

水平輻散及其與等壓線型式的關係 章燕禧

Horizontal Divergence and Its Relationship to Isobar Patterns

Y. S. Wei.

Abstract

The horizontal divergence is the rate of areal expansion per horizontal unit area of a fictitious element moving with the horizontal components of the motion. If the motion is strictly horizontal, the horizontal divergence is represented by the rate of areal expansion of the real fluid element per unit area.

If the area increases with time, it is called divergence, conversely, if the area decreases with time, it is then called convergence. Convergence is negative value of divergence, so that both divergence and convergence are simply called divergence.

The content of this paper states as following: We first give the definition of divergence and its expressions in various coordinate systems, the divergence in the wind fields and some effects of divergence. Next, we research the relationship between the divergences and isobaric patterns, for example, the divergence in the wave shaped isobaric patterns as well as in the circular isobaric patterns. Finally we study the vertical distribution of divergence in the air.

一、前言

水平輻散就是水平的單位面積上流體在水平方向運動的膨脹率。如果運動為嚴格的水平，水平輻散可以單位面積上流體的面積膨脹率表示之。面積按時間增大稱為輻散 (Divergence)，反之，面積按時間而減小則稱為輻合 (Convergence)，輻合是輻散的負值，所以輻散與輻合二者可總之為輻散。本文的內容：首先給出輻散的定義及其在各種坐標系統的表示法，在風場 (Wind fields) 中的輻散輻合，輻散的各種效應 (Effect)；其次探討輻散與各種等壓線型式的關係，例如，波狀等壓線型式中的輻散，圓形等壓線型式中的輻散；最後再研究輻散在大氣中的垂直分佈情形。

二、輻散與輻合

1. 輻散的定義及其在各種坐標系統中的表示法

a. 直角坐標 (Rectangular coordinate) 表示法

輻散的定義一般以向量形式為之：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

$$\text{式中 } \vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{V} = \vec{i} u + \vec{j} v + \vec{k} w$$

$$\text{因此 } \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \dots \dots \dots (1)$$

如果僅考慮其在水平方面的分量，則水平輻散為

$$\vec{\nabla}_H \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{式中 } \vec{\nabla}_H = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}, \vec{V} = \vec{i} u + \vec{j} v$$

輻散亦可定義為 $\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V}$ ，同樣可得

$$\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \dots \dots (3)$$

$$\text{或 } \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (4)$$

在不可壓縮的流體中， ρ 為常數，則

$$\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (5)$$

如僅考慮其在水平方面的分量，則

$$\vec{\nabla}_H \cdot \rho \vec{V} = \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \dots (6)$$

$$\text{或 } \vec{\nabla}_H \cdot \rho \vec{V} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \dots \dots \dots (7)$$

此處假定 ρ 不變。為區別此二種輻散起見，前者 (1, 2) 兩式所表示者，稱為速度輻散 (Velocity Divergence)，後者 (3, 4, 5, 6, 7) 諸式所表示

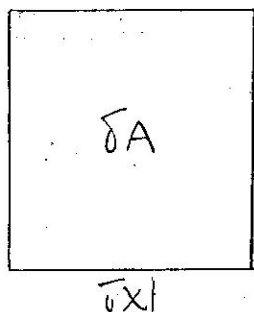


圖 1：輻散中的微面積

$$\delta A = \delta x \delta y$$

上式取對數，再微分得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta A} \frac{d\delta A}{dt} &= \frac{1}{\delta x} \frac{d\delta x}{dt} + \frac{1}{\delta y} \frac{d\delta y}{dt} \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

上式取極限，則

$$\frac{1}{\delta A} \frac{d\delta A}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

將此式與 (2) 式比較，知輻散就是水平單位面積的膨脹率。

b. 球面極坐標 (Spherical polar coordinate)

表示法 在球面上，單位向量 $\vec{i}$ 與 $\vec{j}$ 的大小不變，其方向則隨運動而改變，故為變量 (Variable)。按此由 (2) 式得

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_H \cdot \vec{V} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\vec{i}u + \vec{j}v \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \vec{i} \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial x} \dots \dots (8) \end{aligned}$$

因 $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ ，而 $\vec{i}$ 與 $\frac{\partial \vec{i}}{\partial x}$ ， $\vec{j}$ 與 $\frac{\partial \vec{j}}{\partial y}$ 互相垂直之故也。但由圖 2 可知

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{j}}{\Delta x} = -\vec{i} \frac{\tan \phi}{a} \dots \dots (9)$$

將 (9) 式代入 (8) 式內，得出輻散在球面極坐標中的表示法為

$$\vec{\nabla}_H \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{a} \tan \phi \dots \dots (10)$$

在北半球上 ϕ 為正，將此式與 (2) 式比較之可知：如空氣質點向北運動 ($V > 0$)，考慮地球曲率 (Curvature) 所得的輻散較在將地面視為平面所得者為小；反之，如向南運動，則較大，此實因兩經度間的緯距 (Latitudinal Distance) 在北者較在南者為

者，稱為質量輻散。(Mass Divergence) 無論速度輻散或質量輻散，都可分做垂直方向與水平方向的分量。下文所說的輻散，乃專指水平輻散而言。

設微面積 (Area Elements)

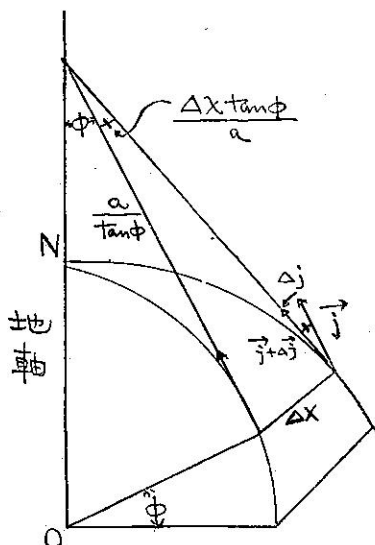


圖 2：j 按經度的變化

標 (Natural Coordinate) 表示法 通常以 s 表示一曲線的切線方向， $\vec{n}$ 為法線 (Normal) 方向， $\vec{t}$ 為切線方向的單位向量， $\vec{n}$ 則為法線方向的單位向量， $\vec{t}$ 與 $\vec{n}$ 亦為變量，如是

