

數值預報之基礎理論

廖學鑑

一、緒言

所謂天氣預報，就是由現在之大氣狀態，根據其變化法則，以判斷未來天氣的方法。在預報業務上，一切大氣狀態都可在天氣圖中表現出來。現有之所謂總觀的 (Synoptic) 預報法是根據高空天氣圖，地面天氣圖，剖面圖及絕熱圖，把握西風帶之狀態，氣壓系及鋒向之位置，強度及氣團的特質等，判斷其運動趨勢，而根據總觀的考察及經驗，繪出預報圖的方法。此法包括有很多主觀的因素及敘述的 (Descriptive) 外延的性格，故不十分科學。同時其預報成果也不足適應現代之需要。

為克服此種缺點，1904年 Bjerknes [1] 提倡將定量的精密科學的氣象力學應用於預報上，即以支配大氣運動之基礎方程式代表大氣狀態之變化法則，則未來之大氣狀態可由解此方程式得來。此思想至 1922 年，由 Richardson [23] 具體化。氣象力學之基礎方程式是非線型微分方程式而其一般解不易求出，故不得不使用數值積分法解之。因此得名為數值預報法 (Numerical prediction)。事實上，其計算非常複雜，耗費人力及時間均多，缺乏實用價值。

第二次世界大戰中發展成功之高速自動電子計算器，使計算勞力大為減少而不再為根本障礙，故 1949 年 Charney [7. 8. 9. 10.] 再將這個問題從新研究。近來由洛司貝 (Rossby) 之研究，已明白決定天氣之主要因素是科氏參變數之緯度變化而發生之長波。且證明此種波動之動態可由所謂渦度方程式 (Vorticity equation) 記述之。Charney 根據此立場，選渦度方程式當做大氣之變化法則，而應用於 500mb 高度圖上，實施數值積分而證明數值預報及其實用之可能性。由其優異結果已被氣象學者認為是代總觀預報法唯一之天氣預報法。此方法不但直接對預報上有用，作為理論氣象學研究之一環，當做理論之客觀的檢證法也很重要。

現在，美國及瑞典是數值預報研究之二大中心。此外英、加、法、日、德、挪威、芬蘭、丹麥、比利時等國很多學者，也都專心研究此法使牠有急速長足之進步。筆者相信數值預報法代替總觀預報法負起預報業務之日已不在遠。本文僅在為我國數值預報之研究作一開端，若能拋磚引玉，實不勝感盼之至。

二、數值預報之基礎方程式

根據 1948 年 Charney [6] 之研究，在大規模大氣運動之氣象學上，靜力學的近似，絕熱假定，準地衡風近似及準水平之假定等充分適宜。而其關係可由下列方程式群記述之。

$$\frac{\partial \nabla}{\partial t} + (\nabla \cdot \nabla) \nabla + f \mathbf{k} \times \nabla = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (\text{運動方程式}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\nabla \cdot \nabla)(\zeta + f) + (\zeta + f) \nabla \cdot \nabla = -\mathbf{k} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p \quad (\text{渦度方程式}) \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \nabla + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{連續方程式}) \quad (3)$$

$$\nabla_g = \frac{\mathbf{k}}{\rho f} \times \nabla p \quad (\text{地衡風方程式}) \quad (4)$$

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{靜力學方程式}) \quad (5)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (\text{絕熱假定}) \quad (6)$$

其中 $\nabla(u, v)$ 為水平速度； w 為垂直速度； f 為科氏參變數 ($= 2\Omega \sin \phi$)； Ω 為地球自轉之角速度， ϕ 為緯度； p 為氣壓； ρ 為空氣之密度； ζ 為相對渦度； ∇ 為水平梯度； θ 為位溫 ($\theta = \text{Const} \cdot p^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \rho^{-1}$)； $\mathbf{k}$ 為定容比熱及定壓比熱之比； ∇_g 為地衡風速； $\mathbf{k}$ 為向上 (Z 方向) 之單位向量； $\times$ 及 $\cdot$ 各為向量積及無向量積。

自來討論流體力學有 Euler 及 Lagrange 兩方法。前者以時間及空間座標為獨立變數，後者以流體之初期位置及時間為獨立變數，而記述流體運動之方法。於預報業務上，大氣狀態都由等壓面高度圖表示，而表現於等壓面上之流線或渦度通常與等高面上的不一致。即記述於等壓面上的運動法則就與 Euler 形式有異。故為數值

