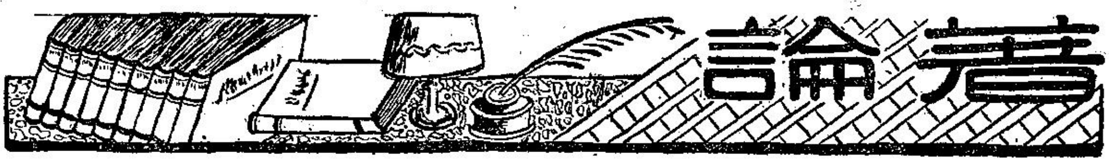

帶流運動之穩定度與大氣環流之變遷

楊 建 雄

Fjφrtoft's Stability Theory on Circular Vortices and its Application to the General Circulation of the Atmosphere

Chien-hsiung Yang

Abstract

The theory of stability on circular vortices as treated by R. Fjφrtoft in Vol. XIV, No.6 of Geofysiske Publikasjoner is presented. The possibility of applying the results of the theory for explaining the variation of the general circulation of the atmosphere is discussed.

概　　要

本篇介紹 Fjφrtoft 之圓渦流穩定的理論，而批判其基本假設及討論，其所得穩定規範應用於地球大氣之意義。由其穩定規範，我們可敍述地球大氣環流之變遷及能量轉換之相關關係。

§ 1 軸對稱渦流之運動方程

設Z-軸（圖１）爲外力位 φ 之對稱軸。假定在某一時刻，流體之速度及密度分佈也對此一軸對稱。若此，由運動之對稱性，可知流體之運動必須一直繼續其對於 Z- 軸之對稱性。因此，只須考慮其在一子午面內之運動。今以 u 爲帶流速度，以 $\mathbb{V}$ 爲子午面內之速度，其運動方程爲

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t}+\mathbb{V}\cdot\text{grad }\mathbb{V}\right)=-\text{grad P}$$
$$-\rho\text{ grad }\varphi+\rho\frac{u^2}{R}\mathbb{R}_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

及
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbb{V}\cdot\text{grad u}+\frac{u v_R}{R}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

在此 ρ：密度，p：壓力，R：從Z-軸之距離，V_R：半徑方向之 $\mathbb{V}$ 之成分。若在 R＝const. 之一圓周上積

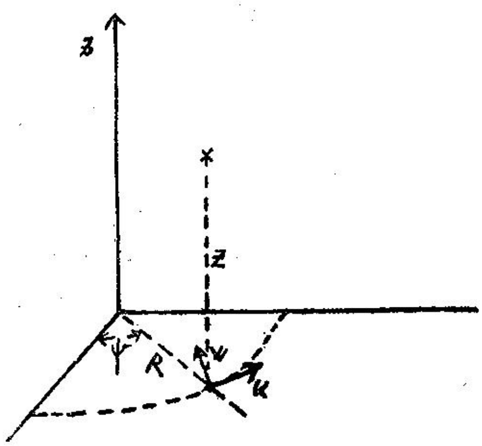

圖　1

分 (2) 式，可得

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\mathbb{V}\cdot\text{grad C}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$C=\int_0^{2\pi} uRd\psi$$

是此渦流在 $R=\text{const.}$，圓周上之環流。
連續方程爲

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbb{V}\cdot\nabla\rho=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

次之，以R,Z表示流體粒子在子午面內之位置。

$$R=f_1(R_0, z_0, t)$$
$$Z=f_2(R_0, z_0, t)$$

或以向量 $\mathfrak{r}=R\mathbb{R}_1+Z\mathbb{Z}_1$ 表示時，上列兩式可寫

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(\mathfrak{r}_0, t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

即謂其位置由其初位及時間而定。同樣地，由（3），（4）式可知環流 C 及密度 ρ 可寫

$$C=C(R_0, Z_0)=C(\mathfrak{r}_0) \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$\rho=\rho(R_0, Z_0)=C(\mathfrak{r}_0) \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

若此，此流體之全位能 Φ 及其帶流運動之全動能即爲

$$\Phi=\int_{\tau_0}\rho(\mathfrak{r}_0)\varphi(\mathfrak{r})\,d\tau_0 \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$\underline{K}_Z=\int_{\tau_0}\rho(\mathfrak{r}_0)C^2(\mathfrak{r}_0)\varphi_0(\mathfrak{r})\,d\tau_0 \cdots\cdots\cdots (9)$$

在此 $\varphi_0=\dfrac{1}{8\pi^2R^2}$

由（9）式可知，帶流運動能 $\underline{K}_Z$，像 Φ，只由粒子之位置決定，而且可當做流體位能之一種。

以下，我們利用動位 (Kinetic potential) 由 Hamilton 之原理求流體在子午面內之運動方程及其界面條件。因除外力位 φ 以外，無外力之作用，此系之 Hamilton 原理可寫爲

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\delta H\cdot dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}H\cdot dt=0 \cdots\cdots (10)$$

H 是動位

$$H=\int_{\tau_0}\frac{1}{2}\rho(\mathfrak{r}_0)\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial t}\right)^2 d\tau_0-[\Phi+\underline{K}_Z] \quad (11)$$

設 $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(\mathfrak{r}_0, t)$ 代表，在 $\mathfrak{r}_1, t_1$；$\mathfrak{r}_2, t_2$ 之間，在子午面內之流體之假想運動，而且當 $\mathfrak{r}=\mathfrak{f}(\mathfrak{r}_0, t)$ 時，$\delta I=0$。爲使它從任意一種函數 $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(\mathfrak{r}_0, t)$ 變換至一個 $\mathfrak{f}(\mathfrak{r}_0, t)$，再設

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(r_0, t; \varepsilon)$$

而且 $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}_0, t; 0)=\mathfrak{f}$

若此，(10) 變換至

$$\left(\frac{dI}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\delta\varepsilon=0$$

而因 ε 是一個任意之變數

$$\left(\frac{dI}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\equiv 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

再者，因爲 $\mathfrak{r}_1$，$\mathfrak{r}_2$ 兩位置（初位及終位）當 I 變時不變，作一遍部分積分可得

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\tau_0}\left[\rho\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t^2}+\rho\,\text{grad}\,\varphi+\rho C^2\text{grad}\,\varphi_0\right]\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\varepsilon}_{\varepsilon=0}d\tau_0\,dt\equiv 0$$

爲使此一恒等式成立，必要而充分之條件（即）爲（必須而十分）

$$\int_{\tau_0}\left[\rho\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t^2}+\rho\,\text{grad}\,\varphi+\rho C^2\,\text{grad}\,\varphi_0\right]\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\varepsilon}_{\varepsilon=0}d\tau_0\equiv 0 \cdots\cdots\cdots (13)$$

