



旋 率 原 理

R. S. Scorer 著
戈 文 力 譯

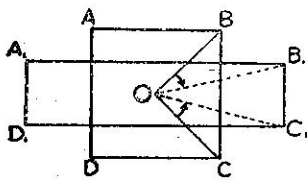
一、前 言

許多人認為旋率 (Vorticity) 對他很少發生關係，因而不感興趣。他們總以為旋率乃數學家專用，且以微積分的數學公式加以闡述，一般氣象人員似可不必管它。氣象學有很多方面確是和旋率不發生關係，然而一經想空氣運動，旋率就有很多用處。因為它於大氣運動的關係實在太密切，不研究旋率就無法對空氣運動瞭解得透澈。

通常除了幾個非常特別的單純例證外，旋率都作為數學以外的課題，但在日常生活中却又無時無地不在我們周圍，只要把握住簡單的觀念以後，分析各種複雜的運動就會發生濃厚的興趣。這些運動一般數學系畢業生無法作精確的敘述。就像數學家不能對冷面加以深入研究使其切合實用一樣，他們只不過得到一個模糊的觀念。旋率確是一項日常遭遇的現象，只要空氣在動就會找到它。

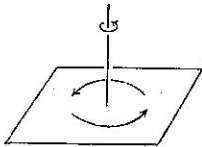
二、何 謂 旋 率

旋率是一種流體的旋轉。要知道為什麼我們必須計量流體的旋轉，首先得瞭解如果流體分子不旋轉怎樣才能



第一圖

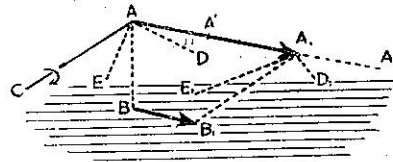
使流體變形？假定有一方塊流體，如第一圖中之 A.B.C.D. 今使其一邊擠緊另一邊則擴張，在流體分子線 AB 和 AD 移到它新位置 A₁B₁ 和 A₁D₁ 的時候並不旋轉，任何流體分子也都都不轉動。相反的話，如 OC 轉至 OC₁，OB 也會轉到 OB₁。這是兩項相等而相反的旋轉，假定取兩條成直角的流體分子線，它們旋轉率的和也就是它們所在平面上量得的旋率（或流體分子的旋轉）。上面例證中它是零。



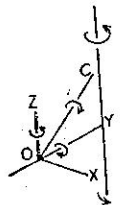
第二圖

另外舉一個簡單的例子，假定把流體當作固體加以旋轉，任何地點的角速度都相同，正像一盆水經長時間的均勻旋轉，它的旋率（任何成直線兩線旋轉率之和）是它角速度的兩倍（參閱第二圖）。但此時並無變形，流體分子仍保持它原來的形狀。

此種情況下只要知道旋轉的面，就能計量旋率。如果運動屬於純水平方向而又是均勻地旋轉，像第二例一樣，那末旋率是在一水平面上或在一垂直軸的周圍，我們可以設想其中的一種。另一方面講，運動雖仍屬純水平向且無任何水平向的改變，但各高度却並不一致，譬如一股巨大的風，近地處風力較高處為低（第三圖）。當分子垂直線轉動的時候水平各線並不轉動，旋轉面 AA₁ BB₁ 含有風向 AA₁，而旋轉軸 AC 屬水平向而與風向垂直。旋轉率 AA₁ 和 AB 之和等於其他任何兩條分子垂線旋轉率之和，例如 AD 及 AE 移向 A₁D₁ 和 A₁E₁ 的位置。這種運動既作純水平向看法，因此很容易選定方便的一對線來計量旋轉——為水平線並無旋轉，另一為垂直線具有最大之旋轉率。