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_H \cdot \vec{V} &= \left(\vec{t} \frac{\partial}{\partial s} + \vec{n} \frac{\partial}{\partial n} \right) \cdot \left(\vec{t}v \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial s} + \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{t}}{\partial n} \end{aligned}$$

因 $\vec{t} \cdot \vec{t} = 1$ ， $\vec{n} \cdot \vec{t} = 0$ ， $\vec{t}$ 與 $\frac{\partial \vec{t}}{\partial s}$ 互相垂直故也。

但 $\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{t}}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial n}$ ， ψ 為二相鄰切線間的夾角，故得

$$\vec{\nabla}_H \cdot \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial \psi}{\partial n} \dots \dots (11)$$

(11) 式中右端第一項 $\frac{\partial v}{\partial s}$ 稱為經度的輻散 (Longitudinal Divergence)，簡寫為 LD，第二項 $v \frac{\partial \psi}{\partial n}$ 稱為橫側的輻散 (Transversal Divergence)，簡寫為 TD，故知全部輻散等於 LD 與 TD 之和。

2. 風場中的輻散幅合

圖 3 中虛線表示等風速線 (Isotachs)，方向線表示風向，(A) 圖表 LD，(B) 圖表 LC (經度的幅合)，(c) 圖表 TD，(D) 圖表 TC (橫側的幅合)。

(E) 圖表經度的與橫側的皆為輻散，故為輻散。(H) 圖表二者皆為幅合，故為幅合。(F) 與 (G)

小之故也。在南半球的情形可同樣討論之。但 (10) 式右端 $\frac{v}{a} \tan \phi$ 項，通常較為微小，如討論的輻散區域不過大，可予忽略不計，故知球面上的輻散可以平面上者代替之。

c. 自然坐

標 (Natural

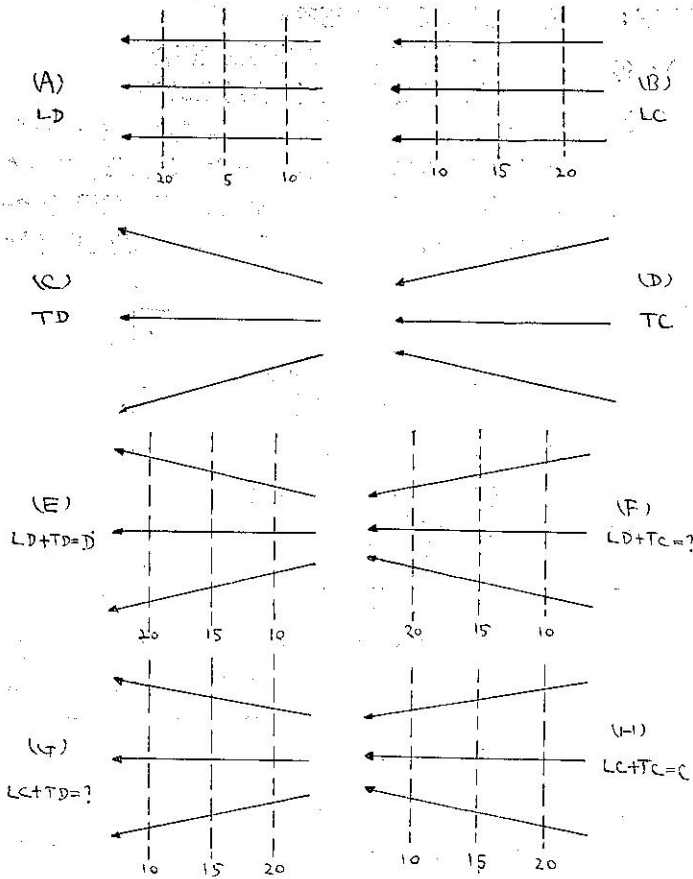


圖 3：風場中的輻散輻合

二圖，經度的與橫側的一為輻合一為輻散，二者之和究為輻合或輻散，須視當時的情況，衡量二者孰大孰小而決定。

3. 與輻散輻合有關的各種效應

為以後討論方便起見，分摩擦效應，加速度效應，緯度效應與曲率效應四種效應，其與輻散輻合的關係列述於後：

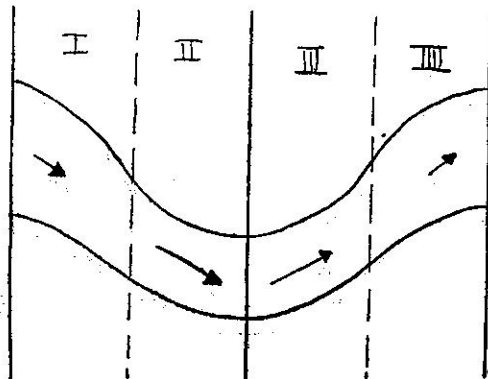


圖 4：波狀等壓線中的緯度效應

a. 摩擦效應 因為地面摩擦的影響，風向並不沿着等壓線吹刮，而與等壓線交於某一角度，角度的大小視地面的粗糙程度而定。在氣旋中，風向向內偏折，故有 TC 出現，同樣，在反氣旋中有 TD 出現。

b. 加速度效應 如空氣質點作加速運動，在該區域則有 LD 出現，如第三圖(A)所示。反之，如減速運動，則有 LC 出現，如第三圖(B)所示。同時，加速運動時，空氣質點橫越等壓線向低壓方向吹刮，則在低壓區域有 TC 出現，在變壓區域有 TD 出現，例如次梯度風(Subgradient-wind)；反之，減速運動時，空氣質點橫越等壓線向高壓方向吹刮，則在低壓區域有 TD 出現，在高壓區域有 TC 出現，例如超梯度風(Superrgradient wind)。

c. 緯度效應 分兩種情形：

(i) 直線等壓線中的緯度效應

為討論簡單起見，設等壓線或南北走向，比等情況，空氣質點運動為地轉風形式，地轉風方程式

$$2\omega \sin \phi V_g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \dots (12)$$

