

上式中 $\frac{\partial u_g}{f}$ 在旋率最大密集地區甚為微小可以略去。故

$$q_g = -\frac{g}{f} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

又設 $\vec{\nabla}_P = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}$, 則 $\vec{\nabla}_P^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

, 故 (7) 式可寫為

$$q_g = -\frac{g}{f} \vec{\nabla}_P^2 Z \quad (7')$$

式中 $\vec{\nabla}_P^2 Z$ 稱為 Z 的 Laplacian 式。

3. 旋率的定差分析表示法

欲求等壓面上高度場中 0 點的旋率 q_g (見圖 1) , 用定差法 (Finite Difference Method) 最為方便, 取 d 為 150 海里最為標準。設

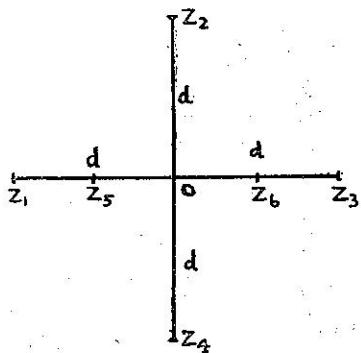


圖 1：高度場中的定差網格

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\Delta \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\Delta x} = \frac{\partial z_6 - \partial z_5}{d}$$

$$\text{且 } \frac{\partial z_6}{\partial x} = \frac{z_3 - z_0}{d}, \frac{\partial z_5}{\partial x} = \frac{z_0 - z_1}{d}$$

$$\text{故 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{z_1 + z_3 - 2z_0}{d^2}, \text{ 同樣 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{z_2 + z_4 - 2z_0}{d^2}$$

故 (7) 式為

$$q_g = \frac{4g}{fd^2} \left(\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} - \bar{Z} \right)$$

$$= \frac{4g}{fd^2} (\bar{Z} - Z) \quad (8)$$

此處 $\bar{Z} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}$ 稱為網格的空間平均 (Space-averaged) 等高線的高度, Z 為網格中心 0 點等高線的高度。

4. 等高線型式中的旋率

茲考慮在等壓面上 (a) 槽線, (b) 脊線, (c) 低值中心, (d) 高值中心四種等高線型式中的旋率

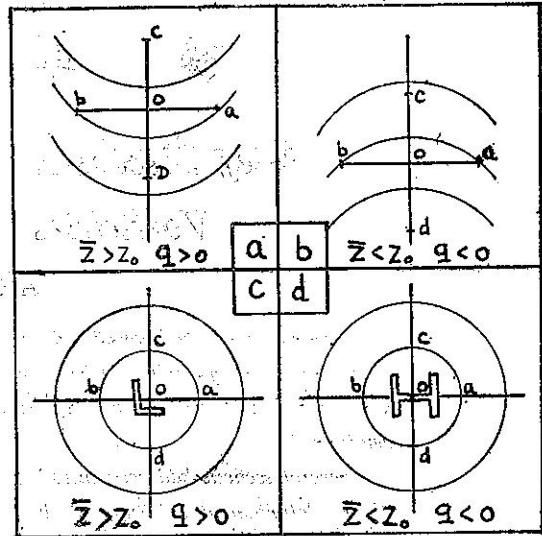


圖 2：等高線型式中的旋率

(見圖 2)。藉 (8) 式與圖 1 之助, 可得出在槽線上與低值中心的旋率為正, 在脊線上與高值中心的旋率為負。如果等高線梯度相同, 低值中心的旋率約為槽線上旋率的兩倍; 同樣, 高值中心的旋率約為脊線上旋率的兩倍。

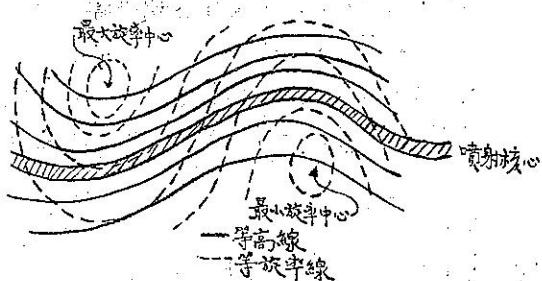
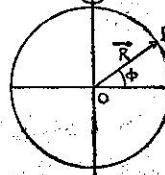


圖 3：地轉式旋率分析

在高度場中某點的高度值可從圖上網格點上讀出, \bar{Z} 為該點周圍網格上的平均值, 所以該點的旋率可用 (8) 式計算得之。波狀等高線中, 通常短波上的槽線相當於最大旋率處 (Vorticity maximum), 脊線相當於最小旋率處 (Vorticity minimum)。高

度場中標準的地轉式旋率分析如圖 3 所示。



5. 固態旋轉體的旋率

以地球的旋轉為例, 考慮靜止於地面上的質點 P , 當地球旋轉時 P 點的旋率。 P 點的位置向量圖 4：地球的旋率 (Position Vector) 為 (見圖 4)

$$\vec{R} = \vec{i} x + \vec{j} y + \vec{k} z$$

地球自轉角速度

$$\vec{\omega} = \vec{i} \omega_x + \vec{j} \omega_y + \vec{k} \omega_z$$

則 P 點的線速度 (Linear Velocity) 為

$$\vec{V}_E = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

故得 P 點的旋率

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{V}_E &= \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = \nabla \times \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{array} \right| \\ &= \nabla \times (\vec{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \vec{j}(\omega_z x - \omega_x z) \\ &\quad + \vec{k}(\omega_x y - \omega_y x)) \\ &= \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_y z - \omega_z y, \omega_z x - \omega_x z, \omega_x y - \omega_y x \end{array} \right| \\ &= \vec{i}(\omega_x + \omega_z) + \vec{j}(\omega_y + \omega_z) \\ &\quad + \vec{k}(\omega_z + \omega_x) \\ &= 2[\vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z] = 2\vec{\omega} \quad \dots \dots (9) \end{aligned}$$

故知固態旋轉體的旋率為其角速度的兩倍。

再考慮旋率的鉛直分量：

$$q = \nabla \times \vec{V} \cdot \vec{k} = 2\vec{\omega} \cdot \vec{k} = 2\omega_z$$

由圖 5 可知

$$\omega_z = \omega \sin\phi$$

$$\text{故 } q = 2\omega \sin\phi$$

由此可知靜止在地面上某點的旋率等於該處的地轉偏向參數。

6. 旋率的球面曲紋坐標表示法

在球面上，單位向量

圖 5: $\vec{\omega}$ 的分量

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的大小不變，而其方向則隨地不同，故此等單位向量應為變量。按旋率的定義得

$$q' = \nabla \times \vec{V} \cdot \vec{k} = \nabla \cdot \vec{V} \times \vec{k}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & v & \omega \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \\ &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\vec{i}v - \vec{j}u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{j} \frac{\partial \vec{i}}{\partial y} \cdot \vec{v} + \vec{k} \cdot \frac{\partial \vec{i}}{\partial z} \cdot \vec{v} \\ &\quad - \vec{i} \frac{\partial \vec{j}}{\partial x} \cdot \vec{u} - \vec{k} \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial z} \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

因爲 \vec{i} 與 $\frac{\partial \vec{i}}{\partial x}$, \vec{j} 與 $\frac{\partial \vec{j}}{\partial y}$ 互相垂直，其無向乘積 (Scalar Product) 為零故也。

但 $\frac{\partial \vec{i}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{i}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{j}}{\partial z} = 0$ ，及由圖 6 可知

$$\left| \frac{\partial \vec{j}}{\partial x} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{j}}{\Delta x} \right| = \frac{1}{a} = \frac{\tan\phi}{a}$$

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial x} = -\vec{i} \frac{\tan\phi}{a}$$

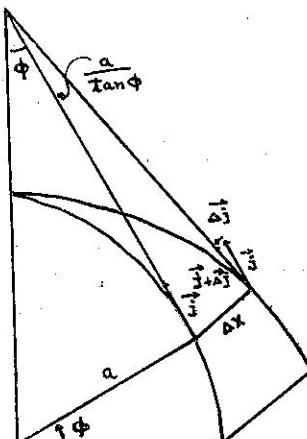


圖 6: \vec{j} 在緯度方向的變化

$$\text{故 } q' = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{a} \tan\phi \quad \dots \dots (10)$$

上式為旋率的球面曲紋坐標表示法，將 (1) 式與 (10) 式相較，後者多出一項 $\frac{u}{a} \tan\phi$ ，此項的大小等級通常為 10^{-5} 每秒，而在最大旋率區域內 $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ 的大小等級為 10^{-4} 每秒，因此 $\frac{u}{a} \tan\phi$ 一項可予略去。故知在球面上的旋率亦可以 (1) 式表出之。若不予忽略，在北半球 ($\phi > 0$) 比較 q 與 q' 的大小：

(i) 向東運動 $u > 0$, $q' > q$,

(ii) 向西運動 $u < 0$, $q' < q$,

(iii) 南北運動 $u = 0$, $q' = q$.