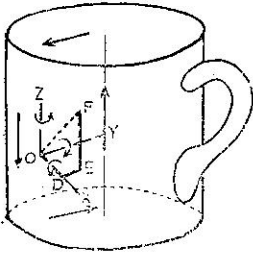
第三圖



第四圖

倘我人不知旋轉面或旋轉軸，可取任何成直角之三面，量出這些面上的速度分力，根據它來計算旋率的各項分力。就像我們可以把一大盤內的流體轉成圓圈，頂部轉動得比底部快（第四圖）。這種情況，每一流體分子勢必有一繞垂直軸的旋率分力（如第二圖），另一水平分力則繞水平軸，如第三圖。在 O 點取三個方向的平面，如圖中之 YOZ，ZOX，和 XOY。在 YOZ 面上並無旋轉，ZOX 面繞 OY 旋轉；XOY 面則繞 OZ 旋轉。這種情況下的旋率可假設為具有兩力：一個在 OY 線上，另一個在 OZ 線。這種分力相加的結果，必定成爲一種 YOZ 面上環繞一

軸線之旋轉，這種軸線的位置就像OC一樣。



第五圖

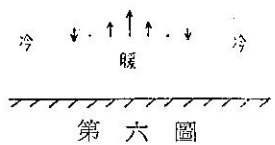
更為複雜的一種情況就像攪動茶杯內流體的一種運動（第五圖）。中間垂直軸附近為向上運動；靠邊緣為向下運動；底部為向內運動（這是因為茶葉集中間的緣故）；頂部為向外運動，再者底部的運動較頂部為緩慢，因此在O處我們所見的情況很像第四圖所示，但另外有一種繞OX的旋轉。此三種分力的合力即為OF方向的旋率（繞OF方向一根軸上的旋轉）。各該OD, DE和EF之長度用以計量繞OX, OY和OZ三軸之旋轉。

由此可見旋率有它的「方向」和「大小」。「方向」就是問題中流體分子旋轉軸的方向。「大小」則為流體分子旋轉率（或角速度）的兩倍。此旋轉率是在該分子驟然凝固時必須具有者，這樣才能消除所有的變形，而能允許繼續它的運動不受相隣分子的干擾。

三、大氣中旋率之例證

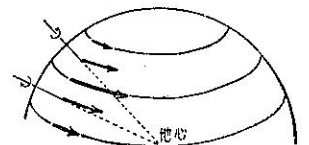
我們已經考慮到一種大股風於水平方向吹動的情況，由於地面上摩擦力的關係而使下層空氣阻滯。於是旋率屬於水平方向，而與運動的方向垂直（第三圖）。空氣分子也可想像作滾軸一樣在地面上向前滾進，高空的氣層則在較低層空氣上面滾進。

第二個例子拿對流氣流來說明，這種情況以垂直速度為主，上升氣流的垂直剖面就如第六圖所示。暖空氣上升以中間最快，周圍冷空氣中則有下降氣流。圖中顯示旋率係繞垂直於截面之水平軸四周。



第六圖

第三例之範圍遠較前兩例為廣。我人可設想海洋上有一衰老低壓，低壓內之空氣繞中心已有數日，因此各高度的風也都繞中心運行。這種情況很像第二圖，亦即在一垂直軸的周圍旋轉。另外一種這樣廣大範圍繞垂直軸旋轉的旋率例證為廣大的西風氣流，中心部份較其南北為迅速，對地球來講，北邊屬於氣旋式旋轉，南面屬於反氣旋式旋轉（第七圖）。

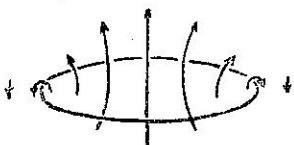


第七圖

丟開這些例證之前，我們必須問清楚：「停留在地面上不動的氣團，它的旋率是什麼？」即使風完全靜止，空氣仍隨地球轉動，因此環繞地軸的軸心一天轉一圈。它的相對旋率 Relative Vorticity（由於對地球的運動而產生的旋率）為零，但絕對旋率 Absolute Vorticity（由於「在天空」轉動而產生，或對星體而言）却並不是零。在天氣系統中，流體分子繞一垂直軸對地球而言的旋轉率常遠較一天繞一次為小，即使是很猛烈的旋轉率也不過一天繞三四次。這就是說：當我們處理直徑數百哩乃至數千哩的天氣系統時，決不能忽視由於在一旋轉地球上而產生的後果。相反來講，前面兩個例證中因為旋轉率很大，增加每天一轉相差很微可以忽略。其中重要的一點是：由於大氣隨地球旋轉，因此整個大氣具有旋率。因為這種旋轉是針對地球來講，因此大氣的某些部份較其他部份具有這種旋轉的較多分配量，但為實用上的目的，我們必須說：所有空氣多少具有這種旋轉。