上式右端視為常數，對 ϕ 取微分，得

$$\frac{\partial v}{\partial \phi} = -V \cot \phi \dots (13)$$

故知在北半球空氣質點向北運動，風速隨緯度的增加而減小。故向北運動，該區域有 LC 出現。反之，向南運動則有 LD 出現。

(ii) 波狀等壓線中的緯度效應 圖 4 表一波狀等壓線型式，實線為槽線，斷線為脊線，虛線則為經過波狀等壓線轉向點 (Inflectional point) 的直線。I, III 兩區曲線成反氣旋式曲度 ($K < 0$)；II, IV 兩區成氣旋式曲度 ($K > 0$)，由梯度風方程式

$$KV^2 + 2\omega \sin \phi V = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \dots (14)$$

視上式右端為常數，將上式中之 v 按 ϕ 取微分，得

$$\frac{dv}{d\phi} = -\frac{\omega \cos \phi v}{kv + \omega \sin \phi} \dots (15)$$

在 II, IV 兩區內 $K > 0$ ，(15) 式右端分子分母中諸項皆為正，故 $\frac{dv}{d\phi} < 0$ ，風速 (v) 向南漸增，向北漸減。

在 I, III 兩區反氣旋式的曲度中 $K < 0$ ，(15)

式內右端分母 $kv + \omega \sin\phi$ 爲正或爲負，討論如下：

將(12)代入(14)內消去梯度項 $(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n})$ ，得

$$kv^2 + 2\omega \sin\phi V = 2\omega \sin\phi V_g \dots\dots\dots (16)$$

解此 v 的二次方程式，得

$$V = \frac{\omega \sin\phi - \sqrt{(\omega \sin\phi)^2 + 2\omega \sin\phi V_g k}}{(-k)} \quad (-k > 0)$$

根號前取負號，因此方程式須滿足當梯度 $(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n})$ 爲零，風速 (v) 亦爲零的條件故也。當根號內的數值爲零，得出在反氣旋內的最大風速 V_{max}

$$KV_{max} + \omega \sin\phi = 0$$

故得 (15) 式右端分母

$$KV + \omega \sin\phi = -K(V_{max} - V) > 0 \quad \text{恒爲正}$$

故在 I，III 兩區中，風速亦有向南漸增，向北漸減的同樣情形。

由此可知，在槽線之東脊線之西的區域中有 LC 出現；同樣，在槽線之西脊線之東的區域中，有 LD 出現。

d 曲率效應 設 $f = 2\omega \sin\phi$ ，(16) 式改寫爲

$$V = V_g - \frac{kv^2}{f} \dots\dots\dots (17)$$

在氣旋中 $K > 0$ ，得出 $V_0 < V_g$ ；反氣旋中 $K < 0$ ，得出 $V_a > V_g$ ，故知 $V_0 < V_g < V_a$

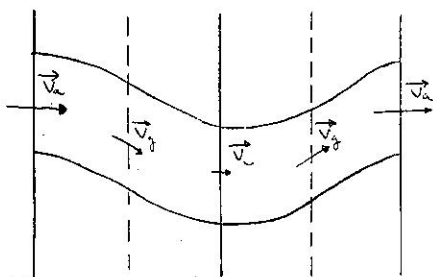


圖 5：波狀等壓線中的曲率效應

由圖 5 可知在槽線之東脊線之西的區域內，有 LD 出現；同樣，在槽線之西脊線之東的區域內，有 LC 出現。

此情形與本節 (c) 之 (ii) 所討論的緯度效應剛剛相反。在此等波狀等壓線型式中某一區域究竟爲輻合或輻散，緯度效應佔優勢或曲率效應佔優勢？待後討論。

三、輻散輻合與等壓線型式的關係

茲將等壓線型式分爲兩類：波狀等壓線與圓形等壓線，波狀等壓線中含有槽線與脊線，圓形等壓線則

有氣旋式與反氣旋式兩種。

4. 波狀等壓線型式中的輻散輻合

a. 經度的質量輻散 (簡寫爲 LMD)

爲簡單起見，在波狀等壓線型式中截取一塊面積，此面積介於二等壓線 p 與 $p - \delta p$ ，槽線 B 與脊線 A 之間 (如圖 6 所示)，此種面積稱爲等壓線溝 (Isobaric Channel)，設槽線上二等壓線間的寬度爲 δn

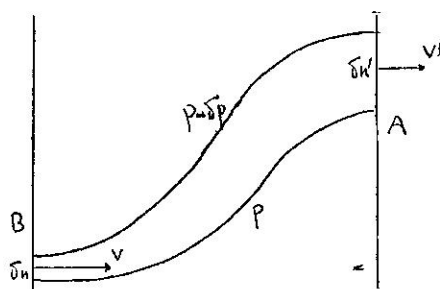


圖 6：等壓線溝中經度的質量輻散

，空氣密度爲 ρ ，速度爲 v ，此高度層至大氣頂間的厚度爲 δz ，則大氣每秒間流過截面積 $\delta n \delta z$ 間的質量，稱爲輸送量 (Transport Capacity) 者，爲

$$\delta F = \rho v \delta n \delta z$$

梯度風方程式 (14) 改寫爲

$$kv^2 + fv = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \dots\dots\dots (14')$$