預報之目的，種種運動法則要更改於等壓面上之法則，才能實用。事實上，選 x, y, p, t 為獨立變數——即採用 Enler 及 Lagrange 的兩座標系混合構成的座標系——是被常用之方法。這種座標系是由 Starr [26] 導入氣象學，而由 Eliassen [15] 集大成的，其通稱為準 Lagrangian 座標系 (Quasi-Lagrangian Coordinates)

。若令 $\hat{i}, \hat{j}$ 為向東 (x 方向) 及向北 (y 方向) 之單位向量； $w_p = \frac{dp}{dt}$ ； ∇_p 為等壓面上之水平梯度 $\left\{ = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p \hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p \hat{j} \right\}$ ，則根據 Eliassen 之研究，等高面上及等壓面上之種種運算素中有下列之關係存在；

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_z + \nabla \cdot \nabla + w \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_p + \nabla_p \cdot \nabla_p + w_p \frac{\partial}{\partial p} \quad (7)$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = g \nabla_p Z \quad (8) \quad \frac{\partial}{\partial z} = -g \rho \frac{\partial}{\partial p} \quad (9)$$

$$\nabla = \nabla_p + g \rho \nabla_p Z \frac{\partial}{\partial p} = \nabla_p + \nabla_p \frac{\partial}{\partial p} \quad (10)$$

應用上列四式，(4)(5)(6)及三次元的連續方程式及運動方程式 $\frac{d}{dt}(\ln \rho) = -\nabla \cdot \nabla - \frac{\partial w}{\partial z}$ (11) 及 $\frac{dV}{dt} + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$ (12) 可變型如下：

$$\nabla_g = \frac{g}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p Z \quad (\text{地衡風方程式}) \quad (13)$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{g \rho} \quad (\text{靜力學方程式}) \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial t} \right)_p + \nabla_p \cdot \nabla_p \rho^{-1} + \frac{\rho^{-1} w_p}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = 0 \quad (\text{絕熱假定}) \quad (15)$$

$$\frac{\partial w_p}{\partial p} + Q_p = 0 \quad (\text{連續方程式}) \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial \nabla}{\partial t} \right)_p + (\nabla_p \cdot \nabla_p) \nabla + w_p \frac{\partial \nabla}{\partial p} + f \mathbf{k} \times \nabla + g \nabla_p Z = 0 \quad (\text{運動方程式}) \quad (17)$$

$$\text{其中 } Q_p = \nabla_p \cdot \nabla = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_p \quad (18)$$

若應用運算素 $\mathbf{k} \cdot \nabla_p \times ()$ 於(17)式，可得渦度方程式

$$\left(\frac{\partial \zeta_p}{\partial t} \right)_p + \nabla_p \cdot \nabla_p (f + \zeta_p) + \mathbf{k} \cdot \nabla_p w_p \times \frac{\partial \nabla}{\partial p} + w_p \frac{\partial \zeta_p}{\partial p} + (f + \zeta_p) Q_p = 0 \quad (19)$$

$$\text{式中 } \zeta_p = \mathbf{k} \cdot \nabla_p \times \nabla = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_p - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_p \quad (20)$$

現在可以使用等壓面上之基礎方程式(13)–(17)及(19)，討論問題。

根據 Charney [6] 及 Thompson [29] 之研究，使用地衡風近似之意義有二。其一，地衡風近似可以濾過音波，重力波等小波長之小規模運動。其二為地衡風近似可以簡化運動方程式，變成等壓面高度 Z 之方程式。但有消失水平輻散 ($\nabla_p \cdot \nabla_g = 0$) 之缺點。為避免此缺點，首先從渦度方程式 (19) 及連續方程式 (16) 消去水平輻散 Q_p ，即可得

$$\left(\frac{\partial \zeta_p}{\partial t} \right)_p + \nabla_p \cdot \nabla_p (f + \zeta_p) + \mathbf{k} \cdot \nabla_p w_p \times \frac{\partial \nabla}{\partial p} + w_p \frac{\partial \zeta_p}{\partial p} - (f + \zeta_p) \frac{\partial w_p}{\partial p} = 0 \quad (21)$$