以向量 $\mathfrak{S}$ 表示 $\dfrac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\varepsilon}$，可得

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{S}(\mathfrak{r}, t; \varepsilon)$$

由 $\dfrac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\varepsilon}$ 之性質。$\mathfrak{S}$ 必須滿足下列條件：

$$\text{div}\ \mathfrak{S}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{S}_n=0 & \text{在固定界面} \\ \mathfrak{S}_n=\text{任意} & \text{在自由表面} \\ \mathfrak{S}_n=\text{任意}, \Delta\mathfrak{S}_n=0 & \text{在內部不連續面} \end{array}\right\}\cdots (15)$$

$\mathfrak{S}_n$ 代表其在面法線方向之成分：

若以 R，Z代替 R_0，Z_0，恒等式 (13) 內之

$$\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t^2}=\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial t}+(\mathbb{V}\cdot\text{grad})\mathbb{V}$$

而且 $d\tau_0=d\tau$，因此 (13) 式變爲

$$\int_{\tau}\left[\rho\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial t}+\rho(\mathbb{V}\cdot\text{grad})\mathbb{V}+\rho\,\text{grad}\,\varphi+\rho C^2\cdot\text{grad}\,\varphi_0\right]\cdot\mathfrak{S}_{\varepsilon=0}d\tau\equiv 0$$

由 Gauss 之定理及向量 $\mathfrak{S}$ 之性質 (14) 與 (15) 必須有下列條件：

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)}\ \rho\left\{\dfrac{\partial\mathbb{V}}{\partial t}+(\mathbb{V}\cdot\text{grad})\mathbb{V}\right\}+\rho\,\text{grad}\,\varphi \\ \quad +\rho\,C^2\text{grad}\,\varphi_0=-\,\text{grad}\,\lambda \\ \text{b)}\ \lambda=\text{const. 在自由表面} \\ \text{c)}\ \Delta\lambda=\text{const. 在不連續面} \end{array}\right\}\cdots (16)$$

λ 可由 (16-a) 及連續方程 $\text{div}\ \mathbb{V}=0$ 產生之微分方程

$$\text{div}\cdot\text{grad}\,\lambda-\frac{\text{grad}\,\rho\cdot\text{grad}\,\lambda}{\rho}+\rho\,\text{div}\left[\text{grad}\,\varphi+C^2\text{grad}\,\varphi_0+(\mathbb{V}\cdot\text{grad})\mathbb{V}\right]=0$$

與 (16-b，c) 兩個界面條件加上在固定界面之條件：

$$-\frac{\partial\lambda}{\partial n}=[\rho\ \mathrm{grad}\ \varphi+\rho C^2\mathrm{grad}\ \varphi_0+\rho(V\!\!/\cdot\mathrm{grad})V\!\!/]\cdot n$$

除在界面之任意常數以外，唯一地決定。因此（16-a，b，c）必須相等於此流體子午面內之運動方程及其界面條件。

§2 恒常圓環流

若無（從）外力之作用，能量方程爲：

$$\int_{\tau_0}\frac{1}{2}V\!\!/^2\ \rho d\tau_0+\int\frac{1}{2}u^2\rho d\tau_0=-\Phi+\text{const.}$$

或者

$$\underline{K}_m=-[\Phi+\underline{K}_z]+\text{const.}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

即，$\underline{K}_m$爲子午面內之動能，$\underline{K}_z$爲帶流動能。

我們將應用在 §1 提出之 Hamilton原理來求使〔$\Phi+K_z$〕取極值之條件。〔爲求使〔$\Phi+\underline{K}_z$〕取極值〕之問題不過是 §1 Hamilton 之原理之特殊例。即我們只須考慮〔$\Phi+\underline{K}_z$〕之數值而不相干於子午面內之運動，因此，由方程式（1-16）及附隨之界面條件，可知

$$\left.\begin{aligned}&a)\ \rho_0\mathrm{grad}\ \varphi+\rho_0 C_0^2\,\mathrm{grad}\varphi_C=-\mathrm{grad}\ \lambda\\&b)\ \lambda=\text{const.}\quad\text{在自由表面}\\&c)\ \Delta\lambda=\text{const.}\quad\text{在不連續面}\end{aligned}\right\}(2)$$

是我們所求之條件。在此，使〔$\Phi+\underline{K}_z$〕恒常之密度與環流之分佈由 ρ_0，C_0表示。在恒常圓環流($V\!\!/=0$)條件（2•2）自然地滿足。壓力p代入λ。相反地，如密度及環流之分佈滿足條件（2•2）時，任何一個圓環流必須恒常。

§3 在極值附近之〔$\Phi+\underline{K}_z$〕之數值

今設 $\mathfrak{r}_0$ 表示當〔$\Phi+\underline{K}_z$〕取其極值時之流體粒子之子午面內之位置。

設$\delta\mathfrak{r}$表示其粒子之偏位，$\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0$，則由 Taylor 之定理

$$\begin{aligned}&[\Phi(\mathfrak{r})+\underline{K}_z(\mathfrak{r})]-[\Phi(\mathfrak{r}_0)+\underline{K}_z(\mathfrak{r}_0)]\\&=\delta\mathfrak{r}\cdot[\mathrm{grad}\ \Phi(\mathfrak{r})]_{\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0}+\frac{1}{2}[(\delta\mathfrak{r}\cdot\mathrm{grad})\\&\quad\mathrm{grad}\ \Phi(\mathfrak{r})]_{\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0}\cdot\delta\mathfrak{r}\\&\quad+\delta\mathfrak{r}\cdot[\mathrm{grad}\ \underline{K}_z(\mathfrak{r})]_{\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0}\\&\quad+\frac{1}{2}[(\delta\mathfrak{r}\cdot\mathrm{grad})\mathrm{grad}\ \underline{K}_z(\mathfrak{r})]_{\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0}\cdot\delta\mathfrak{r}\end{aligned}$$

代入方程（1-8），（1-9）式於Φ及$\underline{K}_z$，此能量差 $\Delta[\Phi+\underline{K}_z]$ 可寫

$$\begin{aligned}\Delta[\Phi+\underline{K}_z]=&\int_{\tau_0}[\rho\,\mathrm{grad}\ \varphi+\rho C^2\,\mathrm{grad}\ \varphi_C]\cdot\delta\mathfrak{r}\ d\tau_0\\&+\frac{1}{2}\int_{\tau_0}[\rho(\delta\mathfrak{r}\cdot\mathrm{grad})\mathrm{grad}\ \varphi\cdot\delta\mathfrak{r}\\&+\rho c^2(\delta\mathfrak{r}\cdot\mathrm{grad})\ \mathrm{grad}\ \varphi_C\cdot\delta\mathfrak{r}]d\tau_0\ \cdots(1)\end{aligned}$$