因 $\delta p > 0$ ，此式右端應取正號，故

$$\delta F = \frac{\delta p \delta z}{kv + f}$$

脊線上諸量以撇號 (Prime) 表之，同樣可得

$$\delta F' = \frac{\delta p \delta z}{k'v' + f'}$$

由是經度的質量輻散

$$LMD = \delta F' - \delta F = \frac{\delta p \delta z}{(kv + f)(k'v' + f')} - \frac{\delta p \delta z}{(kv - k'v') - (f' - f)} \dots\dots\dots (18)$$

故 $LMD \geq 0$ ，端視 $(kv - k'v') - (f' - f) \geq 0$ 而定。前項 $kv - k'v'$ 稱爲曲率效應，後項 $f' - f$ 稱爲緯度效應。

至此立可解釋第三節中所討論的在波狀等壓線型式中緯度效應與曲率效應互相消長的情況。(18) 式中緯度效應 $-(f' - f)$ 之值恒爲負，其隨高度的變化甚爲微小，如曲率效應不予考慮，則在槽線之東脊線之西的區域內可得出 LMC；在曲率效應中，可設 $k = -k' > 0$ ，則 $kv - k'v' = k(v + v')$ ，其值恒爲正，又西風速度 $v + v'$ 隨高度而增加，故知在低層中，可能 $kv - k'v' < f' - f$ ，由 (18) 式知此處 $LMD < 0$ ，即出現 LMC；繼續上升到達某高度， $kv - k'v' =$

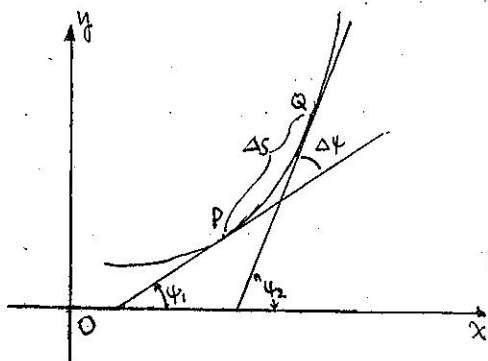


圖 7：曲率的表示法

$f' - f$ ，彼處 $LMD = 0$ ；再繼續上升， $kv - k'v' > f' - f$ ，彼處 $LMD > 0$ ，即出現 LMD 。

茲再詳細討論如下：

(i) 曲率 曲線上附近兩點 P, Q 間的平均曲率（見圖 7）就是過這兩點兩切線的交角 $\Delta\psi$ 與 PQ 間弧長 Δs 之比，當 Q 儘量接近於 P 時，得曲線在 P 點的曲率

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \frac{d\psi}{ds} \quad (19)$$

又因 $\psi = \arctan \frac{dy}{dx}$ ，將其對 x 微分，及 $ds^2 = dx^2 + dy^2$ （圖 7 右圖），代入（19）式內可得曲率的直角坐標表示法

$$K = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (20)$$

(ii) Blaton 方程式 此方程式表出氣流線（Streamline）曲率與軌跡線（Trajectory）曲率間的關係，因為風向

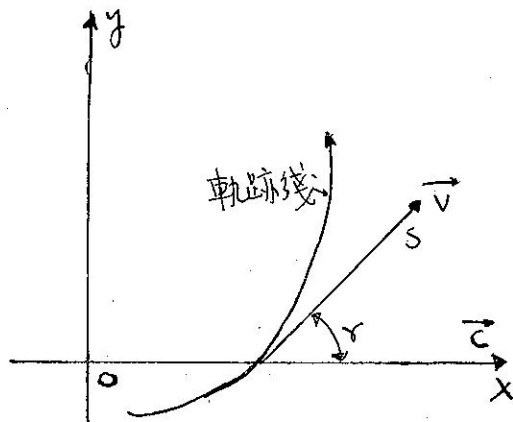


圖 8：軌跡線的方向

$$\psi = \psi(t, x, y)$$

對 t 取微分

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial\psi}{\partial t} + u \frac{\partial\psi}{\partial x} + v \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\psi \quad (21) \end{aligned}$$

$$\text{但 } \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{ds} \frac{ds}{dt} = Kv \quad (22)$$

此處 K 為軌跡線的曲率。

在槽線或脊線上，風向恒為西風，即

$$\psi = \text{常數}, \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \text{ 由是 (21) 式變為}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\vec{C} \cdot \vec{\nabla}\psi \quad (23)$$

式中 $\vec{C}$ 為槽線或脊線移動的速度。

將（22，23）兩式代入（21）式內，得

$$Kv = \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\psi - \vec{C} \cdot \vec{\nabla}\psi$$

設 $\vec{v}$ 與 $\vec{c}$ 間的夾角為 γ ，考慮上式中諸向量在 s 方向的分量，上式可寫為：

$$Kv = V \frac{\partial\psi}{\partial s} - C \cos\gamma \frac{\partial\psi}{\partial s}$$

但 $\frac{\partial\psi}{\partial s} = K_s$ 為氣流線的曲率，故得

$$K = K_s \left(1 - \frac{C \cos\gamma}{V}\right) \quad (24)$$

此乃 Blaton 方程式。

茲可考慮（18）式中的曲率效應：在槽線或脊線上 $\vec{v}$ 與 $\vec{c}$ 的方向一致，即 $\gamma = 0$ ，（24）式變為

$$Kv = K_s (v - c) \quad (25)$$

與 $K'V' = K'_s (v' - c)$

如果在某高度層上無輻散， $LMD = 0$ ，則由（18）式可知

$$kv + f = k'v' + f' \quad (26)$$

此式稱為絕對旋率不變（Constant Absolute Vorticity）定理。凡空氣質點運動滿足（26）式者的軌跡線，稱為絕對旋率不變的軌跡線，簡寫為 $CAVT$ 。

取質點開始運動時的原點在轉向點上，其時 $K = 0$ ，（26）式變為

$$K'V' = -(f' - f) \quad (27)$$

再者，Rossby 參數

$$\beta = \frac{df}{dy}$$

此處 $\beta = 2\omega \cos\phi \frac{d\phi}{dy} = \frac{2\omega \cos\phi}{a}$ ， a 為地球半徑，

