\frac{1}{2}$ 小時， $(\eta_g - f) \max$  之值為6.0小時<sup>-1</sup>（等於2K），幅合曲線之趨勢，於開始後稍超過1小時即趨向於無限大負值。若為3.0小時<sup>-1</sup>之 $(\eta_g - f) \max$ ，一平均量之幅合分佈在6小時內，又若為較小量1.0小時<sup>-1</sup>之 $(\eta_g - f) \max$ ，幅合發展幾近乎比較方程式之曲線。由以上之結果，可知強而短暫生命 $(\eta_g - f) \max$  值，將會在小範圍地區中，在極短時間內產生無限之幅合。然而摩擦阻止其發展，該項數學得數可與小範圍猛烈降雨參照比較。相同 $\eta_g$ 之時間 $(\eta_g - f) \max$ ，大於觀測之值，僅產生平均幅合

。第7圖之曲線則有相類似之結果，其 $\eta_g$ 為時間為1小時，第8圖時間為2小時，其無限與可量幅合之間分界，落在 $(\eta - f) \max$  為1.4小時<sup>-1</sup>與1.0小時<sup>-1</sup>之間，當 $\eta_g$ 時間增加該分界數值減少， $(\eta_g - f) \max$  之下限，接近觀測值0.3小時<sup>-1</sup>。

圖9之 $\eta_g$ 時間為4小時，曲線顯示有趣之結果。茲討論K=0.15或 $(\eta_g - f) \max = 0.30$ 小時<sup>-1</sup>之曲線，此一曲線在0.174小時<sup>-1</sup>之最大幅合發展附近，極為均齊，沒有不穩定或變為無限之趨向，當K值增加，乃幅合曲線最高峯，變為更歪斜（至K=0.28或 $(\eta_g - f) \max = 0.56$ ）小時<sup>-1</sup>。即到達一點，可量幅合（0.7小時<sup>-1</sup>）與無限幅合間之分界到達臨界值。第10圖也是同樣情形，經 $\eta_g$ 時間為8小時之別而已。

由以上結果可得出結論如下：短暫生命與強度反常之 $\eta_g$ ，不伴隨大幅合數值出現如，已知某一區域，有強烈而短暫之變化存在，其聯合之作用，不可能出現如同 $\eta_g$ 較弱及時間較長時，所產生之猛烈與較長時間之幅合。比較圖6與圖10，就不難發覺該論調是正確的，在圖6， $\eta_g$ 時間為 $\frac{1}{2}$ 小時<sup>-1</sup>， $(\eta_g - f) \max$ 為2.0小時<sup>-1</sup>，最大幅合為0.27小時<sup>-1</sup>，而幅合時間約為6小時，在圖10， $(\eta_g - f) \max$ 為0.3小時<sup>-1</sup>，最大幅合為0.43小時<sup>-1</sup>，幅合時間幾至10小時。又如圖11至16，這種趨勢更為顯著，若 $\eta_g(\max)$ 強度相同，乃幅合分佈之討論問題是在 $\eta_g$ 之時間長短。在所有情況中可察覺，凡 $\eta_g$ 時間愈長，乃最大 $\eta_g$ 與最大幅合間之時間差異也愈大，所以當強 $\eta_g$ 之短暫存在，潛在降雨量場分析，可利用顯著之幅合延後計算而得，此種後延係由較小之 $\eta_g$ ，具有2-8小時之結果，該項條件前已述及在各種情況下，均為助益幅散之主要因子。