再者，因據 §2 之論法

$$\delta\mathfrak{r}=\varepsilon\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

而$\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\varepsilon}$，$\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial\varepsilon^2}$等亦滿足（2-14）、(2-15) 式。利用 Gauss 定理，可得

$$\begin{aligned}\Delta[\Phi+\underline{K}_z]=&-\frac{1}{2}\int_{\tau}\delta\mathfrak{r}\cdot[\mathrm{grad}\ \rho_0\ \mathrm{grad}\ \varphi\\&+\mathrm{grad}\ \rho_0\ C_0^2\ \mathrm{grad}\ \varphi_C]\cdot\delta\mathfrak{r}\ d\tau\ \cdots\cdots(3)\\&+\frac{1}{2}\int_{F_f}(\delta\mathfrak{r}_n)^2\rho_0\left[\frac{d\varphi}{dn}+c_0^2\frac{d\varphi_C}{dn}\right]dF\\&-\frac{1}{2}\int_{F_d}(\delta\mathfrak{r}_n)^2\left[\Delta\rho_0\cdot\frac{\delta\varphi}{dn}\cdot\Delta\rho_0 c_0^2\right.\\&\left.+\frac{\delta\varphi_C}{dn}\right]dF\end{aligned}$$

在此，$\Delta\rho=\mathrm{div\ grad}\ \rho$，$\Delta\rho c^2\ \mathrm{div\ grad}\ \rho c^2$，$\delta\mathfrak{r}_n$ 表示在界面法線方向之成分 F_f 表示自由界面，F_d 表示不連續面。

§4 平衡圓渦流對於軸對稱擾亂之穩定規範

由（3-3）我們可知，假如

$$\left.\begin{aligned}&a)\ \delta\mathfrak{r}\cdot[\mathrm{grad}\ \rho_0\ \mathrm{grad}\ \varphi+\mathrm{grad}\ \rho_0\cdot\\&\quad c_0^2\ \mathrm{grad}\ \varphi_C]\cdot\delta\mathfrak{r}<0\\&b)\ \rho_0\frac{d\varphi}{dn}+\rho_0 c_0^2\frac{d\varphi_C}{dn}\geq0\ \text{在自由界面}\\&c)\ \Delta\rho_0\frac{d\varphi}{dn}+\Delta\rho_0\ c_0^2\frac{d\varphi_C}{dn}\leq0\text{在不連續面}\end{aligned}\right\}\cdots(1)$$

則，$\Delta[\Phi+\underline{K}_z]$是正數值。此時，$[\Phi+\underline{K}_z]_{\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0}$是一個極小值。凡當一力學系在穩定平衡時，此系之位能必須取極小値，若此，我們亦可證明，若其〔$\Phi+\underline{K}_z$〕取極小値時，一個圓渦流對於軸對稱之擾亂是穩定。

相反地，如

$$\left.\begin{aligned}&a)\ \delta\mathfrak{r}[\mathrm{grad}\ \rho_0\ \mathrm{grad}\ \varphi+\mathrm{grad}\ \rho_0\ c_0^2\\&\quad\mathrm{grad}\ \varphi_C]\cdot\delta\mathfrak{r}>0\\&b)\ \rho_0\frac{d\varphi}{dn}+\rho_0 c_0^2\frac{d\varphi_C}{dn}\leq0\ \text{在自由界面}\\&c)\ \Delta\rho_0\frac{d\varphi}{dn}+\Delta\rho_0\ c_0^2\frac{d\varphi_C}{dn}\geq0\ \text{在不連續面}\end{aligned}\right\}\cdots(2)$$

此一圓渦流對於任意軸對稱性擾亂是不穩。

再者，如

$$[\Phi+\underline{K}_z]=[\Phi+\underline{K}_z]_{\mathfrak{r}=\mathfrak{r}}$$

即 $\Delta\underline{K}_m=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

因此，流體內之粒子，雖其動能無變化，亦能移動有限距離。在此情形，此一渦流稱（謂在）中性穩定。

其次，（想）一個渦流，其內同時包括穩定與不穩定之區域時，此一渦流對於某種擾亂 $\delta\mathbf{r}$ 之穩定性質則由其擾亂之方向而定。換言之，由 $\delta\mathbf{r}$ 之方向，$\Delta[\Phi+\overline{K}_Z]$ 可取正或負値。若取正値，此渦流對此種擾亂是穩定，若取負値，則此渦流對此擾亂是不穩定，而且其位能 $[\Phi+\overline{K}_Z]$ 必須變換作子午面運動之動能。

由方程 (3-3) 式，我們可知，在此情形，其擾亂之方向對於 $\Delta[\Phi+\overline{K}_Z]$ 之影響只限於右邊第一項之體積積分，此體積積分，如由適當之座標系轉換，從 (R，z) 變換至 (η，ζ)（圖 2）

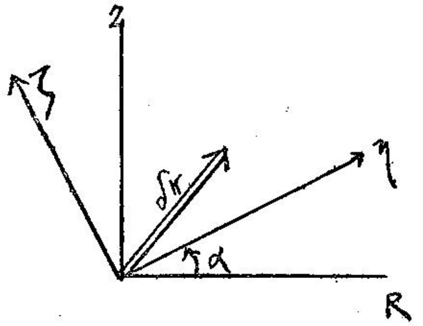

圖 2

$$r_\eta = r_R\cos\alpha + r_Z\sin\alpha$$
$$r_\zeta = -r_r\sin\alpha + r_Z\cos\alpha$$

可寫

$$-\delta\mathbf{r}_0\,[\mathrm{grad}\ \rho_0\ \mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{grad}\ \rho_0\ c_0^2\ \mathrm{grad}\ \varphi_C]\cdot\delta\mathbf{r} = [ar_\eta^2 + br_\zeta^2] \cdots\cdots\cdots(4)$$

因此，第一項體積積分成為

$$\int_{\tau_0}(ar_\eta^2 + br_\zeta^2)\,d\tau$$

若此，為使$\delta\mathbf{r}$之方向決定此渦流之穩定性質，a 及 b 之符號必須在流體內某區域呈相反。假定$a<0$，那麼據擾亂 $\delta\mathbf{r}$ 之方向偏 η 或 ζ 軸，此渦流為不穩定或穩定。η-軸可稱不穩定軸，ζ-軸謂穩定軸。

§ 5 不穩定圓渦流之轉位定理

計算方程式 (4-4) 我們可（示）知

$$a\cdot b = \mathrm{grad}\ \rho_0 \times \mathrm{grad}(\rho_0\ c_0^2)\cdot(\mathrm{grad}\ \varphi \times \mathrm{grad}\ \varphi_C)$$