β 為 ϕ 的函數。空氣質點運動時，取 β 的平均值，故可視 β 為常數，則由上式可得出

$$f' - f = \beta y \dots \dots \dots (28)$$

如質點運動的波幅 (Amplitude) 不甚大時， $\frac{dy}{dx} = 0$ ，將 (20) 及 (28) 式代入 (27) 式內，得出 CAVT 的微分方程式為

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\beta}{v} y$$

視 β ， v 為常數，解此微分方程式得出 CAVT 的解為正弦曲線

$$y = \sqrt{\frac{C_1 v}{\beta}} \sin \sqrt{\frac{\beta}{v}} (x + c_2)$$

式中 c_1 ， c_2 為積分常數，故可設空氣質點在氣壓線溝內的運動方程式為

$$y = A \sin \frac{2\pi}{L} (x - ct) \dots \dots \dots (29)$$

式中 A 為波幅， L 為波長， c 為波速，即槽線或脊線移動的速度，將 (29) 式對 x 取微分

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2\pi}{L} A \cos \frac{2\pi}{L} (x - ct) \dots \dots \dots (30)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 A \sin \frac{2\pi}{L} (x - ct) \dots \dots \dots (31)$$

在槽線或脊線上

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (32)$$

$$\text{即 } \cos \frac{2\pi}{L} (x - ct) = 0$$

則在槽線上 $\sin \frac{2\pi}{L} (x - ct) = -1$ ，(31) 式為

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 A \dots \dots \dots (33)$$

在脊線上， $\sin \frac{2\pi}{L} (x - ct) = 1$ ，(31) 式為

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 A \dots \dots \dots (34)$$

由曲率公式 (20) 及 (32, 33, 34) 諸式得

$$K_s = -K_s' = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 A \dots \dots \dots (35)$$

將 (25) 內兩式相減，再將 (35) 式代入，得出 (18) 式中的曲率項為

$$KV - K'V' = 2K_s (\bar{v} - C) \dots \dots \dots (36)$$

式中 $\bar{v} = \frac{1}{2}(v + v')$ ，稱為平均帶風 (Mean Zonal Wind)。

其次，與 (28) 式同樣可得出

$$f' - f = 2A\beta$$

再將 (35) 式代入得

$$f' - f = 2K_s \beta \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \dots \dots \dots (37)$$

於是，可將 (36, 37) 兩式代入 (18) 式內，得

$$LMD = N \left[\bar{v} - C - \beta \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \right] \dots \dots \dots (38)$$

式中 $N = \frac{2\delta p \delta z K_s}{(kv + f)(k'v' + f')}$ 恒為正數 (Positive)。

故知欲使 $LMD \equiv 0$ ，端視 $\bar{v} - C - \beta \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \equiv 0$ 而定。

求得某一氣層 (Level) 上，無經度的質量輻散，彼處 $LMD = 0$ ，此層稱為無經度的質量輻散層，(Level of Longitudinal Mass Nondivergence) 簡寫為 LLMND。其高度大概在 600mb 上下，由 (38) 式知彼處滿足下式

$$C = \bar{v} - \beta \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \dots \dots \dots (39)$$

此乃著名的 Rossby 長波運動方程式。可藉此以預報長波的運動速度。在特例當長波駐留 (Stationary) 時， $C = 0$ ，由 (39) 式得出駐留波長

$$L_s = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{v}}{\beta}} \dots \dots \dots (40)$$

此處 $\beta = \frac{2\omega \cos \phi}{a}$ ，故知駐留波長為平均帶風與緯度的函數，由是 (39) 式變為

$$C = \frac{\beta}{4\pi^2} (L_s^2 - L^2) \dots \dots \dots (41)$$

由此可知，當

- (i) $L < L_s$ 時， $C > 0$ 向東運動，
- (ii) $L = L_s$ 時， $C = 0$ ，駐留，
- (iii) $L > L_s$ 時， $C < 0$ ，向西運動。

此外，設 $\beta \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = V_0$ ，稱為臨界風速 (Critical Velocity)，在 LLMND 上的平均帶風為 $\bar{v}_0$ ，由經驗知 C 與 V_0 隨高度的改變甚微，較之 $\bar{v}$ 的變化，此二者的變化可予忽略，因此 (39) 式為

$$\bar{v}_0 = C + V_0$$

可代入 (38) 式內，得

$$LMD = N (\bar{v} - \bar{v}_0) \dots \dots \dots (41)$$

在對流層內，平均帶風隨高度的增高而增大，故由 (41) 式知

- (i) 低於 LLMND 之處， $\bar{v} < \bar{v}_0$ ， $LMD < 0$ ，輻合；
- (ii) 在 LLMND 上， $\bar{v} = \bar{v}_0$ ， $LMD = 0$ ，無

- 輻散；
(iii) 高於LLMND之處， $\bar{V} > \bar{V}_0$ ， $LMD > 0$ ，輻散。

以上的討論，為在槽線之東脊線之西的區域內情形。同理，可求得在槽線之西脊線之東的區域內，輻散輻合的情形恰恰與此相反。茲以垂直剖面圖（圖9）表示各區域內輻散輻合的分佈情形，此等分佈情形，稱為丁氏補償（Dine's Compensation）。

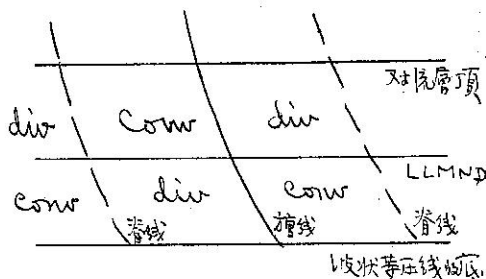


圖9：丁氏補償

b. 橫側的質量輻散（簡寫為 TMD）

在中緯度地帶，波狀等壓線的曲率，在中間部分為最大，然後逐次向南向北兩邊扁平，其分佈情形，約如圖10所示，所謂 TMD 就僅考慮空氣質點橫越等壓線運動的情況，茲先假定此型式靜止， $C=0$ ，則因氣壓梯度隨處而異，空氣質點從氣壓梯度較大之