若上式中之水平速度 ∇ 由地衡風速 ∇_g 代替，可得地衡風近似之渦度方程式為

$$\begin{aligned} \nabla_p^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p - \frac{f(f + \zeta_g)}{g} \frac{\partial w_p}{\partial p} - \frac{1}{g} \nabla_p \cdot (w_p \nabla_p \rho^{-1}) &= -\mathbf{k} \cdot \nabla_p Z \times \nabla_p (f + \zeta_g) \\ &= \left\{ -\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial (f + \zeta_g)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial (f + \zeta_g)}{\partial x} \right\}_p = -J_p \{ z, f + \zeta_g \} \end{aligned} \quad (22)$$

式中 J_p 表 Jacobian, ζ_g 表地衡風近似之相對渦度，即

$$\zeta_g = \mathbf{k} \cdot \nabla_p \times \nabla_g = -\frac{g}{f} \nabla_p^2 Z \quad (23)$$

同理 (22) 式也可變型如下

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p - \frac{\rho^{-1}}{g \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} w_p = -\frac{1}{f} \mathbf{k} \cdot \nabla_p Z \times \nabla_p \rho^{-1} = -\frac{1}{f} J_p (Z, \rho^{-1}) \quad (24)$$

(22)及(24)兩式是， w_p 及 $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p$ 為從屬變數， x, y ，及 t 為獨立變數之聯立微分方程式。若考察大規模大氣運動時，絕對渦度 ($\eta_p = f + \zeta_p$) 及靜的穩定度 ($K = -\frac{\rho^{-1}}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$ ，Static stability) 都為正數。所以上述之聯立微分方程式是橢圓型 (Elliptic type)，故在適當之境界條件及初期條件下，可求出其數值解。

若知道現在之等壓面高度 $Z(x, y, p, t)$ ，則根據(22)及(24)式之解 $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p$ 及時間的外插，可求得 Δt 時間後之 $Z(x, y, p, t + \Delta t)$ 為

$$Z(x, y, p, t + \Delta t) = Z(x, y, p, t) + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p \Delta t. \quad (25)$$

反覆此操作，可以求出任意時間後之等壓面高度 Z 之場，實施數值預報。

事實上，以現有之高速度自動電子計算器之能力，求(22)及(24)式等三次元方程式之解，仍甚困難且很費時。故不適用爭取時間之預報業務。為克服這種困難，使用近似實際大氣之大氣運動樣式，簡化(22)及(24)式是常用之方法，而此理想化之簡單大氣稱為模型 (Model)。以下按年代，從 Charney 之方法開始說明之。

三、順壓模型 (Barotropic model)

順壓模型是由 Charney [7, 8, 9, 10] 設計之最簡單模型。他設四假定為：

①風速之高度變化可由下記之方程式表示

$$\nabla(x, y, p, t) = A(p) \overline{\nabla}(x, y, t) \quad (26)$$

式中， $A(p)$ 為氣壓 p 之單調函數 (Monotone function) 且有

$$\overline{A} = \frac{1}{p_0} \int_0^{p_0} A(p) dp = 1 \quad (p_0 \text{ 為地上氣壓}) \quad (27)$$

之性質。而運算素一為質量平均，定義為 $\overline{(\quad)} = \frac{1}{p_0} \int_0^{p_0} (\quad) dp$ 。 (28)

② $\zeta \ll f$ ，故渦度之垂直流 ($w_p \frac{\partial \zeta_p}{\partial p}$) 及 ($\zeta_p \frac{\partial w_p}{\partial p}$) 比 ($f \frac{\partial w_p}{\partial p}$) 小，可略而不計。

③渦管之上旋轉 (The turning of vortex tubes) 項 $\mathbf{K} \cdot \nabla_p w_p \times \frac{\partial \nabla}{\partial p}$ 可省略。

④境界條件為 $w_p(O) = w(p_0) = 0$ 。 (29)

若應用②及③之假定於 (21) 式，可得簡化之渦度方程式為

$$\left(\frac{\partial \zeta_p}{\partial t}\right)_p + \nabla \cdot \nabla_p (f + \zeta_p) - f \frac{\partial w_p}{\partial p} = 0 \quad (30)$$