今如對於軸對稱擾亂不穩定（即滿足 (4-2)）之一個平衡渦流（即其密度與環流滿足 (2-2)）受到軸對稱擾亂，此渦流內之流體粒子將移動新平衡位置而使其 $[\Phi+\overline{K}_Z]$ 取更小之數値。設ρ_0，c_0為此渦流原初平衡內之密度及環流，ρ_0^*，c_0^* 為其受到擾亂以後達到之新平衡內之密度及環流。若此，則

$$a^*\cdot b^* = \mathrm{grad}\ \rho_0^* \times \mathrm{grad}\ (\rho_0^* c_0^{*2}\cdot \mathrm{grad}\ \varphi \times \mathrm{grad}\ \varphi_C$$

可是因 $\rho=\mathrm{const.}$，$c=\mathrm{const.}$ 是物質面，即隨粒子移動，由連續理由，向量 $\mathrm{grad}\ \rho\times\mathrm{grad}\ \rho c^2$之方向並不隨粒子之偏位而變。

因此，$\mathrm{grad}\ \rho_0^*\times\mathrm{grad}\ (\rho_0^* c_0^{*2}$之方向將同於$\mathrm{grad}\ \rho_0\times\mathrm{grad}\ \rho_0\ c_0^2$ 之方向。向量 $\mathrm{grad}\ \varphi\times\mathrm{grad}\,\varphi_C$ 亦不隨時間而變。因此 $a^*\cdot b^*$ 之符號必須相同於 $a\cdot b$ 之符號。換言之，如在原初平衡 $a\cdot b<0$ 其渦流不能單由其粒子之偏位而達到穩定狀態，其轉變只是一種從一個不穩定狀態變至另一個不穩定狀態而已。

§ 6 圓渦流對非對稱擾亂之穩定性

設一不壓縮性、均質、無粘性之流體在以Z-軸為對稱軸之固定界面內，如無外力作用於此流體，其流體力學的方程式為，

$$\frac{d\mathbb{V}}{dt} = -\mathrm{grad}\ p \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\mathrm{div}\,\mathbb{V} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

因由假設，我們可以密度 ρ 等於 1。以下，我們將計算此流體對於非對稱擾亂之穩定性。

因無外力作用於此流體，此流體之運動必須滿足(1)全動能保存之原理及(2)全角運動量保存之原理，即

$$\int\frac{1}{2}\mathbb{V}^2\ d\tau = \mathrm{const.} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\int uR\ d\tau = \mathrm{const.} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

若採用圓墻座標系 (R，ψ，Z) 表示其運動時，其速度$\mathbb{V}$可寫

$$\mathbb{V} = \bar{u}\mathbb{i} + \mathbb{V}_m + \mathbb{V}' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

換言之，$\mathbb{V}$等於，平均帶流速度$\bar{u}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}ud\ \psi$，平均子午面速度 $\mathbb{V}_m = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(v_R\,\mathbb{R}_1 + v_Z\,\mathbb{Z}_1)\,d\psi = \bar{v}_R\,\mathbb{R}_1 + \bar{v}_Z\,\mathbb{Z}_1$，與擾亂速度 $\mathbb{V}' = u'\mathbb{i} + v_R'\mathbb{R}_1 + v_Z'\mathbb{Z}_1$，三者之向量和，由其定義，擾亂速度必須滿足

$$\int_0^{2\pi}u'd\psi = \int_0^{2\pi}v_R'd\,\psi = \int_0^{2\pi}v_Z'd\psi \cdots\cdots(6)$$

因此，全動能及全角運動量保存之定理可寫為

$$\int\frac{1}{2}\mathbb{V}'^2d\tau + \int\frac{1}{2}\mathbb{V}_m d\tau = -\int\frac{1}{2}\bar{u}^2 d\tau + \mathrm{const.} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

及 $$\int \bar{u} R d\tau = \text{const.} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

如以在與Z-軸垂直面內之環流 $C=\int_0^{2\pi} u R d\psi$ 代替 $\bar{u}$ 時。

因 $\bar{u}=\frac{C}{2\pi R}$ 上列(7)及(8)式各可寫爲

$$\int \frac{1}{2}\mathbf{V}'^2 d\tau + \int \frac{1}{2}\mathbf{V}_m^2 d\tau = -\int \frac{C^2}{8\pi^2 R^2} + \text{const.} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

$$\int c\, d\tau = \text{const.} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

如以 C_0 爲在 $t=0$ 時之環流，(10) 式又可寫爲

$$\int (C-C_0) d\tau = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10')$$

讓我們考慮在時間 t 時，在Z-軸周圍對稱之一個圓，構成其圓之流體粒子，在 $t=0$ 時構成另一閉曲線L（圖 3），由流體動力學的方程式(1)，應用環流定理，我們可知，在時間 t 時在圓周之環流必須相等於在 $t=0$ 時之在閉曲線L周之環流。

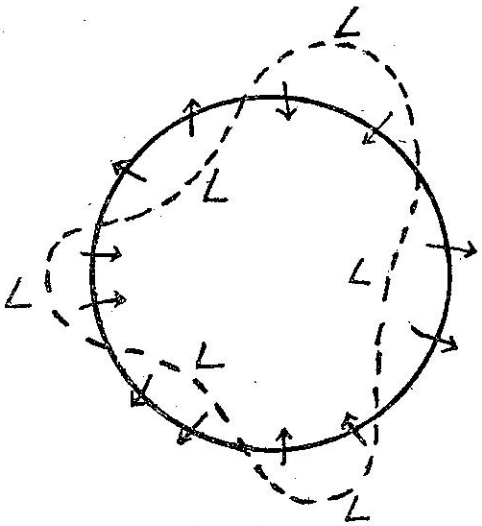

圖 3

假定我們已知 $t=0$ 時之速度分佈 $\mathbf{V}_0(R,\psi,z)$，那麽此時，在 L之周圍之環流等於 $\oint_L \mathbf{V}_0 \cdot \delta\mathfrak{r}$. 因此

$$C=\oint_L \mathbf{V}_0 \cdot \delta\mathfrak{r} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

至於閉曲線 L，假如，我們已知其流體粒子從 $t_1=0$ 至 $t=t$ 時之偏位 $d\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(\mathfrak{r}_0,t)-\mathfrak{r}_0$，我們由在 $t=t$ 時之圓可以求出來，因此我們可以寫

$$C=C(d\mathfrak{r}\,;\mathbf{V}_0\,;R,Z)$$

代入此式至(9)及(10)式而積分後，環流 C 內之變數 R，Z 可脫落，由此，可見(9)及(10)之積分式，如果已知原初速度分佈 $\mathbf{V}_0$，只關於偏位 $d\mathfrak{r}$。