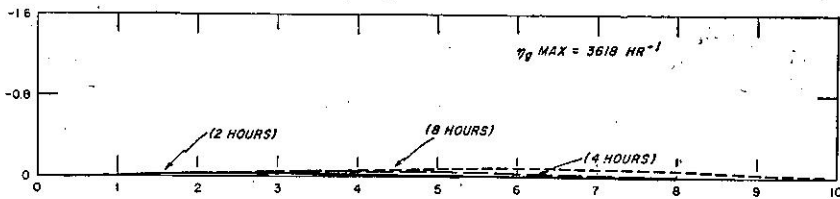


圖11：幅散為 $\eta_g$ 時間函數

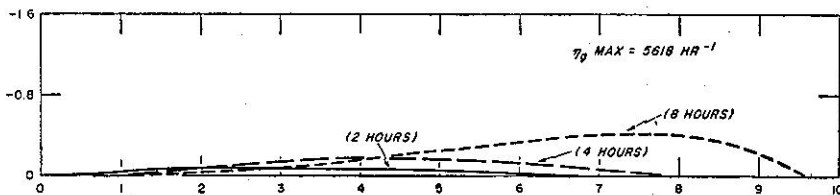


圖12：

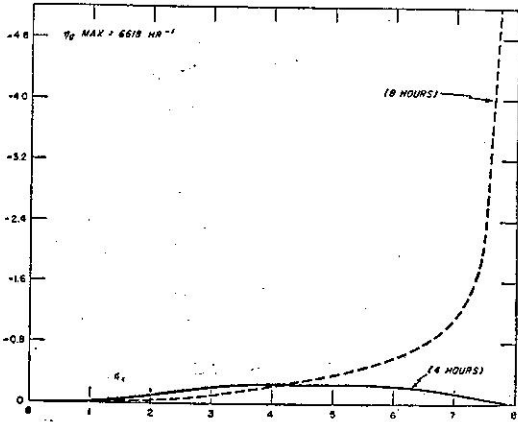


圖13：

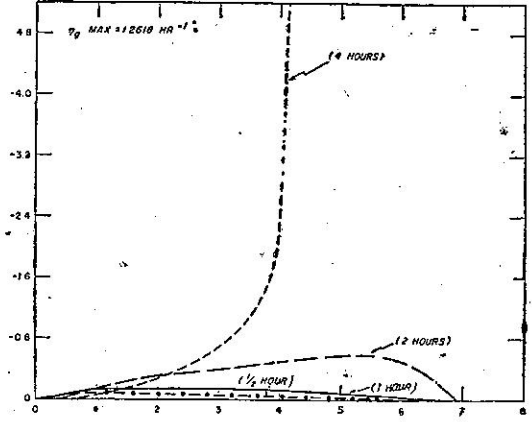


圖15：

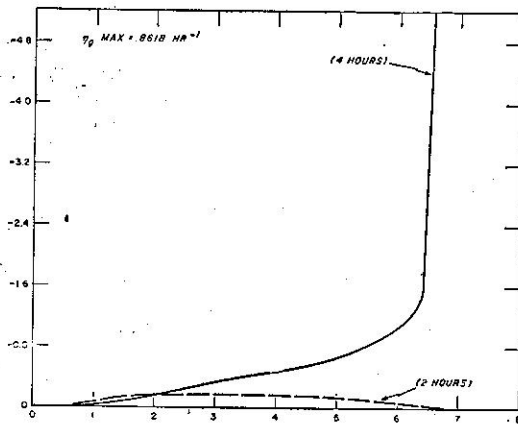


圖14：

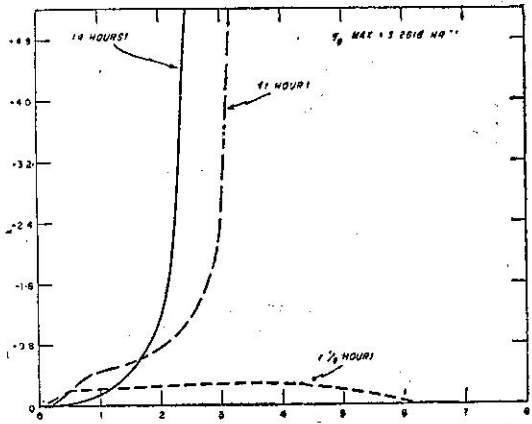


圖16：

### 八、水汽量之體積預報法

根據經驗研究，大雨時，進入氣旋區之大部水汽，下降而為雨，冬季時所降之降水量，約等於經過自聖達托尼 (San Antonio) 與達力哈賽 (Tallahassee) 之間的墨西哥灣沿岸進入美國之水汽百分之八十，依據研究之結果，發現在特定短時間及小區域內進入氣旋之水汽，下降而為雨之百分比更大，此種關係，可作預報平均降水量之用，設該地區能應用動力軌跡及輻合發展方程式。