在討論怎樣產生旋轉、旋率在大氣中的變化、以及旋率之重要性以前，首先要介紹旋渦線 (Vortex Lines) 的觀念。

四、旋 渦 線



第八圖

動態流體中的旋渦線是一種表示旋率方向的線條。在第三圖的例證中它們是貫穿運動方向的水平線，像 AC 即是。第六圖那樣更為複雜的情況，它們是環繞對流氣流的水平圈。圈的中間空氣向上穿過遠較外面為速（第八圖）。在第七圖的例證中它們是垂直線。

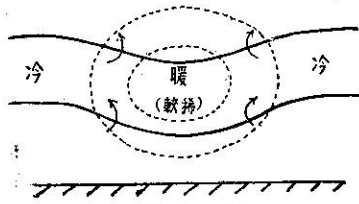
旋渦線也可以假想為力的強度線，以其密集之處較稀疏之處旋轉更強。在以下各節中我們將可見表明此種觀念的一些實例。

五、渦率之發生

大氣中的旋率有三個主要的來源，那就是：摩擦力、地心吸力、和地球的旋轉。

第三圖例證中，A層空氣所受到的壓力和B層相等，然而B層還受到地面摩擦力的影響，因此得到的速度比較小。此種情況，因地面摩擦力而產生旋率。另一由於摩擦力而產生旋率之實例為空氣在機翼上流動，緊靠機翼的空氣被拉向前，下面將再作詳細討論。

剛纔我們已經見到一種對流氣流中間，在它繞上升暖空氣的圈子裡含有旋率。由於地心吸力而產生一種運動使較輕流體移至較重流體之上。此種運動是在等壓線不與等密度線相重合時才會產生。本例中除暖空氣所在地區密度較低外，其餘密度大致均勻（第九圖）。另一方面講，等壓線都近似水平線，僅在暖空氣中略見下傾。當兩組線條相交的時候，所指示的方向就會有旋率形成。



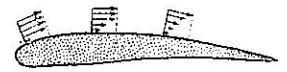
第九圖

旋率之因地心吸力而產生者並不需要像最後一例的水平向旋渦線。地心吸力只不過給了空氣重量而使大氣中產生壓力。我們都知道，拿大範圍來講，大氣中都有水平向氣壓梯度，由此而產生空氣水平向運動，即所謂「風」。界而處密度有重大改變，該處氣壓和密度間相互的紛擾作用最強，因此旋率也最大。在界面上從一邊到另一邊風速的變化常很大：暖空氣和冷空氣彼此交切，差不多可說是產生了一種旋渦層（Vortex Sheet）或旋率層（Sheet of Vorticity），等一下將會再討論到。

大氣中產生旋率的第三種原因就是地球的旋轉，剛纔已經提到過。大氣中所貯存的旋率大部由於它的緣故，並且用各種方式加以轉變。

六、黏性之傳導旋率

固體傳導熱是從高溫區傳熱至低溫區。一種完相全似的情況，黏性（Viscosity）（液體內部的摩擦力）把旋率從強烈的地區傳至微弱的地區。這種情況用機翼很好表明。第十圖表示飛機翼翅上遠近各點的氣流速度。機翼上氣流的速度為零，靠近機翼前緣之處只有一薄層空氣因摩擦力而致落後。但當空氣經過翼面，落後的空氣深度也跟着增加。不受影響的區域，並無旋率存在；可是在空氣落後的地方，也會像第三圖一樣產生旋率。這種旋率是由空氣內部的摩擦力（即稱黏性）而產生，隨後就把它自翼面向外傳導。



第十圖

另一重要實例，那就是黏性破壞了亂流。所有因亂流而產生的小渦流都有不同方向的旋轉運動，而黏性把它的旋率傳入相鄰的流體中，在那裡被其他渦流所發出的一些符號相反的旋率所抵消。正好像冰塊和熱炭相混，終至溫度均完全勻。亂流逐漸被破壞成更小更小的渦流（所經歷的機械作用我們將在下面說明），直到它們小得足以被黏性停住為止。事實上，黏性也在逐漸把較大的渦流轉緩，然而這種轉緩對於大渦流的重要性並不和它分為較小渦流部份相當。空氣中黏性的重要性只限於那些直徑不足一公分的渦流。