取上式之質量平均而應用假定④之境界條件，可得

$$\overline{\left(\frac{\partial \zeta_p}{\partial t}\right)_p} + \overline{\nabla \cdot \nabla_p (f + \zeta_p)} = \frac{f}{p_0} \int_0^{p_0} \frac{\partial w_p}{\partial p} dp = \frac{f}{p_0} \{w_p(p_0) - w_p(O)\} = 0 \quad (31)$$

從假定(1)及 (28) 式之關係，可觀出有

$$\begin{aligned} \zeta_p &= A \cdot \overline{\zeta_p}, \quad (\overline{\zeta_p} = \mathbf{K} \cdot \nabla_p \times \overline{\nabla}), \quad \overline{\left(\frac{\partial \zeta_p}{\partial t}\right)_p} = \left(\frac{\partial \overline{\zeta_p}}{\partial t}\right)_p \overline{A}, \\ \overline{\nabla \cdot \nabla_p \zeta_p} &= \overline{\nabla \cdot \nabla_p A^2} \quad \text{及} \quad \overline{\nabla \cdot \nabla_p f} = \overline{\nabla \cdot \nabla_p f} \overline{A} \end{aligned}$$

之關係存在。若上式代入 (31) 式可得

$$\overline{A} \left(\frac{\partial \overline{\zeta_p}}{\partial t}\right)_p + \overline{A} \overline{\nabla \cdot \nabla_p} \left(\frac{\overline{A}^2}{\overline{A}} \overline{\zeta_p} + f\right) = 0 \quad (32)$$

令 $A^* = \frac{\overline{A}^2}{\overline{A}}$ ， $\zeta_p^* = A^* \overline{\zeta_p}$ ， $\nabla^* = A^* \overline{\nabla}$ ，即上式乘 $\frac{A^*}{\overline{A}}$ ，可得

$$\left(\frac{\partial \zeta_p^*}{\partial t}\right)_p + \nabla^* \cdot \nabla_p (\zeta_p^* + f) = 0 \quad (33)$$

式中， ζ_p^* 及 ∇^* 各為高度 p^* 之相對渦度及風速，而 p^* 可由定義 $A(p^*) = A^*$ (34)

決定之。根據 Charney [9] 之研究， p^* 普通在 500mb 及 400mb 之中間，但為便利起見，數值預報都使用

500mb。

現在可結論如下，在 500mb 之高度，渦度之局部變化完全可由絕對渦度之平流補償之。（所謂絕對渦度不變之法則）。

若應用地衡風近似 (13) 且省略*之符號，順壓方程式 (33) 變成

$$\nabla_P^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_P = \frac{\partial(f+\xi_g)}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial(f+\xi_g)}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = J_P(f+\xi_g, Z) \quad (35)$$

以下，為簡單起見，省略*符號。

四、順壓方程式之數值積分法

為數值預報之目的，初期條件須要直接從天氣圖上求出。故不得不考慮天氣圖投影之彎曲效果。若地球上距 $(\Delta a, \Delta b)$ 之兩點，投影在天氣圖上變成距 $(\Delta x, \Delta y)$ 之兩點，則有

$$m \Delta a = \Delta x, \quad m \Delta b = \Delta y \quad (36)$$

之關係存在。其中 m 為長度係數，若使用極面直射 (Polar stereographic) 投影， $m = \frac{2}{1+\sin\phi}$ 。普通在天

氣圖上，極至緯度 ϕ 之距離 $\gamma = \frac{\cos\phi}{1+\sin\phi}$ 。故 m 可變成

$$m = \frac{-d\gamma}{\frac{1}{2} d\phi} = \frac{2}{1+\sin\phi} = 1+\gamma^2 \quad (37)$$

$$\text{而 } f = 2\Omega \sin\phi = 2\Omega \frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2} \quad (38)$$

$$\text{若令 } \sigma = \frac{gm^2}{f} \text{ 可得 } \sigma = \frac{gm^2}{f} = \frac{g}{2\Omega} \cdot \frac{(1+\gamma^2)^3}{1-\gamma^2} \quad (39)$$