### 九、結 論

成果有三：(1)空氣流入中等強度氣旋，將構成方形面積四角之動力軌跡繪製，而該四方面積常縮小至零；(2)輻散發展數值積分，得出在水平氣壓場確有中度氣旋量發生，乃輻散是近乎負無限大；(3)在許多大降水例子中，其降水量是頗接近濕空氣侵入氣旋系統

之水汽量。

輻散發展方程式數值積分之結論如下：(1)在水平氣壓場形成氣旋型式後，及在該氣旋下風區，有時將發生強烈低空輻合；(2)短暫生命之氣旋（半小時左右）或迅速穿越氣流者，對輻合之發展，作用甚小；(3)持續一小時左右之極大氣旋數值，能於短時間內產生極大數值之輻合。

### 參 考 資 料

1. J. Bjerknes, "Theorie der Ausser Tropischen Zyklonenbildung," Meteorologische Zeitschrift, Vol. 54, No. 12, Dec. 1927, pp. 462-466.
2. S. Petterssen, Weather Analysis and Forecasting, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York and London, 1940, pp. 326-332.



3. H. V. Goodyear, "Graphical Solution of Horizontal Velocity Equations and Use in Horizontal Trajectories in the Atmosphere," Monthly Weather Review, Vol. 87, No. 5, May 1959, pp. 188-195.

4. J. C. Bellamy, Dynamic Meteorology, University of Chicago Institute of Tropical Meteorology Lecture Notes, University of Puerto Rico, Rio Piedras, Puerto Rico, 1944.

5. J. Charney, "The Use of the Primitive Equations of Motion in Numerical Forecasting," Tellus, Vol. 7, No. 1, Feb. 1955, pp. 22-26.

6. H. Lamb, Hydrodynamics, 6th Edition, Dover Publications, New York, 1945, p. 577.

7. B. Haurwitz, Dynamic Meteorology, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York

and London, 1941, p. 190.

8. H. Byers, General Meteorology, 2d Edition, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York and London, 1944, pp. 587-594.

9. K. Peterson, "Precipitation Rate as a Function of Horizontal Divergence," Monthly Weather Review, Vol. 85, No. 1, Jan. 1957, pp. 9-10.

10. J. Scarborough, Numerical Mathematical Analysis, 3d Edition, Johns Hopkins Press, Baltimore, Md., 1955, pp. 235-240.

11. G. Lott and V. Myers, "Meteorology of Flood-Producing Storms in the Mississippi River Basin," Hydrometeorological Report No. 34, U. S. Weather Bureau, Washington, D. C., 1956.

12. F. G. Shuman, Personal Communication, 1957.

## 氣象學報徵稿簡則

- 一、本刊以促進氣象學術之研究為目的，凡有關氣象理論之分析，應用問題之探討，不論創作或譯述均所歡迎。
- 二、本刊文字務求簡明，文體以白話或淺近文言為主體，每篇以五千字為佳，如長篇巨著內容特佳者亦所歡迎。
- 三、稿件請註明作者真實姓名、住址及服務機關，但發表時得用筆名。
- 四、譯稿請附原文，如確有困難亦請註明作者姓名暨原文出版年月及地點。
- 五、稿中引用之文獻請註明作者姓名、書名、頁數及出版年月。
- 六、惠稿請用稿紙繕寫清楚，並加標點。如屬創作論著稿，請附撰英文或法、德、西文摘要。
- 七、本刊對來稿有刪改權，如作者不願刪改時請聲明。
- 八、惠稿如有附圖務請用墨筆描繪，以便製版。
- 九、來稿無論刊登與否概不退還，如須退還者請預先聲明，並附足額退稿郵資。
- 十、來稿一經刊載即致稿酬，每千字按三十元至四十元計算。創作論著稿之特具價值者另議。
- 十一、惠稿文責自負，詳細規定請據本學報補充稿約辦理。
- 十二、惠稿請寄臺北市公園路六十四號臺灣省氣象局氣象學報社收。

(請參閱補充稿約)

保 密 防 諜 · 人 人 有 責

匪 諜 自 首 · 既 往 不 究