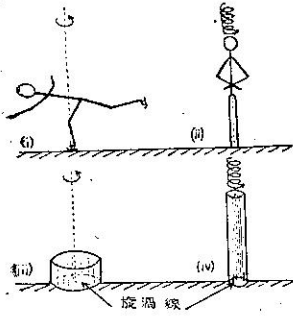
黏性為流體分子性質的後果。假定有兩層密接的流體而流速各異，分子不斷從這一層到另一層，因此有勻消速度差的趨勢。假定有一定容積的流體內中含有擾亂的渦流，這些渦流具有相似的後果而其範圍則遠較大。其間產生所謂渦流黏性（Eddy Viscosity），遠較分子黏性為大，但其作用則相類似擾亂的渦流在一般平常的氣流中吹經地面，把地面上產生的旋率傳至較高層次。這種渦流的本身也含有旋率，然而當我們想到渦流黏性的時候，不用管它複雜的旋率，只須想到它們對於一廣大範圍存在着的旋率所產生的影響。

七、旋渦線之伸張

除了旋率被黏性傳導，從流體的某一部份帶到另一部份的時候，或者由於地心吸力的影響才產生旋率的時機而外，通常旋渦線都被流體帶着走，假定我們能用墨水標示出旋渦線的話，那末墨水線始終保持為一條旋渦線，此一觀念對於以下將說明的過程很有用處。

大家都知道：如果把一塊石頭繫在繩子的一端，用手握住另一端旋轉，倘繩子縮短轉圈變小，那末旋轉率勢必加速。運用此項原理，溜冰員可以在開始時以一慢動作旋轉，讓腿和臂離開轉軸有相當距離，隨後收攏腿臂緊

靠轉軸，就可以高速旋轉（參閱第十一圖之 (i) (ii)）。



第十一圖

假定某一容量之流體，一方被拉長而密度不變，如此則另一方向勢必收縮。如果拉長的是旋渦線的方向，那末所有的分子將會更靠近旋渦線，而旋渦線本身則轉趨密集，表示旋率或旋轉之增加。此在第十一圖之 (iii) 和 (iv) 內加以表示，內中垂直線表示旋渦線。兩種情況之圓筒容積不變，因此角動量或旋轉動量也不變，但當分子靠近轉軸的時候，角速度却大為增加。

這種旋渦線伸張之後果可以用氣旋內氣流的輻合加以很好的說明。在一加深中的低氣壓，近地面處空氣向中心輻合，這樣中心處的空氣就勢必要同時上升（也就是下雨的原因）。我們剛纔已經見到空氣怎樣保持它的旋率，這種旋率在空氣輻合的時候增加，因為空氣柱向垂直方向伸張的緣故（就像第十一圖之 (iii) (iv)）。

這就是為什麼低氣壓走向空氣輻合之處，低氣壓的旋轉和地球相同，而旋率則較大。就此低氣壓按照這樣對地球來說的方向而旋轉。

在低氣壓中間如果要以觀測風來測定輻合量實在很困難，因為除了地面以外並沒有足夠的觀測資料，離地數百呎流入低氣壓內的氣流就可能相差得很遠。但從另一方面來說，從這一張天氣圖到下一張天氣圖，量它旋率的改變却要容易得多，據此即可對輻合加以估計。

研究天氣最要緊的是要知道垂直旋率究竟是什麼？因為差不多所有天氣都該由垂直運動來負責。我們對它並不能直接計量，目前最可靠的估計方法是計算旋率之改變，據此算得氣柱的垂直伸展量 (Amount of Vertical Stretching of Air Columns.)，此一原理靠計算機用於所有的近世預報方法上。