以下爲簡便起見，我們假定

$$\bar{v}_R=\bar{v}_Z=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

若此，能量方程變成

$$\int_\tau \frac{1}{2}\mathbf{V}'^2 d\tau = -\int_\tau \frac{C^2 d\tau}{8\pi^2 R^2} + \text{const.} \cdots (13)$$

而且環流C在(11)式變成爲

$$C=\oint_L \bar{u}_0\, \mathfrak{i}\, d\mathfrak{r} + \oint_L \mathbf{V}'_0 \cdot \delta\mathfrak{r} \cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

設 $$C_0=\int_0^{2\pi} \bar{u}_0 R d\psi \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

及偏位 $$d\mathfrak{r}=\mathbf{V}_0 t + \frac{1}{2}\left.\frac{d\mathbf{V}_0}{dt}\right|_{t=0} t^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

由於同一流體粒子所構成之閉曲線周圍之環流必須相等之定理。我們對於在 $t=t$ 時在圓周（半徑 R）之環流C可得下述方程：

$$C=C_0+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[-(d\mathfrak{r}_m\cdot \text{grad})\ \text{rot}\ \bar{u}_0\mathfrak{i} + (\text{rot}\ \bar{u}_0\mathfrak{i}\cdot\text{grad})\, d\mathfrak{r}_m]\cdot \mathfrak{i}\times d\mathfrak{r}_m R d\psi + \int_0^{2\pi} h(0)\, R d\psi + \oint_L \mathbf{V}'_0 \cdot \delta\mathfrak{r} \cdots\cdots\cdots (17)$$

在此 $d\mathfrak{r}_m$ 表示偏位 $d\mathfrak{r}$ 之子午面內成分，h (0) 表示高次項。關於右邊第三項 $\oint_L \mathbf{V}'_0 d\mathfrak{r}$，我們由Stokes定理可證

$$\oint_L \mathbf{V}'_0 \cdot \delta\mathfrak{r} \to 0 \ \text{如使}\ \text{rot}\,\mathbf{V}'_0 \to 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

因此，對於極小之 rot $\mathbf{V}'_0$ (17) 式可寫爲

$$C=C_0+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[-(d\mathfrak{r}\cdot\text{grad})\ \text{rot}\ \bar{u}_0\ \mathfrak{i} + (\text{rot}\ \bar{u}_0\ \mathfrak{i}\cdot\text{grad}) d\mathfrak{r}_m]\cdot\mathfrak{i}\times d\mathfrak{r}_m\ R d\psi + \int_0^{2\pi} h(0)\, R d\psi \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

其次，我們可導入新穩定規範，即以擾亂渦度 rot $\mathbf{V}'_0$ 爲擾亂之表示，而規範某一圓渦流對此擾亂渦度之穩定性。換言之，當擾亂渦度 rot $\mathbf{V}'_0$ 取無限小數值時，如在圓渦流內之流體粒子之子午面內偏位 $d\mathfrak{r}_m$ 亦隨同擾亂渦度取無限小數值，則此一圓渦流稱做穩定渦，如其子午面內偏位 $d\mathfrak{r}_m$ 不取無限小數值時則渦流爲不穩定。或我們可說如果

$$\text{當 rot}\,\mathbf{V}'_0 \to 0 \text{ 時，} \int_\tau (d\mathfrak{r}_m)^2 d\tau \to 0 \cdots (20)$$

此圓渦流就穩定，以能量方程表示，此一規範同於

$$\text{當 rot}\ \mathbf{V}'_0 \to 0 \ \text{時}\ \int_\tau \frac{1}{2}\mathbf{V}'^2 d\tau - \int_{\tau_0} \frac{1}{2}\mathbf{V}'^2_0 d\tau \to 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

如不能滿足20或21，圓渦流就在不穩定狀態。

§ 7 Rayleigh-Taylor 之穩定規範

應用上節之穩定規範於二次元運動，我們可得所謂 Rayleigh-Taylor 之穩定規範。假定，在 $t=0$ 時

$$v_Z=\frac{\partial v_R}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

而且，流體界面以 Z-軸為中心之同心圓壔，由對稱理由，可知在將來任意時刻，其運動可滿足(1)式而我們只須求其在 $Z=\mathrm{const.}$ 一平面內之運動。同時因其不壓縮性及 $v_Z=0$，我們可知

$$\bar{v}_R=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} v_R\, R\, d\psi=0$$

因此，能量方程 (6-13) 式直接適用此情形，又因其運動與 Z軸垂直而無關，在此情形之能量及環流方程各可寫為

$$\int\frac{1}{2}V'^2 dF=-\int\frac{C^2dF}{8\pi^2R^2}+\mathrm{const.}\cdots (2)$$

$$\int(C-C_0)dF=\mathrm{const.}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

環流 C 由 (6-17) 可見

$$C=C_0+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(dr_R)^2\frac{d(\mathrm{rot}\ \bar{u}_0 \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{z}_1)}{dR}Rd\psi+\int_0^{2\pi}h\ (0)\ Rd\psi+\oint_L V_0\cdot\delta\mathfrak{r}\ \cdots\cdots (4)$$

代入(4)式於(3)式可得

$$0=\pi\int_F(dr_R)^2\frac{d(\mathrm{rot}\ \bar{u}_0 \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{z}_1)}{dR}RdF+2\pi\int_F h(0)RdF+\int_F\oint_L V_0'\cdot\delta\mathfrak{r}dF\cdots(5)$$

假定

$\dfrac{d(\mathrm{rot}\ \bar{u}_0 \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{z}_1)}{dR}$ 在全域內只取正(或負)號 $\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

若此(5)式右邊第一項則有與(6)相同符號，而其數值只能在 $\int(dr_R)^2dF\to 0$ 時，趨近零。第二項 $\int_F h\,(0)RdF$ 常比第一項小，而且對於 (dr_R) 之小數值可以省略。最後一項 $\int_F\oint_L V_0'\cdot\delta\mathfrak{r}dF\to 0$ 在 $\mathrm{rot}V_0'\to 0$ 因此，我們得知，在(6)條件之下，如 $\mathrm{rot}V_0'\to 0$

$$\int(dr_R)^2dF\to 0\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

即，滿足條件(6)之圓渦流，對於二次元之擾亂穩定，此一規範即謂 "Rayleigh-Taylor" 之穩定規範。

§ 8 能量變換軌範

能量方程 (6-13) 可寫為

$$\int_\tau\frac{1}{2}V'^2d\tau-\int_\tau\frac{1}{2}V_0'^2\,d\tau=-\int_\tau\frac{C^2d\tau}{8\pi^2R^2}+\int_\tau\frac{C_0^2d\tau}{8\pi^2R^2}=-\int_\tau\frac{C_0(C-C_0)d\tau}{4\pi^2R^2}-\int_\tau\frac{(C-C_0)_2d\tau}{8\pi^2R^2}$$