7. 旋率的自然坐标表示法

在自然坐標中，切線方向的單位向量以 \vec{t} 表之，法線方向的單位向量以 \vec{n} 表之，則

$$\vec{\nabla} = \vec{t} \frac{\partial}{\partial s} + \vec{n} \frac{\partial}{\partial n} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{V} = t \vec{v}$$

$$\begin{aligned}
 \text{故旋率 } q &= \vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot \vec{k} = \vec{k} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \\
 &= \vec{k} \times \left(\vec{t} \frac{\partial}{\partial s} + \vec{n} \frac{\partial}{\partial n} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\vec{t} v) \\
 &= \left(\vec{n} \frac{\partial}{\partial s} - \vec{t} \frac{\partial}{\partial n} \right) \cdot (\vec{t} v) \\
 &= V \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{t}}{\partial s} - \frac{\partial \vec{v}}{\partial n},
 \end{aligned}$$

因為 $\vec{n} \cdot \vec{t} = 0$, $\vec{t} \cdot \vec{t} = 1$, $\vec{t} \cdot \frac{\partial \vec{t}}{\partial n} = 0$ 之故也。

$$\text{又因 } \frac{\partial \vec{t}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{t}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s} = \vec{n} \cdot \vec{l} \cdot \vec{k} = \vec{n} \cdot \vec{k}$$

上式為旋率的自然坐標表示法，式中 kv 稱為曲率項 (Curvature term)， $-\frac{\partial v}{\partial n}$ 稱為切變項 (Shear term)。此兩項各在南北二半球風場中的正負可由圖 7 表示之。

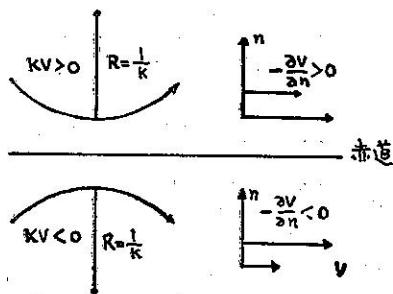


圖 7：南北半球自然坐標中的旋率

再研究固態旋轉體的旋率，在圓周運動由

$$V = R\omega = \frac{\omega}{K} \quad \text{即} \quad KV = \omega$$

$$-\frac{\partial v}{\partial n} = \left(-\frac{\partial R}{\partial n} \right) \frac{\partial v}{\partial R} = \frac{\partial (R\omega)}{\partial R} = \omega$$

(因 $\frac{\partial R}{\partial n} = -1$)

故由 (11) 式得出

此式與第5節中所討論者不謀而合。

三、風場中的旋率

在北半球旋率之值為正，稱為氣旋式的旋率（Cyclonic Vorticity），旋率之值為負，稱為反氣旋式的旋率（Anticyclonic Vorticity）。在典型風場中的旋率，討論如下：

8. 風場型式中的旋率

就(11)式中曲率項與切變項的正負而論，風場中的旋率可分做六種可能配合情形，茲以北半球上者而討論之：

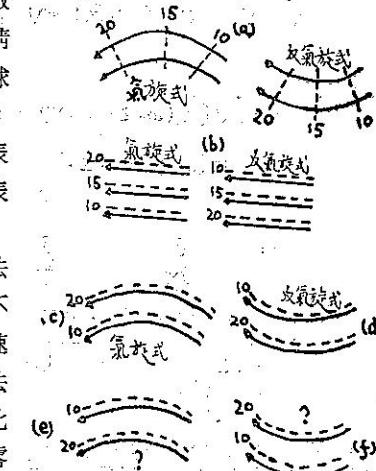


圖 8：風場型式中的旋率

b. 氣流線呈直線形，此時曲率項為零，（因 $K=0$ ）吾人面對氣流線的方向，若風速向左方遞減，則旋率為正；向右方遞減則為負。

c. 若曲率爲氣旋式的，氣流的速率向左方遞減，則旋率爲正。

d. 若曲率爲反氣旋式的，氣流速率向左方遞增

e. 若曲率爲氣旋式的，而氣流的速率向左方遞增，此時曲率項爲正，切變項爲負，旋率的正負須視曲率項與切變項絕對值的大小方可決定。

f. 若曲率爲反氣旋式的，而氣流的速率向左方遞減，旋率的正負亦不能決定。

9. 噴射氣流中的旋率

噴射氣流地帶，最大風速位於氣流的中央，圖 9 表示噴射氣流的兩種主要型式。圖 a 中最大風速軸橫貫槽線的中央，按 8 節的討論，在此軸之北，旋率爲氣旋式的；此軸之南，旋率的正負便不能決定，因爲曲率項爲氣旋式的，切變項爲反氣旋式的。同樣，在圖 b 中，軸之南旋率爲反氣旋式的，軸之北旋率的正

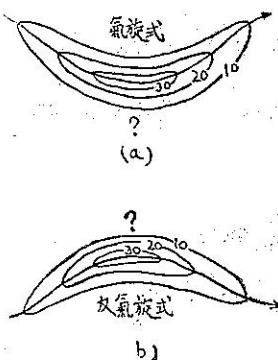


圖 9：噴射氣流中的旋率。

(i) 在最大風速之外的地區，風速 V 與此處距中心距離 R 的關係，按假定(=)且設為

$$V = \frac{a}{R^b} \quad (13)$$

式中 a 與 b 皆為常數，且 $b > 0$ 。曲率項與切變項各為

$$KV = \frac{a}{R^{b+1}} \quad (14)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{ab}{R^{b+1}} \quad (15)$$

因為 $R = \frac{1}{K}$ ， $\frac{\partial R}{\partial n} = -1$ 之故也。

(14, 15) 兩式相加，得旋率

$$q = \frac{a}{R^{b+1}} (1-b) \quad (16)$$

在颱風中旋率為正 ($q > 0$)，由 (16) 式得出 $b < 1$ ，故知 b 值應為介於 0 與 1 間的真分數，亦即

$$0 < b < 1$$

再將 (14, 15) 兩式相除，取絕對值得

$$\left| -\frac{\frac{\partial V}{\partial n}}{KV} \right| = b$$

故知 b 之值為切變項與曲率項絕對值的比。

將 (13) 式代入 (16) 式內，得

$$q = \frac{V}{R} (1-b) \quad (17)$$

如果颱風的強度依旋率的大小而定，由 (17) 式知颱風的強度亦可由 b 值的大小而區分等級。按假定(=)等風速線既與等壓線重合，可知等旋率線亦與等壓線重合。且因 $\frac{q}{V} = \frac{1-b}{R} < 1$ ，知旋率向外遞減的程度較之風速向外遞減的程度為快。舉例言之，假設在颱風中最大風速之外地點的風速與距中心距離的平方根成反比 ($V = \frac{a}{\sqrt{R}}$)，由 (16) 式求得旋率與距中心距離的 $3/2$ 幕成反比 ($q = \frac{a}{2R\sqrt{R}}$)。

負便不能決定了。

10. 騰風中的旋率

在討論颱風中旋率分佈情況時，為簡單起見假定：(→) 騰風中等壓線成同心圓，沿等壓線吹刮的風速不變，亦即等壓線與等風速線重合。(←) 最大風速出現在中心附近，風速向外遞減。

(ii) 在北半球，颱風中風向成反時針方向吹刮

，由 8 節的討論，曲率項恒為正，切變項 ($-\frac{\partial V}{\partial n}$) 在最大風速之外為負，之上為零，之內為正。由此可知：颱風中最大旋率之值應出現在最大風速之內的近中心處。

四、絕對旋率與相對旋率

空氣質點在地面上運動，其絕對速度等於相對速度加上地球自轉的速度，以式表之為

$$\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{V}_E = \vec{V} + \omega \times \vec{R} \quad (18)$$

上式兩端各取 $\nabla \times$ ，得

$$\nabla \times \vec{V}_a = \nabla \times \vec{V} + \nabla \times \vec{V}_E$$

將 (9) 式代入得

$$\nabla \times \vec{V}_a = \nabla \times \vec{V} + 2\omega$$

上式各項無向的乘以 \vec{k} ，得出旋率的鉛直分量

$$\vec{\nabla} \times \vec{V}_a \cdot \vec{k} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \vec{k} + 2\omega \cdot \vec{k}$$