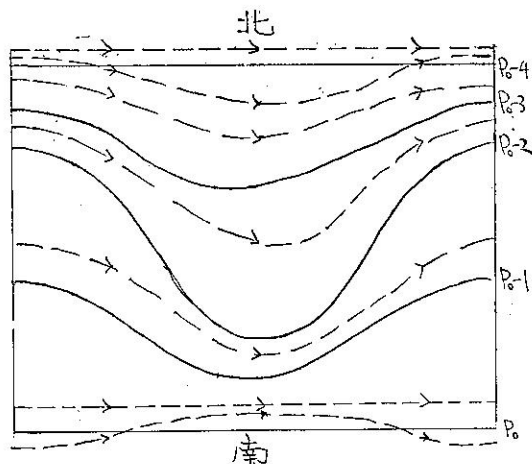


圖10：波狀等壓線型式中的TMD
（實線表等壓線，虛線表軌跡線）

處吹至較小之處，風速漸減，稱為超梯度風，有橫越等壓線吹向高壓的趨向。反之，為次梯度風，空氣質點向低壓方向吹刮，因此，如圖10所示，在槽線之東脊線之西的區域，有 TMD 出現。同理，在槽線之

西脊線之東的區域，有 TMC 出現。當風速 $V > C$ 時，亦可適合此規則，因為相對帶風(Relative Zonal Wind) $V - C > 0$ 之故也。

反之，若 $V - C < 0$ 時，則風向逆流。因此，在槽線之東脊線之西的區域，有 TMC 出現，在槽線之西脊線之東的區域，有 TMD 出現。

當 $V - C = 0$ 時，相對帶風為零，則整個區域 $TMD = 0$ 。

c. 全部的質量輻散

由第(11)式可知全部的質量輻散(MD)為LMD與TMD二者的總和，茲綜合本節a, b二部的討論，得出下列結論：

(i) $\bar{V} - C > V_0$ 相對帶風為西風而大於臨界風速，在槽線之東脊線之西的區域，二者皆為輻散，即 LMD 與 TMD 同時出現；在槽線之西脊線之東的區域，二者皆為輻合，即 LMC 與 TMC 同時出現。

(ii) $\bar{V} - C < 0$ 相對帶風為東風，在槽線之東脊線之西的區域，二者皆為輻合，即 LMC 與 TMC 同時出現。在他一區域，二者皆為輻散，即 LMD 與 TMD 同時出現。

(iii) $V_0 > \bar{V} - C > 0$ 相對帶風為西風而小於臨界風速。槽線之東脊線之西的區域為 LMC 與 TMD；他一區域則為 LMD 與 TMC。全部的質量輻散為二者之差，所以總有某一高度層，其相對帶風的某值小於臨界風速而大於零，彼處的 LMD 恰可與 TMC 平衡，則其全部質量輻散為零，此氣層稱為無質量輻散層 (Level of Mass Nondivergence)，簡寫為 LMND，由此可知 LMND 的高度較之 LLMND 為低。

5. 圓形等壓線型式中的輻散輻合

a. 徑度的質量輻散 (LMD)

如果空氣質點在穩定的情形下運動，氣流線可以等壓線代替之，軌跡線亦幾乎與氣流線重合，即空氣質點沿氣流線運動。茲以氣旋型式為例，因為圓周的曲率不變，氣旋式等壓線的曲率為正的常數，故空氣質點在氣旋中運動時，曲率效應幾可忽略不計，由(15)式知風速隨緯度的增加而減小，由(圖11)知 $V > V'$ ，如果等壓線成同心圓，則氣旋的右半邊出現 LMC，左半邊出現 LMD，反氣旋中的情形恰與此相反。

茲詳細討論如下：

考慮氣旋右半邊的輻散輻合情形，與上章同樣的討論，此處 Blaton 方程式 (25) 改寫為：

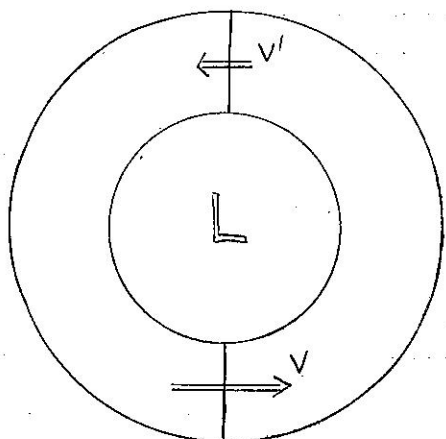


圖11: 氣旋中的 LMD

$$\begin{aligned} KV &= K_s (v - c) \\ K'V' &= K_s (v' + c) \end{aligned} \quad (25')$$

因在氣旋中 $K_s' = K_s$ ，且在北端 v' 的方向與 c 恰相反。

緯度效應改寫為

$$f' - f = 2R\beta = 2 \frac{\beta}{K_s} \quad (37')$$

因 $2R$ 為氣旋的直徑，即最南端與最北端的距離，及

$$K_s = \frac{1}{R} \text{ 故也。}$$

將 (25', 37') 代入 (18) 式內，得

$$LMD = N' [v - v' - c - 2\beta R^2] \quad (38')$$

式中 $N' = \frac{\delta p \delta z K_s}{(kv + f)(Kv' + f')}$ 恒為正數，

故知欲使 $LMD = 0$ ，端視 $v' - v - 2c - 2\beta R^2 = 0$ 而定，在特例

$$v - v' - 2c - 2\beta R^2 = 0$$

則 $LMD = 0$ ，此時稱為臨界偏心率 (Critical Eccentricity)，如 (12) 圖 b 所示。

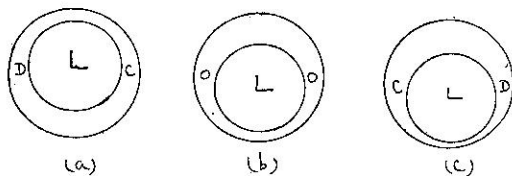


圖12: 氣旋中等壓線的分佈與輻散輻合

(a) 圖表偏心率較臨界情形為小，表示右邊為 LMC 左邊為 LMD；此乃正常情況；(c) 圖表偏心率較臨界情形為大，表示右邊為 LMD，左邊為 LMC，乃罕見的情況。故就一般而論，氣旋中的等壓線不過分向南偏折，氣旋的右半邊為 LMC，而左半邊為 LMD，如果此等情況一直保持至大氣層頂部，則氣