置 $\dfrac{C_0}{4\pi^2R^2}=\dfrac{\varpi_0}{2\pi}$

ϖ_0 即為在 $t=0$ 時，在 $R=\mathrm{const.}$ 之圓周上之平均角速度，由此

$$\int_\tau\frac{1}{2}V'^2\,d\tau-\int_\tau\frac{1}{2}V_0'^2d\tau=-\frac{1}{2\pi}\int_\tau\varpi_0(C-C_0)\,d\tau-\int\frac{(C-C_0)^2d\tau}{8\pi^2R^2}\cdots(1)$$

今分 τ 為二部 τ_1，τ_2 使 τ_1 代表 $C-C_0<0$ 之區域，而使 τ_2 代表 $C-C_0>0$ 之區域，由平均值定理可得

$$\int_\tau\frac{1}{2}V'^2d\tau-\int_\tau\frac{1}{2}V_0'^2\,d\tau=-\frac{\varpi_0(R_1,Z_1)}{2\pi}\int_\tau(C-C_0)\,d\tau-\frac{\varpi_0(R_2,Z_2)}{2\pi}\int_{\tau_2}(C-C_0)d\tau-\int_\tau\frac{(C-C_0)^2}{8\pi^2R^2}d\tau$$

因由角運動量之保存則

$$\int_{\tau_1}(C-C_0)\,d\tau=-\int_{\tau_2}(C-C_0)d\tau$$

因此可得

$$\int\frac{1}{2}V'^2d\tau-\int\frac{1}{2}V_0'^2d\tau=\frac{1}{2\pi}[\varpi_0(R_1,Z_1)-\varpi_0(R_2,Z_2)]\int_{\tau_2}(C-C_0)d\tau-\int\frac{(C-C_0)^2}{8\pi^2R^2}d\tau\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從(2)式可得能量變換軌範如下：

假如在 τ_2 內 (在 τ_2 內平均帶流速度隨時間增加) 之一切角速度 ϖ_{0_2} 都大於在 τ_1 內 (在此域平均帶流速度隨時間減小) 之一切角速度 ϖ_{0_1}，然則不規則運動即擾亂之動能隨時間減少而變換為平均流之動能。

相反地，假如在 τ_2 內之一切角速度 ϖ_{0_2} 都小於 τ_1 內之一切角速度 ϖ_{0_1} 然則，平均流之動能變換為不規則運動之動能。

應用此軌範，對於在 §7 所考慮之二次元運動可作更詳細之分析。假定，F_1 代表 $\dfrac{d(\mathrm{rot}\ \bar{u}_1 \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{z}_1)}{dR}<0$ 之區域，F_2 代表 $\dfrac{d(\mathrm{rot}\ \bar{u}_0 \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{z}_1)}{dR}>0$ Rayleigh-

Taylor之軌範對於此情形不能適用。

由 (7-4) 式當 dr_R 及rot V_0' 極小時，可得

a) $$\int_{F_1}(C-C_0)\,dF=\pi\int_{F_1}(dr_R)^2\frac{d(\mathrm{rot}\,\bar{u}_0 i\cdot \varpi_1)}{dR}RdF<0$$

b) $$\int_{F_2}(C-C_0)\,dF=\pi\int_{F_2}(dr_R)^2\frac{d(\mathrm{rot}\,\bar{u}_0 i\cdot \varpi_1)}{dR}RdF>0\cdots\cdots(3)$$

因此，總角運動量保存，則即爲

c) $$\int_{F}(C-C_0)\,dF=\pi\int_{F_1}(dr_R)^2\frac{d(\mathrm{rot}\,\bar{u}_0 i\cdot \varpi_1)}{dR}RdF+\pi\int_{F_2}(dr_R)^2\frac{(\mathrm{rot}\,\bar{u}_0 i\varpi_1)}{dR}=RdF=0\cdots\cdots(3)$$

因右邊兩項具有相反符號，可有某種 dr_R 對其 $\int_F(C-C_0)dF\to 0$,可是不具備 $\int(dr_R)^2dF\to 0$。換言之，在此情形 §7所述之 Rayleigh-Taylor 軌範不能適用，可是如用 §8所述之能量變換軌範，我們可求其穩定性如下：應用 (8-2) 式於此情形，因其右邊第三項

$$\int\frac{(C-C_0)^2}{8\pi R^2}d\tau\sim\int\frac{(dr_R)^4}{8\pi R^2}R^2dF$$

當 dr_R 極小時，比前兩項極小而可以省略，我們可得

$$\int_F\frac{1}{2}V'^2\,dF-\int_F\frac{1}{2}V_0'^2dF=\frac{1}{2\pi}[\varpi_0(R_1)-\varpi_0(R_2)]\int_{F_2}(C-C_0)dF$$

對於極小 dr_R 及 rot V_0' 我們可用 (3b) 式表示 $(C-C_0)$而可得

$$\int_F\frac{1}{2}V'^2dF-\int_F\frac{1}{2}V_0'^2dF=[\varpi_0(R_1)-\varpi_0(R_2)]\int_{F_2}\frac{1}{2}(dr_R)^2\frac{d(\mathrm{rot}\,\bar{u}_0 i\cdot\varpi_1)}{dR}RdF\cdots\cdots(4)$$

因此，假如在 $F_2\left(\frac{d(\mathrm{rot}\,\bar{u}_0 i\cdot\varpi_1)}{dR}>0\right)$內之一切角速度$\varpi_{0_2}$都大於在$F_1\left(\frac{d(\mathrm{rot}\,\bar{u}_0 i\varpi_1)}{dR}<0\right)$內之一切角速度 ϖ_{0_1}然則此一流體內之擾亂動能變換爲平均流動能。

在此情形

$$\int_\tau\frac{1}{2}V'^2\,d\tau-\int\frac{1}{2}V_0'^2d\tau<0$$

又因，當 rot $V_0'\to 0$時。$\int\frac{1}{2}V_0'^2d\tau\to 0$ 因此，必須當 rot $V_0'\to 0$時，$\int_\tau\frac{1}{2}V'^2\,d\tau-\int_\tau\frac{1}{2}V_0'^2d\tau\to 0$