或寫為 $Q = q + f \quad (19)$

Q 稱為絕對旋率， q 為相對旋率。故知絕對旋率為相對旋率與偏向參數的和。

五、環流與旋率

11. 環流

環流就是速度沿封閉曲線環繞一周的線積分 (Line Integral)，以式表之：

$$C = \oint \vec{V} \cdot d\vec{r} \quad (20)$$

式中 \vec{V} 為相對速度， C 為相對環流。如果 \vec{V}_a 表示絕對速度，則絕對環流

$$C_a = \oint \vec{V}_a \cdot d\vec{r} \quad (21)$$

再者，(18) 式中地球半徑向量以 \vec{r} 表之為

$$\vec{V}_a = \vec{V} + \omega \times \vec{r} \quad (18')$$

上式各項無向的乘以 $d\vec{r}$ ，取圍繞封閉環流曲線的線積分，且應用 (20, 21) 兩式的關係，得

$$\begin{aligned} C_a &= C + \oint \omega \times \vec{r} \cdot d\vec{r} \\ &= C + \vec{\omega} \cdot \oint \vec{r} \times d\vec{r} \end{aligned}$$

茲解釋上式右端第二項的意義：設環流曲線的平面與地軸交於 0 點 (見圖 10)，此點作為向量 \vec{r} 的原

$$\frac{dc_a}{dt} = \oint \frac{d\vec{v}_a}{dt} \cdot d\vec{r} \quad \dots \dots \dots (25)$$

同樣可得

$$\frac{dc}{dt} = \oint \frac{dv}{dt} \cdot dr \quad \dots \dots \dots (25')$$

上二式表示圍繞封閉曲線加速度的環流積分等於曲線的環流變化率，為 Kelvin 所首先導出。

略去摩擦力的絕對運動方程式為

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = -\alpha \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \Phi \quad \dots \dots \dots (26)$$

將 (26) 式代入 (25) 式內，得

$$\frac{dc_a}{dt} = -\oint \alpha \vec{\nabla} p \cdot d\vec{r} - \oint \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} \quad \dots \dots \dots (27)$$

因為 $\vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} = \delta \Phi$ 表示 Φ 沿 $d\vec{r}$ 方向的增量，故

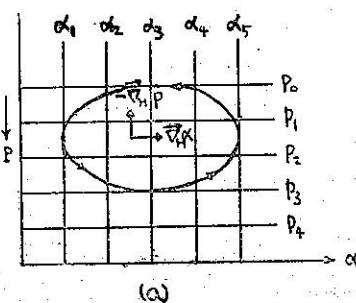
$$-\oint \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} = -\oint \delta \Phi = 0 \quad \dots \dots \dots (28)$$

同樣 $\vec{\nabla} p \cdot d\vec{r} = \delta p$ 表示 p 沿着線元素 $d\vec{r}$ 的增量，所以 (27) 式可寫為

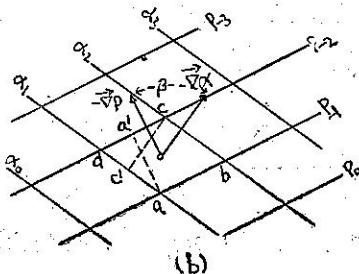
$$\frac{dc_a}{dt} = -\oint \alpha \delta p \quad \dots \dots \dots (29)$$

上式右端的積分可將環流曲線畫在 $\alpha, -p$ 坐標圖上計算得之，此種圖形如圖 12a 所示。(29) 式右端的積分值就是圖 12a 中環流曲線所包圍的面積，亦即單位正方形的數目，以 N 表之，

$$-\oint \alpha \delta p = N \quad \dots \dots \dots (30)$$



(a)



(b)

圖12：環流曲線內的力管

此等正方形係由等比容面與等壓面所構成，稱為壓容力管 (Pressure Volume Solenoids)，或簡稱力管。

單位力管 abcd (見圖 12b) 的面積， $A = (da) \times (dc) \sin \beta$ ，但因 $\sin \beta = \frac{cc'}{dc} = -\frac{aa'}{da}$ ，單位面積內的力管數 N 為

$$N = \frac{1}{A} = \frac{\sin \beta}{(aa') \times (c'c)} \quad \dots \dots \dots$$

氣壓梯度的大小顯然為 $-\frac{1}{aa'}$ ， α 的升度 (Ascendent) 的大小為 $\frac{1}{cc'}$ ，因此

$$N = p \text{ 的梯度} \times \alpha \text{ 的升度} \times \sin \beta$$

亦即 $\Delta \alpha$ 與 $-\nabla p$ 的有向乘積 (Vector Product)，以式表之，

$$\vec{N} = \vec{\nabla} \alpha \times (-\vec{\nabla} p) = -\vec{\nabla} \alpha \times \vec{\nabla} p$$

此處 \vec{N} 稱為力管向量，垂直於 $\vec{\nabla} \alpha$ 與 $-\vec{\nabla} p$ 所在的平面，力管向量的鉛直分量

$$N = -\vec{\nabla} \alpha \times \vec{\nabla} p \cdot \vec{k} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots \dots \dots (30')$$

(30) 式代入 (29) 式內，得

$$\frac{dc_a}{dt} = N \quad \dots \dots \dots (31)$$

此式表示封閉流體曲線的絕對環流加速度等於環流曲線內所包含的力管數，上式稱為絕對運動中的個別環流定理，由 Kelvin 所推出，後經 V. Bjerknes 推廣 (1898)。

同樣，相對運動方程式為

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \vec{\nabla} p - 2\vec{\omega} \times \vec{V} - \vec{\nabla} \Phi \quad \dots \dots \dots (26')$$

將 (26') 式代入 (25') 式內，得

$$\frac{dc}{dt} = -\oint \alpha \vec{\nabla} p \cdot d\vec{r} - \oint 2\vec{\omega} \times \vec{V} \cdot d\vec{r} - \oint \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} \quad \dots \dots \dots (32)$$

上式右端第二項積分內之值 $2\vec{\omega} \times \vec{V} \cdot d\vec{r}$

$\vec{v} \times \vec{\delta r} \cdot 2\omega$, 式

中 $\vec{v} \times \vec{\delta r}$ 的大小為 $V_n \delta r$ (見圖13), 此處 V_n 為速度在曲線法線方向的分量, 因為 $\vec{\delta r}$ 為曲線上

的線元素, $\oint V_n dr$

表示曲線所包的面

積在單位時間內的變化。設 A 為此面積的大小, \vec{n} 為法線方向的單位向量, 面積向量可表為 $\vec{A} = A\vec{n}$, 又因 $\vec{\omega}$ 為常數向量, 故

$$\begin{aligned} -\oint 2\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \vec{\delta r} &= -\oint \vec{v} \times \vec{\delta r} \cdot 2\vec{\omega} \\ &= -\frac{d}{dt}(A\vec{n} \cdot 2\vec{\omega}) \end{aligned}$$

但是地軸(或 $\vec{\omega}$)與法線方向(\vec{n})間的夾角為 $\frac{\pi}{2} - \phi$, 故

$$\vec{A} \cdot 2\vec{\omega} = 2\omega \sin \phi A$$

式中 $A \sin \phi$ 為 A 在赤道面上的投影, 故

$$\begin{aligned} -\oint 2\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \vec{\delta r} &= \frac{d}{dt}(2\omega \sin \phi A) \\ &= 2\omega \sin \phi \frac{dA}{dt} \end{aligned} \quad (33)$$

將 (27, 33) 兩式代入 (32) 式內, 得出絕對環流加速度與相對環流加速度間的關係。

$$\frac{dC_n}{dt} = \frac{dC}{dt} + 2\omega \sin \phi \frac{dA}{dt} \quad (34)$$

實則上式由 (22') 式對時間 t 取導式而得出較為便捷。

六、旋率方程式

在特例, 設 α 僅為 P 的函數, 此時等比容面與等壓面重合, 力管之數為零, $N = 0$, 此等流體稱為呈正壓狀態 (Barotropic), 由是 (31) 式可寫成

$$\frac{dC_n}{dt} = 0 \quad \text{或} \quad C_n = C_{n0}$$

式中 C_{n0} 為流體的原始環流, C_n 為此後任意時間的環流, 此式表示: 在正壓流體中封閉流體曲線的絕對環流具有保守性質, 此公式在流體動力學中相當於力學中的角動量不滅原理。