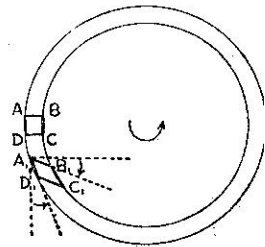
八、亂流之衰退

我們講到亂流，通常都把它當作一種包含大量旋風和渦流的運動，這些旋風和渦流形式不同大小不等，並且彼此相混，因此就不再把這種運動加以詳細劃分。有風的時候在野外焚紙所產生的煙，可以看到有這種運動。此種情況，亂流主要因為空氣流過地面而產生。原先生成的旋渦線屬於水平方向並且貫穿氣流，像第三圖中的 AC。經過渦流運動之後，這種旋渦線就會捲起來再在四周彎下。此種情形，原來很規則的旋率就會因摩擦力而產生混亂旋率。這種混亂旋率即稱「亂流」。旋渦線（或流體之任何標示線）開始時為直線，隨後轉變為非常彎曲，長度迅速伸展，遠較原先為長。此種旋渦線由此而擴張，旋率亦由此而增大。渦流能夠破壞那些環繞它們的氣流，並且把它們轉變為更小渦流的混合。然而並不是以同樣方式產生一種相當數目的大渦流。假定亂流是一種混亂的渦流正如我們所想像，那末它一定具有一種性質：聚集的雲塊勢必瀰散為更擴大但却更稀薄的雲。任何兩塊雲必被排斥，表示所有旋渦線由此而伸張，隨後渦流增強而直徑縮減。前面已經說過，這種小渦流被黏性所停住。

九、單獨之旋渦

旋渦屬於一種非常特殊的情況，所有旋率都集中在一條旋渦線上，其他地方都沒有。那是一種數學家的見解，實際上從未加以證實。流體環繞旋率線旋轉如同龍捲風內的漏斗雲一樣。其中有一點非常有趣，流體並不具有任何旋轉運動。第十二圖表示一種垂直於旋渦線的截面，這種圓形運動是拿截面切割旋渦線的一點作為中心。圖中表出 AB 兩分子如何通過圓圈。在單純旋渦內，速度使得小方塊 ABCD 移到 $A_1B_1C_1D_1$ 的位置。AB 至 A_1B_1 的旋轉和 AD 到 A_1D_1 的旋轉，大小相等而方向相反。AC 和 BD 兩線却絕不旋轉，因此 A_1C_1 與 B_1D_1 相正交。由此而使流體分子彎曲，但並不旋轉。

對於一條標示的流體分子線，我們只能考慮它移置一段短距離。明確地講，我們只可想像相距很近的各點。這樣就可以發現單純旋渦的速度和它距離旋渦線的遠近成反比。因此中心和它鄰近的速度為理論上的無限大。我們在實際上可以體驗的是這種情況，中心處有一個小核心，以均勻的角速度旋轉，正像它是固體一樣。河旁所見由一橋堤或翼槳所構成的轉輪就和單純旋渦非常接近，除了中心處有大量旋率集中外，其餘部份幾乎無旋率可言。龍捲風、水龍捲、或塵捲風，甚至包括熱帶風暴在內，垂



第十二圖

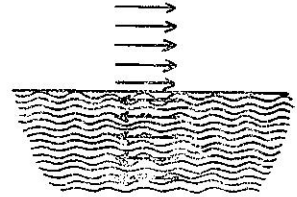
直軸周圍之旋轉和單純旋渦相差得並不大，如果容量極小，中心處旋轉並非無限，但在一小型而容量有限的一種，那末中心處的旋率就很大。在時間的過程中，集合在中心一小容量的旋率向外傳播，因此在實際情況中，一種現象——像龍捲風漏斗雲不能把所有旋率集合在一條線上向下直貫中心，而是分佈在一較大的體積內。

當然，龍捲風漏斗雲最初並不是一種單純旋渦的形式產生。這種旋轉運動是在空氣向垂直方向伸展過程中形成。空氣在最初必須含有一部份旋率。這種旋率可自各種不同的途徑產生：例如風吹過樹林或建築物區域，摩擦力可能較鄰近開曠區為大，因而發生繞垂直軸的旋轉；也可能因為陣雨而產生下降氣流，除地面緩移的空氣外，從高空帶來了空氣；或在小型冷面處具有旋率。不論垂直軸周圍產生旋率的原因是什麼，對流使空氣在垂直方向擴張，水平向空氣則幅合，因此垂直軸周圍的旋率就像第十一圖所示。由於近中心處垂直伸張最大，因而該處旋率也最強。