旋向西運動，此與一般以常識判斷者恰恰相反。

b. 橫側的質量輻散(TMD)

因為緯度效應，氣旋的右半邊，空氣質點向北運動的速度漸減，故為超梯度風，有越過等壓線向外吹刮的趨勢，故氣旋右半邊有 TMD 出現；同理，左半邊有 TMC 出現，但由經驗知其量甚微，與 LMD 比較，TMD 可以忽去不計，故全部質量輻散可以 LMD 代表之。

再者，考慮空氣質點在氣旋內運動軌跡線曲率變化的情形，亦可得出 TMD 的分布情況。前已假定氣流線可以等壓線代替之，按 Blaton 方程式 (24)，分為五種情況討論如下：

(i) $C = 0$ 氣旋靜止， C 為氣旋向東運動的速度，不論風速 V 的大小向如何， $K = K_s$ ，軌跡線始終與等壓線重合，風沿等壓線吹刮，在此情況下， $TMD = 0$ 。

(ii) $V > C > 0$ 氣旋向東運動且風速大於氣旋速度，由圖13 (a)， C 與 V 的交角 γ 在各象限內的變化範圍及 (24) 式，可以得出 K 的分布情況如圖 14 (a) 所示，在南半部 $K < K_s$ ，風向等壓線的外方吹

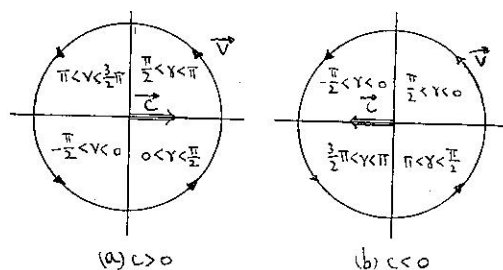


圖13: γ 在各象限內變化的範圍

刮，故有 $TMD =$ 出現；同樣，在北半部有 TMC 出現。如就東半部或西半部而論，則 $TMD = 0$ ，所以 TMD 可予忽略，全部輻散可以 LMD 代表之。再詳細研究：合併 LMD 與 TMD 二者，在東北部有最大的輻合，西南都有最大的輻散，東南部有較小的輻合，西北部有較小的輻散，因為假定 TMD 之量始終小於 LMD 故也。

(iii) $V > -C > 0$ 氣旋向西運動且風速大於氣旋速度，與 (ii) 同樣討論，用 (24) 式與圖13 (b) 可得出圖14 (b)，可知在南半部有 TMC 出現，北半部有 LMD 出現；合併 LMD 與 TMD 二者，東南部有最大的輻合，西北部有最大的輻散，西南部有較小的輻散，東北部有較小的輻合。

(iv) $C > V > 0$ 氣旋向東運動且風速小於氣旋

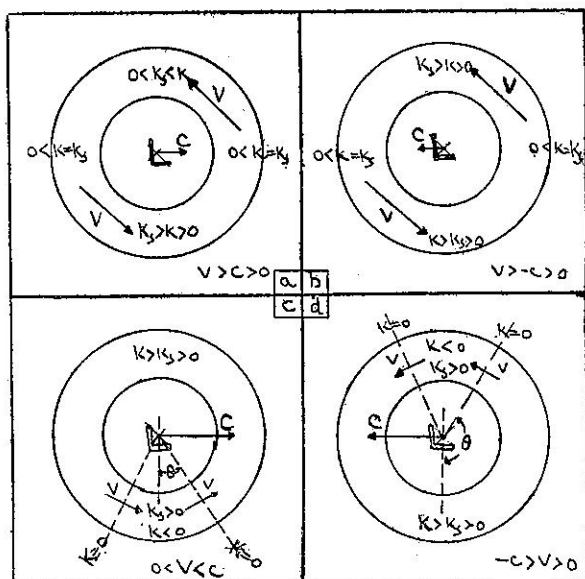


圖14：在運動的氣旋型式內，軌跡線曲率與等壓線曲率間的關係

速度，如圖14 (c) 所示， $K=0$ 的線與正南方向的交角 θ ，按 (24) 式可得出

$$\cos \theta = \frac{V}{C} \dots\dots\dots (42)$$

$K=0$ 的線有二，其與南北方向成對稱，在 2θ 角的劣弧扇形內， K 與 K_s 異號， $K < 0$ ，軌跡線有反氣旋式的曲率，此扇形內 TMD 之量較大。在此扇形之外的氣旋內， $K > K_s$ ，則為 TMC。故就東半部或西半部而論 TMD=0，故 TMD 可忽去不計，而以 LMD 代表輻散的全部。再者，合併 TMD 與 LMD 二者，可知在氣旋的南南西部有最大的輻散，在南南東部有較小的輻合，如果在此區域內 TMD 增大，輻散為零或有輻散出現，亦很可能。