合併 (22', 24) 兩式, 可得

$$C_n = QA \quad (24')$$

上式取對數再微分得

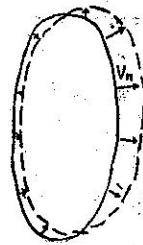


圖13：面積在單位時間內的變化

$$\frac{1}{C_n} \frac{dC_n}{dt} = \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = 0$$

設 $\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = D$, 表示水平單位面積的變化率, 亦即水平輻散, 故上式可寫為

$$\frac{dQ}{dt} = -DQ \quad (35)$$

或將 (19) 式的關係代入, 得

$$\frac{d}{dt}(q+f) = -D(q+f) \quad (36)$$

由 (4) 式得 $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dt} = \beta V$

故 (36) 式亦可寫為

$$\frac{dq}{dt} = -D(q+f) - \beta V \quad (37)$$

上列 (35, 36, 37) 諸式為旋率方程式在直角坐標中的各種簡單形式。

(37) 式之一應用: 考慮一無輻散的氣流越過赤道的情形, 此時 $D=0$, 再由 (4) 式的關係, (37) 式再寫做

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{2\omega \cos \phi}{a} V$$

在赤道附近, $\cos \phi = 1$, 所以

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{2\omega}{a} \cdot V \quad (38)$$

如果氣流從南至北或北至南越過赤道, 隨氣流運動空氣質點的旋率在南北半球中皆為減小。如果氣流從南半球向北開始運動時的旋率為零 (見圖14), 空氣質點到達北半球時的旋率為負值, 即為反氣旋式的; 如果氣旋從北向南越過赤道, 空氣質點到達南半球的旋率為正, 亦為反氣旋式的旋率。所以空氣質點越過赤道時有轉為反氣旋式旋率的趨向, 依照自然坐標的旋率 (11) 式, 在此種氣流中有反氣旋式的曲率或有反氣旋式的切變。在較廣闊的氣流中, 切變通常很小, 旋率主要的以反氣旋式的曲率表出之。印度的夏季季風便是此等作用的極好例子: 當一熱性低壓在亞洲大陸發展時, 南半球的東南貿易風迫向北方轉向, 當此種氣流越過赤道時, 成反氣旋式的彎曲, 到達印度時便為西南季風了。其餘情形留待21節中詳細討論。

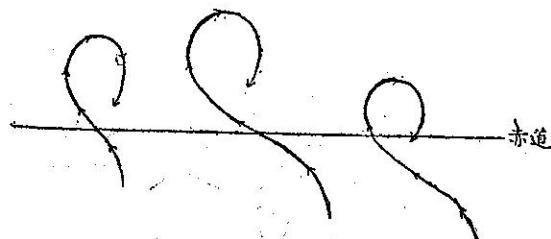


圖14：氣流越過赤道

旋率方程式在各種坐標系統中的表示法，再詳細討論如下：

14. 旋率方程式的直角坐標表示法

等高面上的運動方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + fv \\ \frac{dv}{dt} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} - fu \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \quad = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + fv \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \quad = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} - fu \end{array} \right. \quad (39)$$

或

視 f 為變數，上列兩式各對 y, x 微分，再由前式減去後式，重行排列得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q+f) &= -(q+f) \nabla_n \cdot \vec{V} \\ &+ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

上式表示絕對旋率 $(q+f)$ 的個別變化率 (Individual Rate of Change) 係依照右端的三項而定。第一項稱為幅散項，第二項為旋管項，第三項為力管項。由觀測知大規模區域內的絕對旋率常為正值。(40) 式右端諸項逐一討論如下：

(i) 幅散項 (Divergence Term) 當水平輻合時，絕對旋率增加；水平輻散時，絕對旋率減小。

(ii) 旋管項 (Vortex-tube Term) 表示水平旋率變為鉛直旋率的改變率，此項的意義可以圖 15 為例解釋之，此處 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 與 $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ 二者為正，按 (40) 式絕對旋率的鉛直分量將與時俱增。其物理的意義：在 A 點水平的風速，按下沉運動而減低；而在 B 點，水平風速按上升運動而增加。因為微差垂直平流的結果，在 AB 層形成氣旋式的風切，因此而使旋率的鉛直分量增加。通常此項較之幅散項的平均值小至十倍之

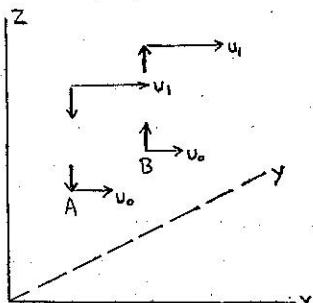


圖 15：旋管項的意義

多。在純粹的水平運動中，旋管項不但為零，而且 (40) 式左端內旋率的鉛直平流 $\omega \frac{\partial q}{\partial z}$ 亦為零。

(iii) 力管項 (Solenoids Term)，表示運動質點上的氣壓轉矩 (Pressure Torque)，由 (30') 式知此項就是運動質點中心的單位水平面積內的力管數 N。

因為地轉風方程式的向量形式 $\vec{V}_g = -\frac{\alpha}{f} \vec{V} \times \vec{P}$

$\times \vec{K}$ ，再由 $\alpha = \frac{1}{\rho}$ 得出 $\frac{\nabla \alpha}{\alpha} = -\frac{\nabla P}{\rho}$ 及由狀態方程式視 P 為常數得出 $\frac{\nabla \alpha}{\alpha} = -\frac{\nabla T}{T}$ ，所以力管項亦可寫為

$$\begin{aligned} N &= -\nabla \alpha \times \nabla P \cdot \vec{K} = -\nabla \alpha \cdot \nabla \times \vec{K} \\ &= f \frac{\vec{V}_g \cdot \nabla \alpha}{\alpha} = -f \frac{\vec{V}_g \cdot \nabla P}{\rho} \\ &= f \frac{\vec{V}_g \cdot \nabla T}{T} \end{aligned} \quad (41)$$

由此可知，較密空氣的地轉平流可使絕對旋率增加，反之，較疎空氣的地轉平流可使絕對旋率減小。但是， $\frac{dQ}{dt}$ 的大小等級約為 10^{-9} 每秒每秒，而 N 的大小等級約為 10^{-11} 每秒每秒。所以 (40) 式中的旋管項與力管項皆可略去，而得出如 (36) 式所示的可靠近似值。

15. 旋率方程式的球面曲紋坐標表示法

在球面曲紋坐標中的旋率方程式，Sherman 求得為

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q+f) &= -(q+f) \nabla_n \cdot \vec{V} + \nabla_n \cdot \\ &\cdot (\omega q_x \vec{i} + \omega q_y \vec{j}) + \nabla_n \cdot (\vec{K} \times \alpha \nabla_n P) \end{aligned} \quad (42)$$

此處旋管項與 (40) 式所示的旋管項不同，相差一小的校正項 $\frac{V}{a} \frac{\partial \omega}{\partial n}$ ；同樣力管項可寫為 $\nabla_n \cdot f \vec{V}_g$ ，與 (40) 式中的力管項有相同的形式 (忽去 f 的變化)。所以，球面曲紋坐標中的旋率方程式 (42) 中右端各項與 (40) 式中右端的各對應項極為類似。(42) 式中的 x 與 y 各為沿緯度圈與經度圈的曲紋距離，鉛直旋率 q 與水平輻散 $\nabla_n \cdot \vec{V}$ 取其球面曲紋坐標表示法。

16. 旋率方程式的等壓坐標表示法

在等壓坐標 (Isobaric Coordinates) 中，以 P 代替鉛直標 Z ，水平運動方程式可表為

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ \quad + \omega \frac{\partial u}{\partial p} = -g \frac{\partial z}{\partial x} + fv \\ \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \\ \quad + \omega \frac{\partial v}{\partial p} = -g \frac{\partial z}{\partial y} - fu \end{array} \right. \dots\dots\dots(43)$$

此處 $\omega = \frac{dp}{dt}$, 與 (40) 式取同樣的手續, 得出

$$\frac{d}{dt} (q_p + f) = -(q_p + f) \vec{\nabla}^p \cdot \vec{V} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial p} \right) \dots \dots \dots (44)$$