若地球表面之種種量，加添字 S 表示，則

$$\nabla_S^2 Z = \frac{\partial^2 z}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial b^2} = m^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = m^2 \nabla_P^2 Z \quad (40)$$

$$\text{同理 } J_S = m^2 J_P \quad (41)$$

故順壓方程式(35)可變型如下：

$$\nabla_P^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_P = J_P(\eta_g, Z), \text{ 式中 } \eta_g = f + \sigma \nabla_P^2 Z \quad (42)$$

η_g 表地衡風近似之絕對渦度。若令 $\xi = \nabla_P^2 Z$ (43)，上式變成

$$\eta_g = \sigma \xi + f, \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_P = J_P(\eta_g, Z), \nabla_P^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_P = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_P \quad (43)$$

若兩邊為 L_x 及 L_y 之天氣圖，由定間隔 d 之縱橫二種直線群分割，則在天氣圖上可得等間隔之交點群

$$X_i = \frac{L_x}{p} i \quad (i=0, 1, \dots, p), \quad y_j = \frac{L_y}{q} j \quad (j=0, 1, \dots, q) \quad (44)$$

其中 $d = \frac{L_x}{p} = \frac{L_y}{q}$ 。若使用交點群之數值，微分由定差代

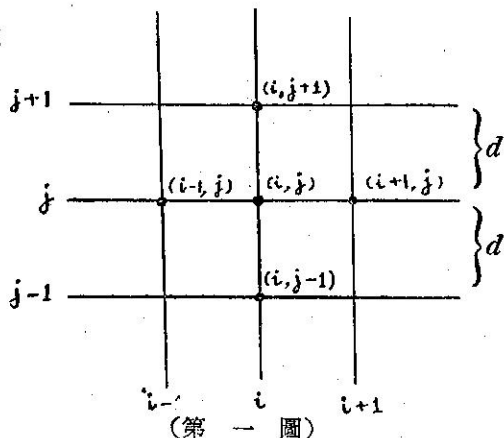
$$\begin{aligned} \text{替可得 } \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{d} (Z_{i,j} - Z_{i-1,j}) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{1}{d} \left\{ \frac{1}{d} (Z_{i+1,j} - Z_{i,j}) - \frac{1}{d} (Z_{i,j} - Z_{i-1,j}) \right\} \\ &= \frac{1}{d^2} \{ Z_{i+1,j} + Z_{i-1,j} - 2Z_{i,j} \} \end{aligned}$$

$$\text{同理 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{d^2} \{ Z_{i,j+1} + Z_{i,j-1} - 2Z_{i,j} \}$$

$$\text{故 } \xi_{ij} = (\nabla_P^2 Z)_{ij} = \frac{1}{d^2} \{ Z_{i+1,j} + Z_{i-1,j} + Z_{i,j+1} + Z_{i,j-1} - 4Z_{i,j} \} \quad (45)$$

若定義運算素 $D_{i,j}^2$ 為

$$D_{i,j}^2 Z = \frac{1}{d^2} \{ Z_{i+1,j} + Z_{i-1,j} + Z_{i,j+1} + Z_{i,j-1} - 4Z_{i,j} \} \quad (46)$$



$$\text{則 } \xi_{ij} = D_{i,j}^2 Z \quad (47)$$

若 $Z_{i,j}, \eta_{i,j}, \sigma_{i,j}, \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{i,j}$ 及 $\frac{\partial \xi_{i,j}}{\partial t}$ 表點 (i,j) 之 $Z, \eta, \sigma, \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_P$ 及 $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_P$ 值。且令

$$J_{i,j}(\eta, Z) = \frac{1}{4d^2} \left\{ (\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j})(Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1}) - (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})(Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j}) \right\} \quad (48)$$

則微分方程式(43)，可由下記之近似定差方程式代替；

$$\eta_{i,j} = \sigma_{i,j} \xi_{i,j} + f_{i,j} \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{i,j} = J_{i,j}(\eta, Z) \quad (49)$$

$$D_{i,j}^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_P = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{i,j} \quad (50)$$

其中 $\sigma_{ij} = \frac{m_{i,j}g}{f_{i,j}}$ 。物理量 h, f 及 m 與時間 t 無關，故可應用 (39), (38), (37)，及 $\gamma^2 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2$ 決定之。