(v) $-C > V > 0$ 氣旋向西運動且風速小於氣旋速度，與 (iv) 同樣的討論，如圖 14 (d) 所示，

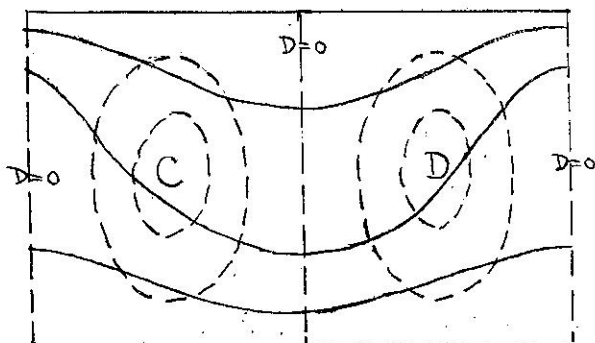


圖15：波狀等壓線型式內的輻散等值線(虛線所示者)

$K=0$ 的線有二，其與正南方向的交角 θ 亦可適合 (42) 式，唯 V 與 C 異號， $\cos \theta$ 為負值，此二線的位置如圖14 (d) 所示，在 $K=0$ 二線所夾的劣弧扇形內，軌跡線的曲率為反氣旋式的， $K < 0$ 故在此扇形內有較大的 TMD。在此扇形以外的氣旋內， $K > K_s$ ，則為 TMC。就東半部或西半部而論，TMD=0，故 LMD 可代表輻散的全部。合併 TMD 與 LMD 二者，在氣旋的北北西部有最大的輻散，在北北東部有較小的輻合，或輻散為零，或為輻散亦有可能。

在反氣旋內的輻散輻合可同樣討論，茲不贅述。

四、輻散輻合的垂直分佈

由經驗知中緯度地帶 700mb 鄰近以上的高空，水平面上的等壓線成波狀型式，再按以上諸節的討論，在此等高度稍高的波狀等壓線型式內，輻散等值線 (Isolines of Divergence) 則如圖15圖所示，零值線與槽線及脊線相合，輻散中心在槽線之東的轉向點附近，輻合中心在槽線之西的轉向點附近，地面低壓應與輻散中心相合，如以虛線表地面等壓線，實線表示高空等壓線，如圖16上圖所示，再在 AB 線上繪出垂直剖面圖，其中輻散輻合的分佈如圖16下圖所示。在地面摩擦層內，因地面摩擦原因，低壓中心附近應為輻合，摩擦層以上的氣旋型式內，東部為輻合，西部為輻散；繼續上升到達波形等壓線的底層，槽線之東為輻合，之西為輻散；再上升則為 LLMND，在 LLMND 之上，槽線之東為輻散，之西為輻合；再上升則為對流層頂了。

最後，我們可以解釋 LLMND 為何位於 600mb 高度的上下，一般而論，地面氣旋向東移動，氣旋之東的地區，自地面至大氣層頂的全部質量輻散之和應為輻散。假定地面氣壓為 1000mb，則自地面至 500mb 高度間的大氣質量恰為全部質量的一半，氣旋之東與槽線之東的底層皆為輻合，故 LLMND 應低於 500mb 高度。又因波狀等壓線的底常在 700mb 高度上下，LLMND 應高於波狀等壓線的底，亦即 LLMND 應高於 700mb 高度，因此 LLMND 應在 600mb 高度上下。

五、結 語

一般而言，考慮某一區域某高度的輻散輻合，如果該處 LMD (或 LMC) 與 LMD (或 TMC) 同時出現，則該處為輻散 (或輻合)；同樣，如果該處的某種效應為輻散 (或輻合)，他一效應亦為輻散 (或輻合)

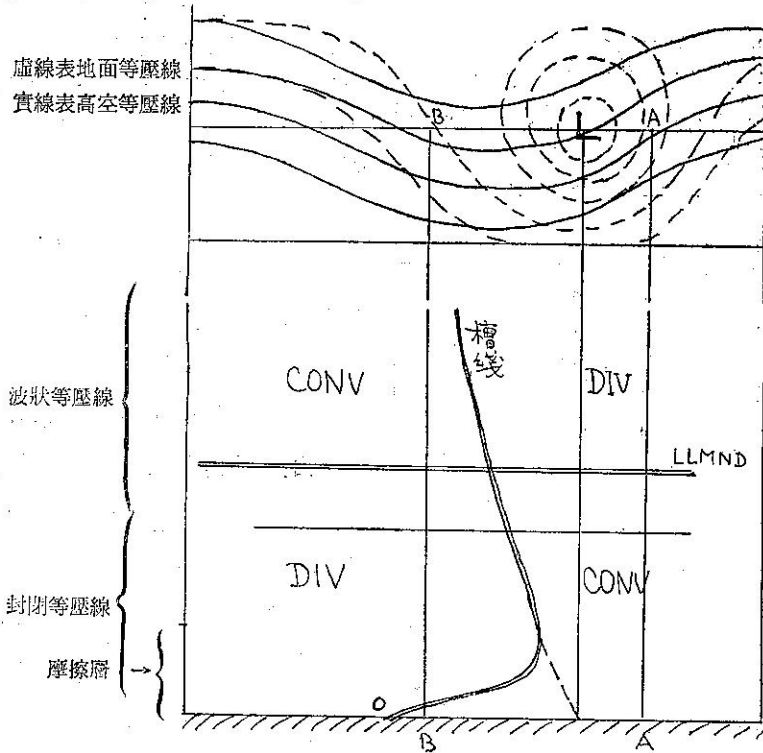


圖16：輻散輻合的垂直分佈

，此二者之和為輻散（或輻合）是無疑義。較複雜的情況乃在某一區域某高度中，輻散與輻合同時存在，其全部輻散究為輻散或輻合，則須判斷何者佔優勢而定。例如，在波狀等壓線型式中，緯度效應與曲率效應所影響的輻散輻合按高度互為消長的情況；又如在

氣旋等壓線型式中，其右半邊為 LMC，左半邊為 LMD；再就 $V > C > 0$ 而論，南半邊為 TMD，北半邊為 TMC，其全部的輻散究為輻散或輻合，則必須分區討論方可窺其全貌。至於某處輻散輻合數值的大小如何，則較為複雜了，本文未予論及。（完）