此處 ω 與 w 極為相似，由流體靜力方程式可知
 $\omega = -\rho gw$ ，上式較 (40) 式簡單，因為此處不含有
 力管項。

須注意者，等壓面上的水平風可以度量等壓旋率 q_P 與等壓幅散 $\vec{\nabla}_P \cdot \vec{V}$ 二者，旋管的意義與大小，大致與直角坐標中所表示者相同。此外，(44) 式左端含有 $\omega \frac{\partial Q}{\partial P}$ 項，此表示絕對旋率的鉛直平流，假如對於等壓面的垂直運動可以忽略，(44) 式可改寫為

此處 $\frac{D}{Dt}$ 為在空間運動中按等壓投影（等壓面上的軌跡線）的變化率算子（Operator）。

17. 旋率方程式的等嫡坐标表示法

在等熵坐標 (Isentropic Coordinates) 中，略去摩擦力的水平運動方程式為

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ \quad + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = - \frac{\partial M}{\partial x} + fv \\ \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \\ \quad + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = - \frac{\partial M}{\partial y} - fv \end{array} \right. \dots\dots\dots(46)$$

此處 $M = (C_p T + gz)\theta$ 稱為孟氏位 (Montgomery Potential) 或稱為等熵氣流函數。在乾絕熱運動時， $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ，與(40)式同樣手續可導出等熵旋率方程式

此等 q_θ 與 $\vec{\nabla}_\theta \cdot \vec{V}$ 各為在等熵面上水平風場的相對旋率與輻散，(47) 式為各種坐標系統中旋率方程式的最簡形式。在乾絕熱假定下，平流與等熵面垂直，故平流在等熵面上的分量為零。此外 (47) 式中無力管項與旋管項。倘若 q_θ 與 $\vec{\nabla}_\theta \cdot \vec{V}$ 以球面坐標表之。略去高次諸項，旋率方程式 (47) 在球面坐標中仍屬有效。

七、絕對旋率與其他氣象因素的關係

旋率方程式表出絕對旋率與幅散的關係。再者，在正壓流體中，(24') 式可寫為

上式表示絕對旋率與氣層的水平面積有成反比例的關係。此外，絕對旋率與（1）氣層的厚度，（2）穩度因子，（3）降溫率的關係，列述於後：

18. 位置旋率不減定律——絕對旋率與氣層厚度的關係

以氣壓爲鉛直坐標的連續方程式爲

$$D = -\frac{1}{\pi} \int d\Omega (\delta p)$$

將(49)式代入(35)式內，可得

$$\frac{\frac{dQ}{dt}}{Q} - \frac{\frac{d\delta p}{dt}}{\delta p} = 0$$

式中 δp 以 Δp 表之，積分得

此式為 Rossby 首先導出 (1940)，稱為位置旋率不減定律，表示絕對旋率與氣層的厚度成正比例。

所謂位置旋率 (Potential Vorticity) 者，就是氣屬的厚度 Δp 變為標準值 (例如 50 mb)，該氣層所具有的旋率，由 (50) 式可知位置旋率在乾絕熱運動中具有保守性質，此等性質與位溫 (Potential Temperature) 頗為相似。

應用(50')式可解釋氣流越過南北縱向山脈後動力槽(Dynamic Trough)的成因。考慮無相對旋率($q=0$)的西來氣流接近山脈時(見圖16)，當氣流越山時， Δp 減小，由(50')式知相對旋率 q 必為負值。假設此等變化大部出現在曲率項，此氣流開始作反氣旋式的曲線運動。在背山面， Δp 增加，因此

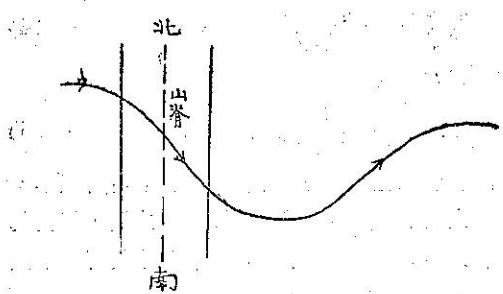


圖16：背山面西來氣流動力槽的形成

又使曲率改變為零。同時，緯度減低， f 之值變小，可使相對旋率的反氣旋的曲率變小。在 q 與 f 兩個因素合併影響之下，尤其是後者，卒使氣流的曲率變為氣旋式的了。氣流便向北偏轉。因此在背山面有槽的形成。此後氣流的軌跡便在緯度的變化下運動了。氣流越過冷氣團 (Cold Dome) 時亦有同樣的情形發生。

19. 位置旋率不減定律——絕對旋率與穩度因子的關係

在等壓面上的穩度因子(Stability Factor)表爲

$$\sigma = - \frac{\partial \theta}{\partial p}$$

其與水平幅散有下之關係

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sigma D \quad \dots \dots \dots \quad (51)$$

稱爲穩度變化方程式，證明如下：

設等高面上的穩度因子爲

由位溫的遞減率 $(\frac{\partial \theta}{\partial z})$ 知氣層的穩定，中性或不穩定端視 S 的為大於零，等於零或小於零而定。在等壓面上，將流體靜力方程式代入 (52) 式內，得

$$S = -\frac{\rho g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = \frac{\rho g}{\theta} \sigma \quad \dots \dots \dots \quad (53)$$

式中 $\sigma = -\frac{\partial \theta}{\partial p}$, 設 $\theta = \theta(x, y, p, t)$, 上式對時間

t 取導式，得

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(-\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_P + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}_P \theta + \frac{dp}{dt} \frac{\partial \theta}{\partial p} \quad \dots \dots \dots \quad (54)$$

乾 絶熱 運動時， $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ，則

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_p = \vec{V} \cdot \vec{\nabla}_p \theta + \frac{dp}{dt} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial p} \dots \dots \dots (55)$$

將 $\sigma = -\frac{\partial \theta}{\partial p}$ 代入 (55) 式內，再將其對 p 取偏導式，得

倘若加速度沿鉛直方向無顯著的變化， $\frac{\partial \vec{v}}{\partial p}$ 代表風的速度在兩氣層間的向量差，亦即熱風 (Thermal Wind)，又在等壓面上，等溫線與等位溫線重合，故熱風與位溫梯度成垂直，因此

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial p} \cdot \vec{\nabla}_P \theta = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (57)$$

將(49)式所表示的連續方程式交換微分符號得出

$$-\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{dp}{dt} \right) = -D$$
, 與(57)式俱代入(56)式內
 , 得

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_p \sigma + \sigma D - \frac{dp}{dt} - \frac{\partial \sigma}{\partial p} \quad \dots(58)$$

$$\text{但 } \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \sigma + \frac{dp}{dt} - \frac{\partial \sigma}{\partial p}$$

求代入(58)式內即得(51)式了。

$$\frac{\frac{d}{dt}(q+f)}{q+f} + \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)}{\frac{\partial\theta}{\partial p}} = 0$$

積分得

上式亦可由等嫡坐標中的旋率方程式推導出，在乾絕熱情形下，等嫡坐標中的連續方程式爲

$$\vec{\nabla}_\theta \cdot \vec{V} = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \dots \dots \dots (60)$$

上式代入(47)式中,得

$$\frac{d(q_\theta + f)}{dt} = - \frac{d\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)}{dt} \dots\dots\dots(61)$$

積分得

$$\frac{q_e + f}{\partial p} = \text{常數} \quad (59')$$

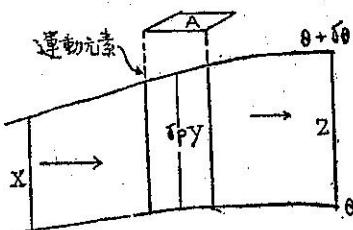


圖 17：氣流在等熵面間的運動

此方程式的應用，可用圖（17）說明之，此處等熵流（Flow）假定介於二鄰近等熵面之間，此二等熵面間位溫之差為 $\delta\theta$ ，因此（59'）式可寫為

$$\frac{q_e + f}{\partial p} = \left(\frac{q_e + f}{\partial p} \right)_0, \quad \frac{1}{\partial p} \frac{d}{dt} (\partial p) = - \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{V} \quad (62)$$

由此可知當空氣隨氣流運動時，如 δp 增加，則有等熵的幅合，且使絕對旋率增加；反之，如 δp 減小，則有等熵的幅散，且使絕對旋率減小。

18. 絕對旋率與降溫率的關係

先求出降溫率與氣壓高度的關係，在等高面上，（55）式可改寫為

$$-\frac{\partial \theta}{\partial t} = \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \theta + \omega \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

上式若對高度 z 取偏導式，且設 $\Gamma = -\frac{\partial \theta}{\partial z}$ ，同樣可

得出如（51）式的相似結果

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\Gamma \frac{\delta \omega}{\delta z} \quad (63)$$