這種猛烈的旋轉現象，中心處常出現一稀薄的核心，空氣屬向下運動，颱風之有「眼」，塵捲風中心之有一「空洞」，都是這種緣故。

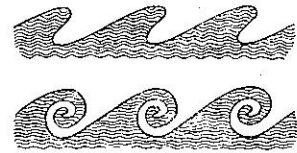
十、旋 渦 層

旋率除了集中在一條線上而外，也可以集合在一個面上。最簡單的情況就像兩股均勻的流體，它們內部並無任何旋率，中間却有一明顯的分界面（第十三圖）。書本上的冷面或暖面就很像這種情況。有時候向上穿過逆溫層的時候，當可發覺風速突變，該處就有一薄層很強的旋率，差不多形成了一旋渦層（Vortex Sheet）。



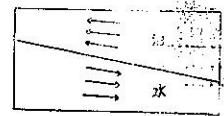
第十三圖

實際上，上面空氣的流動和下面水的流動通常也相差得很大，也可以產生一旋渦層，正如同一陣風吹過湖面一樣。



第十四圖

拿水面的情況來說，重力防止它被破壞，但如有一旋渦層兩邊並無密度差，於是兩股流體就會混合，此一旋渦層將被破壞或看來逐漸像一連串分開的旋渦（第十四圖）。旋渦層的那些旋渦線都在它內部。假定這一層捲成許多分離的旋渦，旋渦線就密集到那些螺旋的中間，旋率即在該處集合。

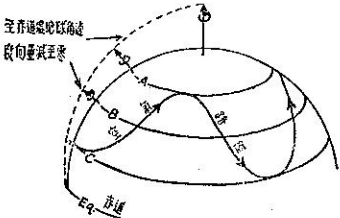


第十五圖

假定密度不同的交界面呈傾斜狀態，那末重力有把它拉平的趨勢。於是運動的結果產生了一旋渦層。例如有一箱油和水，中間有一交界面，此兩種流體流動方向如第十五圖內的箭頭所示，速度不連續在密度不連續面上。這種情況也可以在伴有明顯逆溫層之氣流過山的時候出現，此逆溫層因受山的影響形成波系，於是使逆溫層傾斜，逆溫層上下的空氣產生滑上滑下運動。假定此一旋渦層破碎為分開的旋渦，結果就會發生飛行員稱做「亂流」的一薄層。此兩流體本身的內部由於密度不變而並無旋率，足見所有旋率都產生在密度不連續之處。

十一、大 氣 之 波

最後我們要拿兩個實例來表明這種旋率的觀念怎樣有助於瞭解大氣中的現象，那就是說明兩種波——長波和山嶽波的機械作用。



- A：反氣旋形相對旋率最大之緯度
- B：相對旋率為零之緯度
- C：氣旋形相對旋率最大之緯度

第十六圖

(一) 長波

因為大氣在地球外面只是一層很薄的「殼」，由於地球轉動而產生的空氣運動，能維持足夠大的距離而產生任何顯著影響的都屬於水平向運動。那就是說地球旋轉分力對於我們氣象學比較重要的是一種近乎垂直的分力。這種分力在兩極處最大，在赤道處則為零。它的結果使得：某一空氣質量倘以一向極之分速運行，當不變其絕對旋率；但因地面之旋轉，相對旋率勢將改變。這種改變如以相對旋率計量的對象來說是在增加中。對於地球旋轉的空間來說，空氣具有一種和地球在空中自轉相對立的相對旋轉，這種相對旋渦使空氣轉回而流向赤道。因此而有一緯度它的相對旋率為零，地球旋轉和空

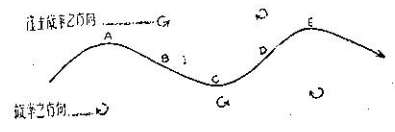
氣旋轉的垂直分力則相等。假定空氣在離極的旅途中經過此一緯度，空氣的相對旋轉將要開始超過地球的絕對旋轉，因此對於地球來說，空氣將逐漸轉回到向極運行。此種情況之下，空氣勢必要在相對旋率為零的緯度上來回激盪。