然則 (4) 式右邊亦必須→0，因此，當 rot $V_0'\to 0$時，$\int(dr_R)^2dF\to 0$

用此結果於 (3-c) 式，可得

當 rot $V_0'\to 0$ 時，$\int_F(dr_R)^2dF\to 0$

§9 同心球上之運動

不壓縮性，均質，無粘性流體，在於兩個同心球面間運動，如以球座標系(ψ,φ,a) 表示，(其座標與前述之圓墻座標系之間有$R=a\cos\varphi$，$Z=a\sin\varphi$之關係，設

$$V_a=\frac{\partial\nabla}{\partial a}=0\cdots\cdots(1)$$

即流體運動在於 a=const. 球面上，再設其界面在

$$a=a_1,\ a=a_2,\ \varphi=\varphi_1,\ \varphi=\varphi_2$$

然則，如以 F 代表 a=const. 之球流面，可得下記之能量方程與環流方程：

$$\int\frac{1}{2}V'^2\,dF=-\int\frac{C^2dF}{8\pi^2R^2}+\mathrm{const.}\cdots(2)$$

$$\int(C-C_0)dF=\mathrm{const.}\cdots\cdots(3)$$

又，由 (1) 之假定，對於環流 (6-17) 式，

$$C=C_0-\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(dr_\psi)^2\frac{d(\mathrm{rot}\,\bar{u}_0 i a_1)}{ad\varphi}Rd\psi+\int_0^{2\pi}h(0)\,Rd\psi+\oint_L V_0'\cdot\delta\mathfrak{r}\cdots\cdots(4)$$

由此，則在此種運動 Rayleigh-Taylor，之穩定規範爲：

如在界面 $\varphi=\varphi_1$，$\varphi=\varphi_2$ 內，$\frac{d(\mathrm{rot}\,\bar{u}_0 i\cdot a_2)}{d\varphi}$ 只取正 (或負) 號，然則當rot $V_0'\to 0$ 時，

$$\int_F(dr_\psi)^2dF\to 0$$

再者，如$\frac{d\ \mathrm{rot}\ u_0 i\cdot a_1}{d\varphi}$在界面內變其符號，我們可由能量變換軌範檢查其穩定性。即由 (2) 式

$$\int_F\frac{1}{2}V'^2dF-\int_F\frac{1}{2}V_0'^2dF=-\frac{1}{2\pi}\int_F\omega_0(C-C_0)dF-\int_F\frac{(C-C_0)^2dF}{8\pi^2R^2}$$

若此，我們可得下記之規範：

假如在$\frac{d\,\mathrm{rot}\,\bar{u}_0\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{k}_1}{d\varphi}>0$ 之區域內之 ϖ_0 都小於在$\frac{d\,\mathrm{rot}\,u_0\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{a}_1}{d\varphi}<0$ 之區域內之 ϖ_0，然則，無關于時間，當 $\mathrm{rot}\,V_0'\to 0$ 時 $\int_F(dr_\varphi))^2dF\to 0$

此時，其擾亂運動動能將變爲平均帶流之動能。

§10討論I　基本假設之批判及其意義

在應用此等規範於地球大氣而來考察其對大氣環流論以前，讓我們先來考慮其理論具有之基本假設。

（1）不壓縮性，無粘性。

空氣具有壓縮性，其效應可分兩種，即靜學的及動學的效應。靜學的效應即由其密度隨高度而減小之事實表現。動學的效應即由運動方程內之粘性力 v div grad $\mathbb{V}$ 代表。

靜學的效應即爲靜學的穩度及同一質量之厚度隨高度增加之現象。此種效應對於流體運動之影響，當與不壓縮性流體之運動比較時，不如同於一種因數之變化而並無本質上的差異。因爲，如在絕熱、壓縮性流體內，運動方程則可寫：

$$\rho\left[\frac{d\mathbb{V}}{dt}+\mathrm{grad}\ \varphi\right]+\ \mathrm{grad}\ p=0 \cdots\cdots(1)$$

其能量方程可寫：

$$\frac{1}{\theta}\ \frac{d\theta}{dt}=0\ \ ,\ \frac{d}{dt}(\ln\theta)=0$$

如導入 $K=\ln\theta=\frac{1}{r}\ln p-\ln\rho$，此式可寫爲

$$\frac{dk}{dt}=0 \cdots\cdots(2)$$

取 (1) 之渦率(Curl)，代入 grad $\rho-r$ grad p $=-\ \rho$ grad k，可得

$$\mathrm{rot}\left(\frac{d\mathbb{V}}{dt}\right)=\mathrm{grad}\ k\times\mathrm{grad}\ \varphi \cdots\cdots (3)$$

此爲，絕熱，壓縮性流體之渦率方程。

另一方，不壓縮性之流體所滿足之渦率方程爲

$$\mathrm{rot}\left(\frac{d\mathbb{V}}{dt}\right)=-\ \mathrm{grad}\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\mathrm{grad}\ \ p\cdots(4)$$

而連續方程爲

$$\frac{d\rho}{dt}=0 \cdots\cdots(5)$$

如以 (2)，(3) 式與 (4)，(5) 式比較，可見，兩者間之類似及相異。再進一步，如在地球大氣內，外力位即爲重力位 -gz，而在靜壓平衡之下，

$$\mathrm{grad}\ p=\rho\ \mathrm{grad}\ \varphi \cdots\cdots(6)$$

因此，(3) 式變爲

$$\mathrm{rot}\left(\frac{d\mathbb{V}}{dt}\right)=\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ k\times\mathrm{grad}\ p\ \cdots(3')$$

因此，我們由 $K\longrightarrow-\ln\rho$ 之連續變換可得從壓縮性至不壓縮性之渦率方程，

此一類似性亦可由K之定義演繹，即

$$K=\frac{1}{r}\ln\ p-\ln\rho\ ;\ \ r=\frac{C_P}{C_V}$$

然則，在不壓縮性流體，$C_P=\infty$因此，可得 $k=-\ln\rho$

若此，壓縮性之靜學的效應不過一種因數之變化，而如用適當座標系（例如 (x_θ)，(y_θ, p) 表示其運動時，其方程可等於不壓縮性流體之方程。

其次，至於動學的效應，除大氣潮汐或氣壓日變化現象以外，在普通氣象動力學所關之擾亂——其波速遠慢於音速——其影響極小，而由此種效應之無視，不致引起重大之誤差。

因此，我們可以下一結論，即當我們考慮大氣之大規模運動時，可設

$$\frac{d\rho}{dt}=0\ \text{或}\ \mathrm{div}\mathbb{V}=0 \cdots\cdots(7)$$

（2）均質性

在 §6 以後之討論，我們假設流體之均質性而求其環流，此一假設之主要效果同於正壓及無外力之假設。即如密度不均質時，運動方程爲

$$\rho\left[\frac{d\mathbb{V}}{dt}+\mathrm{grad}\ \varphi\right]+\mathrm{grad}\ p=0 \cdots\cdots\ (1)$$

求此方程在一閉曲線上之線積分，可得若ρ=const.