將連續方程式改寫為 $\frac{\delta \omega}{\delta z} = -\frac{d}{dt} \frac{d(\rho A)}{\rho A}$ ，代入（63）式內，得

$$\frac{d\Gamma}{dt} - \frac{d(\rho A)}{\rho A} = 0$$

積分得

$$\frac{\Gamma}{\rho A} = \text{常數}$$

但 $\Gamma = -\frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\theta}{T} (\gamma_d - \gamma)$

故 $-\frac{\theta(\gamma_d - \gamma)}{AT\rho} = \text{常數}$

再由狀態方程式，且 $R\theta$ 為常數，可得

$$\frac{\gamma_d - \gamma}{AP} = \frac{\gamma_d - \gamma_0}{A_0 P_0} \quad (64)$$

(48) \times (64)，得

$$Q(\gamma_d - \gamma) = -\frac{P}{P_0} Q_0 (\gamma_d - \gamma_0) \quad (65)$$

式中 γ_d 與 γ 各表乾絕熱降溫率與實際氣層的降溫率。

低層大氣中， p_0 在800與1000mb之間，氣壓的變化即使大至100mb，其所生的影響尚小於降溫率與旋率在計算時所生的差誤。如實用起見，（65）式可寫為

$$Q(\gamma_d - \gamma) = Q_0 (\gamma_d - \gamma_0) \quad (66)$$

由此可見：氣層在穩定的情況下 $(\gamma_d > \gamma)$ ，絕對旋率增加，降溫率亦與之俱增。

八、其他應用

21. CAVT

在某氣壓層上（例如600mb氣壓層），水平輻散為零，旋率方程式（45）略去下標 p 可寫為

$$\frac{d}{dt} (q + f) = 0 \quad (67)$$

將（11）式代入，積分得

$$KV - \frac{\partial v}{\partial n} + f = K_0 V_0 - \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_0 + f_0 \dots (68)$$

上式稱為絕對旋率不變方程式，凡空氣質點依照（68）式條件運動所成的軌跡，稱為絕對旋率不變跡線（Constant Absolute Vorticity Trajectory），簡寫為CAVT。Rossby給以四項假定，以求（68）式的解答。

(i) 沿軌跡線風的速度不變， $V = V_0$

(ii) 開始運動之點位於氣流線的轉向點（Point of Inflection）上， $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ ，即 $K = 0$ 。

(iii) 沿軌跡線附近的風切（Shear）不變，

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_0$$

(iv) 氣流呈穩定狀態，即氣流線的曲率與軌跡線的曲率相等。

由此四項假定，可將（68）式變為

$$KV = -(f - f_0) = -\beta(y - y_0) \dots (69)$$

此處 $\beta = \frac{2\omega \cos\phi}{a}$ ，在北半球恒為正值。

北半球上，假設空氣質點向北運動， $y - y_0 > 0$ ， K 為負值，此質點必到達位移最大之處，得到最大反氣旋曲率後，開始向南運動，質點經過與轉向點同緯度處後， $y - y_0$ 變為負值，曲率變為氣旋式的，此質

點向南到達位移最大之處，得到最大氣旋曲率後，又開始向北運動，如此循環不已，軌跡線便成為一波形曲線了。如圖18a,b所示

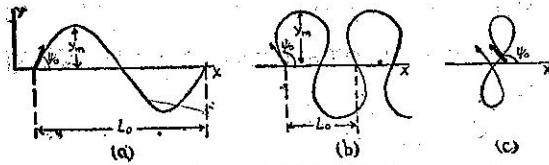


圖18：平面上的CAVT

將地面視為平面，平面曲率

$$K = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

則(69)式變為

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{\beta}{v} (y - y_0) \quad \dots (70)$$

(i) 如波幅甚小時， $\frac{dy}{dx} = 0$ ，且設 $y_0 = 0$ ，
(70)式為

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\beta}{v}$$

解此微分方程式得出

$$y = A \sin X \sqrt{\frac{\beta}{V}} \quad \dots (71)$$

式中 $A = \sqrt{\frac{C_1 V}{\beta}}$ 稱為波幅，求之如下：

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 &= \tan\phi_0 = \left(A \sqrt{\frac{\beta}{V}} \cos X \sqrt{\frac{\beta}{V}}\right)_{X=0} \\ &= A \sqrt{\frac{\beta}{V}} \end{aligned}$$

$$\text{故 } A = \tan\phi_0 = \sqrt{\frac{V}{\beta}}$$

波長為相鄰二同相(Phase)間的距離，令 $y = 0$ ，(71)式內兩相鄰橫坐標間的距離為波長

$$L = 2\pi \sqrt{\frac{V}{\beta}} \quad \dots (72)$$

(ii) 如波幅不甚小時，(70)式的解可表為
 $y - y_0 = F(x)$ (73)

此處 $F(x)$ 為一橢圓積分(Elliptic Integral)，給予某種原始條件：(1) 轉向點的風向 ψ_0 ，(2) 轉向點的緯度 ϕ_0 ，(3) 風速 v ，則(73)式具有波狀曲線的性質，即有波幅 y_m ，波長 L_0 ，週期 T 。

Platzman 求得(70)式的解為

$$y^2 = \frac{V}{\beta} \cdot 2(\cos\psi - \cos\psi_0) \quad \dots (74)$$

令 $\psi = 0$ ，則 $y = A$ ，故得波幅

$$A = \sqrt{\frac{2v(1 - \cos\psi_0)}{\beta}} \quad \dots (75)$$

在數量的觀點上，CAVT 可以敘說如下，最大波長可以(72)式表之 $L_0 = 2\pi \sqrt{\frac{V}{\beta}}$ 。當 ψ 增加時，波幅亦增加，波長則減小； $\psi_0 = 135^\circ$ 時，軌跡線成一8字形。 $\psi_0 > 135^\circ$ 時，空氣質點向西位移(見圖18C)。當(75)式內 $\psi_0 = 180^\circ$ 時，得最大波幅 $2\sqrt{\frac{V}{\beta}}$ 。再者 ψ_0 值不變，風速與緯度增大時，波長與波幅則因此而減小。

(iii) 球面上的CAVT：在此情形下，(69)式中的 K ，Platzman表為

$$K = \frac{\delta\psi}{\delta s} + \frac{\cos\psi \tan\phi}{a} \quad \dots (76)$$

式中 ψ 為軌跡線上任一點的風向， s 為弧長。合併(69)、(76)兩式，得

$$\frac{\delta\psi}{\delta s} = -\frac{\beta(y - y_0)}{v} - \frac{\cos\psi \tan\phi}{av} \quad \dots (77)$$

上式右端最後一項表地球緯度圈的曲率，在地面為視平面時此項為零。因此，已知從轉向點至最大位移的距離，在球面上的 $\delta\psi/\delta s$ 較之在平面上者，前者有較大的反氣旋值(或較小的氣旋值)。由此可知，最

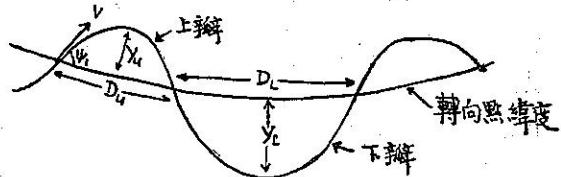


圖19：球面上的CAVT

大反氣旋(氣旋)曲率使質點到達得較早(較遲)於平面上者，這便是在球面上CAVT上瓣(Upper limb)的波長與波幅較小於下瓣(Lower limb)的原因(見圖19)。所以在球面上的軌跡線是由不相等的上半波(Half Waves)與下半波所組成的。

此等半波的性質，可以 y_u ， D_u ， y_L ， D_L 各表上下兩部分的波幅與半波長，此等值可以原始條件 ψ_0 ， ϕ_0 與 V 而決定之。美國海軍部(1952)依照原始條件製成了 y_u ， D_u ， y_L ， D_L 表格，立可查出以繪製CAVT，此表曾載於 Petterssen 著天氣分析與預報上冊(1956)附錄三。此外 Wobus 更發明了一種叫做 Wiggle Wagon 的儀器，在標準天氣圖上立可繪出(77)式所表示的CAVT，頗為便捷。