這種方式產生的波，它的波長大致在二千哩左右。研究槽脊相距大於或小於由觀測所得之風而算出的波長，即可推斷槽脊是否將更靠近或更遠離。此種見解，也就是說假設空氣的絕對旋率不變，而相對旋率則視緯度而改變即可算出空氣的路徑，對於數值預報法極富價值。

(二) 山嶽波

高空氣流線的形態常和它下面的地面氣流線有很多相似之處，因為大氣有它垂直浪動 (Vertical Oscillations) 的自然週期，再者山嶽也可以造成一種大氣波，它和鄰近山所形成的波有時屬同位相有時則不然。某種情況下彼此相加，另一種情況則又彼此相減。再者風向風速稍有改變也可以從某種自然週期的情況改變為另一種，由此而也許破壞了大氣波，或者構成更大的波。氣流中具有穩定波的自然週期經常可見，它的機構作用如下：

波峯 A 和它隨後的節點 B 之間有傾斜面存在，於是就像第十五圖的情形，由於空氣穩定成層，因此重力作用產生了旋率，使具有一種像第十七圖所示的旋轉。這種旋轉的結果：當空氣到達 C 時雖屬水平面姿態，但慣性使它繼續旋轉，因此到達 D 的時候屬反向傾斜。在 C 和 E 之間構成一種順鐘向旋率，至第二波峯 E 處再呈水平狀態。照這樣的程序重複不止，而波長則由風速和產生浪動的靜態穩定性來決定。在實際氣流中要計算波長並不簡單，但我們可以指出一股氣流是否具有產生穩定浪動 (Stationary Oscillations) 的能力。由於地心吸力而產生的旋率是區分大氣波和密度均勻之液體波的一種特性。這些波在天空也常看到，那是因為波峯產生雲狀雲的緣故，它的波長常在一至十公里之間。



十二、旋率為大氣運動之原素

大氣中所有重要的運動都含有旋率，實例多得勝於枚舉。亂流是一種旋渦線彼此打結的運動，假定我們自一很遠的地方來看大氣，低氣壓和其他巨大的天氣系統看來也都像旋渦，挾帶地面空氣的旋渦線伸至高空重新再拋出。小旋渦產生一種旋渦黏性，傳導較大範圍運動的旋率，使整個大氣中均勻一致。大氣和地面間的摩擦力使大氣隨下面的地球旋轉，在一處產生旋率而又在另一處再破壞它 (或以相反的意義產生)。

對於大氣動力的所有研究無論深淺都要涉及旋率，事實上旋率和大氣動力學的關係較諸和數學的關係更為密切。透視旋率生成和傳導的過程對於瞭解大氣極有助益，並且還常常可以把數學家所得到的結果使得非數學家很容易理解。(完)

原文題目：Vorticity.

原文刊載：“WEATHER” MAR. 1957

補 正

本學報四卷一期刊載「渦率觀念及其在天氣學上之推廣應用」一文作者嚴夢輝先生來函：「查該文15頁關於(2.18)式之推導，因原稿於謄抄時疏忽遺漏，易使讀者混淆不解，茲特補正如下：

將(2.14)式對y微分，(2.15)式對x微分，然後由(2.14)式減去(2.15)式，得

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \omega \frac{\partial q}{\partial z} = -D(f+q) - (u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}) - (\frac{\partial v}{\partial z}) \frac{\partial \omega}{\partial x} + (\frac{\partial u}{\partial z}) \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

因

$$(2.16) \quad \dot{f} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}$$

上式之 $f = 2\Omega \sin \rho$ ，而 $\partial \rho / \partial t = \partial \rho / \partial z = 0$ ，因相對渦率的分向量為

$$(2.17) \quad q_x = \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad q_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad q_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

而 $Q = q + f$ ，及 $\dot{Q} = \dot{q} + \dot{f}$

將(2.16)及(2.17)二式中之關係代入(2.14)與(2.15)二式微分後之差式中，得

$$(2.18) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial y} + \omega \frac{\partial Q}{\partial z} = -DQ + q_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + q_y \frac{\partial \omega}{\partial y}$$