$$\frac{dC}{dt}=\oint_L\frac{d\mathbb{V}}{dt}\cdot\delta\mathfrak{r}=-\int\frac{\delta p}{\rho}\equiv 0$$

再者，如 ρ=const. 在此流體內由外力 grad φ所產生之力偶到處都等於零，因此，此流體之總角運動量可保存。

在地球大氣內，此兩個簡化假設可適用於二次元，水平方向，正壓運動。因爲，作用於大氣之外力（重力）在鉛直方向，其對於水平運動之力偶效應可以無視，而且在正壓運動並無力管之存在。

在此時，我們又可考慮到由地球自轉而產生，對大氣作用之摩擦力偶。因地球以角速度Ω從西向東自轉，其將給東風帶向西（即爲正）角運動量而給西風帶向東（即爲負）運動量。可是因大氣本身並無產生角運動量，而地球自轉角速度爲恒常數值。此大氣由摩擦力偶從地球受入之角運動量之總和必須等於零。因此，當我們考慮全大氣之運動時，其在於地球自轉軸周圍之角運動量即可設常數。

§11、討論Ⅱ　穩定規範之意義及大氣環流之變遷

由北半球天氣圖，可知大氣環流分爲兩種運動，一爲圍繞地球自轉軸之帶流運動，二爲不規則而較小規模之渦流，此兩者合成即產生大氣波狀運動，所謂 Rossby 波者即此一例。在 Rossby 波者帶流運動爲在地球自轉軸周圍之固體轉動，擾亂爲由此帶流偏向力隨緯度變化之產生者。如以此帶流爲大氣基礎流，其穩定規範則爲如下：　設Ω表示其固體轉動之角速度。

$$\frac{d(\mathrm{rot}\ \bar{u}_0 i \cdot a_1)}{d\varphi} = 2\Omega\cos\varphi$$

由此，則在一半球內具有同一符號，應用§9之 Rayleigh-Taylor 之穩定規範(9-4)，可知 Rossby 波本爲穩定。因此在 Rossby 波，擾亂動能變換爲帶流動能。

另一方面，由 (9-4) 可知小偏位 dr_φ 產生圓周上環流 C之減少。因此爲滿足角運動量保存則，其小擾亂渦流必須向 r_φ 方向移動，來補償在基礎流之減少。即氣旋渦流向北，反氣旋渦流向南移動。此一趨勢亦可由「力」之概念解釋 (Kuo(1951)。若此，在其絕對渦度隨緯度增加（例如$\Omega>0$，北半球，或$\Omega<0$南半球）之大氣內。如有擾亂渦流之產生，此一渦流則向高緯度地帶趨動。此一渦流移動將變化大氣內渦率分佈情形，增加其在子午面方向之渦率梯度而增強在中間緯度之帶流運動，如此過程繼續，（當大氣可滿足 Rayleigh-Taylor 規範時，此過程必須繼續）竟造成渦率極大値在於中間緯度，而在此極大地點南北，其渦率梯度將呈相反符號，器則我們不能應用 Rayleigh-Taylor 之穩定規範，於此種大氣運動而必須藉能量變換規範來決定其穩定性。如此運動情形爲不穩定，然其帶流動能變換爲擾亂運動能，又爲到不穩定，其帶流運動之速度必須超過某一限値。在不穩定帶流運動，因其帶流運動之動能變換爲不規則擾亂之動能。帶流運動將減慢其帶流速度而回到穩定狀態。因此我們可得大氣基礎帶流之變遷與帶流擾亂間之動能交換之關係。

上述帶流之變遷與動能交換之相關關係頗符合地球大氣之環流情形如我們調查季節（或年）平均大氣環流，可得平均噴射流之緯度極合於小擾亂發生地帶。因夏季平均噴射流較冬季噴射流偏南，擾亂發生最頻地帶亦隨此南移。又因地球大氣之平均帶流運動屬於穩定型（即爲 Rossby 波），季節平均或年平均之能量交換即爲由擾亂動能變至帶流動能一型。因此我們可得下述結論，「在平均狀態下，大氣擾亂即爲帶流運動之能源，而不爲其消耗素」。

Starr 與 White 所測之統計結果亦顯示此結論 (1951)。若此，我們可應用 Rayleigh-Taylor 及能量變換之穩定規範討論而決定大氣大略之環流趨勢及擾亂發生之情形。

參　考　文　獻

1. Ragnar Fjørtoft : Geofysiske publikasjoner Vol. XIV. No.6
2. Kuiper : The atmospheres of earth and Planets.
3. Rossby & Starr : Journal of meteorology Vol.6, p. 288.
4. Starr : Journal of meteorology Vol. 5. pp. 39～43.
5. Taylor : Phil. Trans. Roy. Soc. A215. p.1.
6. Eady : Tellus, Vol. 1. p.p. 33～52.
7. Platzman : Tellus, Vol. 1. p.p. 53～64.
8. Kuo, H. L. : Journal of meteorology Vol. 6, p.p. 105～122.
9. Kuo, H. L. : Jourmal of meteorology, Vol. 8. p.p. 307～315.
10. Starr & White : Quart. J. R. Met. Soc., Vol. 77. p.p. 215～225.
11. Wexler : Proc. National Academy of Science. Vol. 40. p. 956.
12. Jeffreys, H. : Quart. J. R. Met. Soc., Vol. 52, p.p. 85～104　（完）

（上接第一三頁）

線，經過4週期其振幅仍無顯著的減小。若與磁力活動比較則有差別。因磁力活動顯示有敏銳的最高峯突起與急驟的衰退。

⑷磁暴擾動

傅卜盧 (Forbush) 氏曾發見於分佈在不同緯度的各測站所測得宇宙射線強度，因磁暴發生而稍有衰減的現象。此類衰減現象並不因緯度而有差異，雖遠至格陵蘭亦然。磁暴波幅之起落與中子的觀測或蓋氏計數器的觀測，均顯示其效應與原始輻射的能量有所關聯。張伯曼 (Chapman)氏認爲環周流現象爲磁暴擾動之源泉，此亦爲宇宙射線強度減弱主要的因素。

⑸地球磁力的效應

據史篤曼 (Stormer) 氏理論，地表磁場由於質子動量有其定量電荷，以達其較低之極限，使在地表到達一定緯度與一定方向，當其質點來自遙遠的地區。對於帶有正電荷質點的動量以垂直方向進入不同的地磁緯度時表示如附圖7。其切斷動量 (Cut-off momentum) 與 $\cos^4\lambda$ 成比例，λ爲緯度。在地磁赤道質點動量小於 14.9 Gev. 時即無法以垂直方向進入，至於在其他緯度的切斷動量或可以 $P=14.9\cos^4\lambda$ Gev. 表之。（完）