22. Rossby 長波運動方程式

若(45)式為一恰當(Exact)微分方程式，則絕對旋率在無速度幅散層(Level of Velocity Non-divergence 簡寫為 LVND)上具有保守的性質。利用 24 小時地轉風絕對旋率等值線的數值觀測，Cressman 指出 500mb 上地轉風絕對旋率 Q_g 等值線的平均運動速度僅為地轉風在此等值線法線方向分量的百分之八十。然而，在 600mb 上，旋率等值線的運動速度等於地轉風在此等值線的法線方向分量。所以，600mb 上地轉式絕對旋率沿着地轉風軌跡線具有保守性質。就地轉式絕對旋率的地轉平流而論，顯示 600mb 為無速度幅散的有效層(Effective level)。

在 600mb 無速度幅散的氣層上，(67)式展開後得

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (78)$$

因為 q 為 x, t 的函數， f 僅為 y 的函數故也。

設 u 為平均帶風(Zonal wind)，視 u 為常數，旋率(1)式可改寫為

$$q = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (79)$$

再由(71)式，可設軌跡線的方程式為

$$y = A \sin \frac{2\pi}{L}(x - ct) \quad (80)$$

式中 A 為波幅， L 為波長， c 為波速。上式按 t 取導式，得

$$V = \frac{dy}{dt} = -\frac{2\pi}{L} c \cdot A \cos \frac{2\pi}{L}(x - ct)$$

當運動開始時， $\sin \frac{2\pi}{L}(x - ct) = 0$ ，即 $\cos \frac{2\pi}{L}(x - ct) = 1$ ， $V = V_0$ ，代入上式得 $V_0 = -\frac{2\pi}{L} c A$ ，

因此

$$V = V_0 \cos \frac{2\pi}{L}(x - ct) \quad (81)$$

由(79)式得

$$q = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2\pi}{L} V_0 \sin \frac{2\pi}{L}(x - ct) \quad (82)$$

(82)式先後對 t, x 取偏導式，再將(81)式代入，得

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 c V_0 \cos \frac{2\pi}{L}(x - ct)$$

$$= \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 c V \quad (83)$$

與

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 V_0 \cos \frac{2\pi}{L}(x - ct)$$

$$= -\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 V \quad (84)$$

因 $\frac{\partial f}{\partial y} = \beta$ ，將(83,84)兩式代入(78)式內，化簡得

$$C = u - \beta \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \quad (85)$$

此即著名的 Rossby 長波運動方程式。可藉此以預報長波的運動速度。在特例當長波駐留(Stationary)時， $C=0$ ，由(85)式得出駐留波長

$$L_s = 2\pi \sqrt{\frac{u}{\beta}} \quad (72')$$

上式與(72)式完全相似。此處 $\beta = \frac{2\omega \cos \phi}{a}$ ，故知駐留波長為平均帶風與緯度的函數。由是(85)式變為

$$C = \frac{\beta}{4\pi^2} (L_s^2 - L^2)$$

由此可知，當

(i) $L < L_s$ 時 $C > 0$ ，向東運動，

(ii) $L = L_s$ 時 $C = 0$ ，駐留，

(iii) $L > L_s$ 時 $C < 0$ ，向西運動。

Petterssen 曾經導出如圖 3 正弦式等高線的波速(Wave Speed)公式。應用動力(Kinematic)原理，同樣可得極大(或極小)相對旋率中心速率 C 為

$$C = -\frac{\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t}}{\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}} \quad (86)$$

此處 x 為等高線槽

線(脊線)的法線

方向。當(86)式

應用於 $\nabla H \cdot \vec{V} = 0$

的氣層上時，(45)

)式改變為(67)

式。再設帶風剖面

對於噴射軸為近似

的對稱，如圖 20 所

示。(86)式可表如下之形式

$$C = \frac{U_{max} - \frac{\beta L^2}{4\pi^2}}{1 + \left(\frac{L}{2\pi D}\right)^2} \quad (87)$$

D 為半球噴射核心(Core)的半距(Half-width)，

此可由噴射氣流附近帶風風變的變化度量得之。事實上 Pettersson 證明拋物線帶風剖面 $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{U_{max}}{D^2}$

，在應用(87)式於 500mb 上的短波時，發現槽線速率皆較計算所得超過一度經度，脊線要超過 3 度經度。

(87)式與(85)式所表者不相一致，後者用平均帶風 $U (< U_{max})$ ，然而(85)式的分母為 1，而(87)式的分母大於 1。所以用此兩式各自計算的結果，有時可能互相一致。如果 D 值為無限大，亦即在子午線的(Meridionally)一致平均帶風上，此二結果便完全相同了。

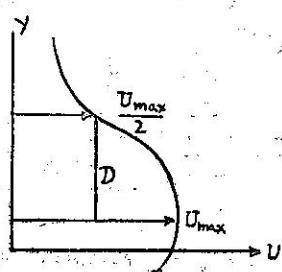


圖 20：噴射帶風剖面

23. 旋率在氣壓變化上的應用

旋率方程式(45)可用為決定在300mb上最大速度幅散面積，在簡單正弦式氣流線系統中，槽線之東脊線之西，500mb高度之上的底層，此地區質量幅散與等壓(Isobaric)幅散同時出現，如圖21所示。

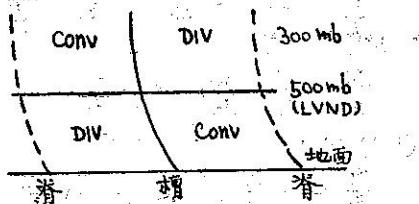


圖21：正弦式氣流線中的幅散

500mb等壓面上的趨勢方程式可寫為

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{500mb} = -\frac{1}{g\rho} \int_0^{500mb} \nabla p \cdot \vec{\nabla} \delta P - \vec{V} \cdot \nabla p Z + \omega \quad \dots \dots \dots \quad (88)$$

吾人由300mb上的等壓幅散可以決定500mb上的高度趨勢(Height Tendencies)。又因

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla_p Q \quad \dots \dots \dots \quad (89)$$

倘若300mb上的Q(或Q_g)等值線可以繪出。

在旋率場中任何特性點(Identifiable point)的動力(Kinematic)方程式為

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{C} \cdot \nabla_p Q \quad \dots \dots \dots \quad (90)$$

此處 \vec{C} 為最大(或最小)絕對旋率中心的速度。 $\frac{\partial}{\partial t}$ 表示隨最大絕對旋率中心運動的變化率。 $\frac{\partial Q}{\partial t}$ 可表絕對旋率場的強化率(Intensification Rate)。強化率

$\frac{\partial Q}{\partial t}$ 通常較 $\frac{\partial Q}{\partial t}$ 為小，所以(90)式可寫為

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \vec{C} \cdot \nabla_p Q \quad \dots \dots \dots \quad (91)$$

上式代入(89)式中，得

$$\frac{DQ}{Dt} = (\vec{V} - \vec{C}) \cdot \nabla_p Q \quad \dots \dots \dots \quad (92)$$

$\vec{V} - \vec{C}$ 為對於運動Q中心的風速，因此(92)式表示絕對旋率的個別變化可由相對軌跡線所包圍Q等值線的變率估計而得。在LVND上， $\frac{DQ}{Dt} = 0$ ，由

(92)式知相對風速($\vec{v} - \vec{c}$)平行於Q的等值線。

通常在300mb上 $V > C$ ，且常 $V \gg C$ ，因此取近似值

$$\frac{DQ}{Dt} = \vec{V} \cdot \nabla_p Q = V \frac{\partial Q}{\partial S} \quad \dots \dots \dots \quad (93)$$

(93)式中可以沿着軌跡線的變率代替沿着氣流線的變率。合併(45, 93)二式，得

$$\vec{\nabla}_p \cdot \vec{V} = -\frac{V}{Q} \frac{\partial Q}{\partial S} \quad \dots \dots \dots \quad (94)$$

此式表出幅散與沿氣流線旋率變化的關係。

上式有兩種應用：

(1) 風切無變化的波狀等高線

300mb上波狀等高線中，脊線與槽線間等壓幅散實際分佈情況如圖22所示。在脊線之東槽線之西的區域為幅合，由(94)

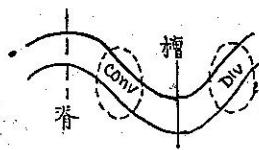


圖22：300mb上幅散的分佈

)式知 $\frac{\partial Q}{\partial t} > 0$ 。更有進者，在此區域內 $\frac{\partial q}{\partial S} > 0$ 與 $\frac{\partial f}{\partial S} < 0$ 同時出現。因為 $\frac{\partial Q}{\partial S} = \frac{\partial q}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial S}$ ，可知 $\frac{\partial d}{\partial S}$ 之值大於 $\frac{\partial f}{\partial S}$ 。在槽線之東脊線之西的區域為幅散，可以同樣討論之。一般而論，在LVND之上， $\frac{\partial Q}{\partial S}$ 與 $\frac{\partial q}{\partial S}$ 的符號相同，在LVND之下，速度幅散與速度幅合的分佈與此相反(見圖21)，亦即表示 $\frac{\partial Q}{\partial S}$ 與 $\frac{\partial f}{\partial S}$ 同樣，而與 $\frac{\partial q}{\partial S}$ 有異號。

再者，如切變項不計，旋率的自然坐標表示法為 $q = KV$ ，則在槽線與脊線之間 $V \frac{\partial q}{\partial S}$ 的平均值為

$$\overline{V} \frac{\partial q}{\partial S} = \frac{V}{S} [KV - (-KV)] = \frac{2KV^2}{S}$$

此處K為在槽線與脊線上氣流線的曲率，S為槽線與脊線間沿氣流線的弧長。由此可知相對旋率的變化與 V^2 成正比，而緯度項 $V \frac{\partial f}{\partial S}$ 乃與V成正比。因此在300mb強大的風速下，曲率項佔優勢，所以(94)式可寫為

$$\vec{\nabla}_p \cdot \vec{V} = -\frac{V}{Q} \frac{\partial q}{\partial S} \quad \dots \dots \dots \quad (95)$$

(ii) 具有水平風切變化的波狀等高線

將(95)式應用於圖23的模式中，此模式稱為氣流線等風速線模式(Streamline-isotach Mode)，

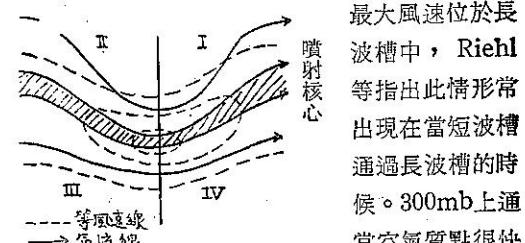


圖23：最大等風速線與長波槽重合

最大風速位於長波槽中，Riehl等指出此情形常出現在當短波槽通過長波槽的時候。300mb上通常空氣質點很快的運動通過長波槽，即屬於此種模式。此處的討論因需考慮風切，稍具繁複。按第9節的討論，風切在噴射軸之北為正，之南為負，在槽線處為最大。

氯層中，水平輻散較為微小，故可設

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial y} = 0$$

由是上式爲

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial t}(q - q_0) &= u_g \frac{\partial^2 v_T}{\partial x^2} - v_T \frac{\partial^2 v_g}{\partial x \partial y} \\
 -u_g \frac{\partial^2 u^T}{\partial x \partial y} + v_T \frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2} + v_g \frac{\partial^2 v_T}{\partial x \partial y} \\
 -u_T \frac{\partial^2 v_g}{\partial x^2} - v_g \frac{\partial^2 u_T}{\partial y^2} + u_T \frac{\partial^2 u_g}{\partial x \partial y} \\
 = \left(u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial v_T}{\partial x} - \frac{\partial u_T}{\partial y} \right) \\
 - \left(u_T \frac{\partial}{\partial x} + v_T \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \\
 = \vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}_P q_{Tj} - \vec{V}_T \cdot \vec{\nabla}_P q_g
 \end{aligned}$$

令 $\vec{V}_g = \vec{V}_0$, $q_g = q_0$, 各代表下層的地轉風與旋率。

再因熱風 $\vec{V}_T = \vec{V} - \vec{V}_0$, 热風旋率 $q_T = q - q_0$ 。故

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial t} (q - q_0) &= \vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla}_P q_T - \vec{V}_T \cdot \vec{\nabla}_P q_0 \\
 &= (\vec{V} - \vec{V}_T) \cdot \vec{\nabla}_P q - \vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla}_P q_0 \\
 -\vec{V}_T \cdot \vec{\nabla}_P q_0 &= \vec{V} \cdot \vec{\nabla}_P q - \vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla}_P q_0 \\
 -\vec{V}_T \cdot \vec{\nabla}_P (q + q_0)
 \end{aligned}$$

上式代入(98)式內，且視方程式右端中中 \bar{V} 與 V_0 為地轉風，得

$$\vec{\nabla}_P \cdot (\vec{V} - \vec{V}_0) = -\frac{1}{f} \vec{V}_T \cdot \vec{\nabla}_P (q + q_0 + f) \\ = -\frac{1}{f} V_T \frac{\partial}{\partial S} (q + q_0 + f) \dots\dots\dots(103)$$

此處 $\vec{V}_T = \vec{V}_g - \vec{V}_{g0}$ 為 1000mb 至 500mb 氣層間的
熱風， S 為與熱風同向沿着厚度線的弧長。

其次，令 $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_T$ ，此處 $\mathbf{q}_T = -\frac{\mathbf{g}}{f} \nabla_T^2 h$ ，稱為熱風旋率，因此 (103) 式可寫為

$$\vec{\nabla}_P \cdot (\vec{V} - \vec{V}_0) = -\frac{2}{f} V_T \frac{\partial q_0}{\partial S} - \frac{V_T}{f} \frac{\partial q_T}{\partial S} - \frac{V_T}{f} \frac{\partial f}{\partial S} \quad \dots \dots \dots (104)$$

上式右端第一項稱爲熱導項，第二項爲熱旋效應，第三項爲緯度效應。

若將上式的結果應用在 1000mb 至 500mb 的氣層上，在 500mb 層上 $\vec{\nabla}_P \cdot \vec{V} = 0$ ，因此 $\vec{\nabla}_P \cdot (\vec{V} - \vec{V}_0) = -\vec{\nabla}_P \cdot \vec{V}_0$ ，即謂相對幅散就是低層的幅合。在多數氣旋形成的情形中，此可指示高層為幅散。更有進者，低層幅合促使形成氣旋式的旋率，因此 (104) 式可用為指出氣旋的發展。此種情形可同樣應用在反氣旋的形成上。

(104) 式右端諸項逐次討論於下：

(i) 热導項(Thermal Steering Term)地面氣旋(反氣旋)通常は最大(最小)相對旋率 q_0 之處，在 q_0 極大或極小之處， $\frac{\partial q_0}{\partial S} = 0$ ，此項消失。然而，氣旋的前方，通常熱風吹向 q_0 的降低值處 (Decreasing Values)，故有相對幅散。氣旋的後方，熱導項使之為相對幅合。因此氣壓系統係沿着厚度線而進行，特別在早期此種系統尚在形成之時為最顯著。

(ii) 熱旋效應 (Thermal-Vorticity Effect)

此項的形式與(95)式相似。可與23節同樣分析討論之：當在氣旋時，通常驅使冷空氣在其西邊，暖空氣在其東邊，因此在等溫場中的槽脊型式的發展與圖23所示者相同。如果圖23上的等高線以1000mb至500mb間的厚度線代之，I區相當於沿着熱風進行的溫度旋率(Thermal Vorticity)的最大降低處，因為熱旋效應，此區為最大幅散區。因此造成一溫度槽(Thermal Trough)的前部，適合於氣旋的發展。同樣，II區因為熱旋效應為最大輻合的區域。

(iii) 第三項代表溫度旋率變化型式(見23節)中的緯度效應，與第二項的符號相反，但在加強系統的情況下，其大小較第二項為小，故不予以討論。

参 考 文 献

1. 巖夢輝：渦率觀念及其在天氣學上之推廣應用
氣象學報四卷一期(47年3月)
 2. 廖學鎰：厚度圖對於天氣分析和預報之應用。
氣象學報五卷四期(48年12月)
 3. 袁燕福：水平幅散及其與等壓線型式的關係。
氣象學報七卷二期(50年6月)
 4. 巖夢輝：高空預報學，空軍訓練司令部出版(44年9月)
 5. Holmboe, Forsythe, Guistin: Dynamic Meteorology (1945) pp295-336
 6. Haltiner, Martin: Dynamical and Physical Meteorology (1957) pp 342-365
 7. S. Petterssen: Weather Analysis and Forecasting Volume I (1956) pp123-137
 8. H. Riehl: Tropical Meteorology (1954) pp 193-209
 9. Hewson, Longley: Meteorology Theoretical and Applied (1944) pp 135-139
 10. H. Panofsky: Introduction to Dynamical Meteorology (1956) pp108-124
 11. W. J. Saneier: Principles of Meteorological Analysis (1955) pp340-349