其中 (x_p, y_p) 表極之座標。若境界條件為

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{o,j} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{p,j} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{i,o} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{i,q} = 0; \quad \begin{matrix} i=0, 1, \dots, p; \\ j=0, 1, \dots, q; \end{matrix} \quad (51)$$

之下，求 (50) 式之解，可得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{i,j} = - \frac{d^2}{pq} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{m=1}^{q-1} \sum_{r=1}^{p-1} \sum_{s=1}^{q-1} \left(\sin^2 \frac{\pi l}{2p} + \sin^2 \frac{\pi m}{2q} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{rs} \sin \frac{\pi l r}{p} \sin \frac{\pi m s}{q} \sin \frac{\pi l i}{p} \sin \frac{\pi m j}{q} \quad (52)$$

故使用下述三步驟，可完成數值計算，實施數值預報。

第一步驟 直接由實測之 500mb 高度圖，使用(49)式 $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{i,j}^t = J_{i,j}(\eta_t^t, Z^t)$ 求出 $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{i,j}^t$ 值。其中指標 t 表時刻 t 之數值。

第二步驟 由第一步驟得到之 $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{i,j}^t$ 代入(52)式計算 $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{i,j}^t$ 。

第三步驟 由時間的外插

$$Z_{i,j}^{t+\Delta t} = Z_{i,j}^{t-\Delta t} + 2\Delta t \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{i,j}^t \quad (53)$$

求出， Δt 時間後之 500mb 高度值 $Z_{i,j}^{t+\Delta t}$ 由此可繪成 Δt 時間後之預告圖。若預報時間為 $n\Delta t$ 後，則須要反覆上述之操作 n 次，才可以完成其程序。

關於電子計算器之性能及其數值預報上之應用，已有 Platzman [22] 之詳細紹介，請參考該文獻。

五、定差方程式之計算安定度 (Computational stability)

普通微分方程式由定差方程式代替而產生之誤差稱剪斷誤差 (Truncation error)。現在考察剪斷誤差最小的 Δt 及 d 之限制條件。設 Z' 為小擾動，重疊於平滑大規模大氣運動，則渦度方程式(42)可寫成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_P (\nabla_P^2 Z') = J_P(\eta, Z') + \sigma J_P(\nabla_P^2 Z', Z) + J_P(\sigma, Z) \nabla_P^2 Z'$$

而其定差方程式為

$$D_{i,j}^2 \left\{ \frac{Z'_{i,j}(t+\Delta t) - Z'_{i,j}(t-\Delta t)}{2\Delta t} \right\} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{Z'_{i,j+1} - Z'_{i,j-1}}{2d} \right) - \frac{\partial \eta}{\partial y} \left(\frac{Z'_{i+1,j} - Z'_{i-1,j}}{2d} \right) + \sigma \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{D_{i+1,j}^2 Z' - D_{i-1,j}^2 Z'}{2d} \right) - \sigma \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{D_{i,j+1}^2 Z' - D_{i,j-1}^2 Z'}{2d} \right) + J_P(\sigma, Z) D_{i,j}^2 Z' \quad (54)$$

若假定小擾動 Z' 可由 Fourier 級數表示，即

$$Z' = e^{i(Kx + \mu y + \nu t)}, \text{ 其中 } K = \frac{\pi l}{pd} = \frac{\pi l}{L_x} \quad (l=1, 2, \dots, p-1) \quad (55)$$

$$\mu = \frac{\pi m}{qd} = \frac{\pi m}{L_y} \quad (m=1, 2, \dots, q-1)$$

(55)式代入(54)式可得

$$\frac{E - E^{-1}}{2} = ai + J_P(\sigma, Z) \Delta t \quad (56)$$

其中 $E = e^{i\nu\Delta t}$,

(57)

$$a = \sigma \frac{\Delta t}{d} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \sin kd - \frac{\partial z}{\partial x} \sin \mu d \right) - \frac{d\Delta t}{4} \cdot \frac{\frac{\partial \eta_g}{\partial x} \sin kd - \frac{\partial \eta_g}{\partial y} \sin \mu d}{\sin^2 \frac{kd}{2} + \sin^2 \frac{\mu d}{2}} \quad (58)$$

故 $|E| \leq 1$, 才可使小擾動 Z' 穩定。首先考察省略末項 $J(\sigma, Z)\Delta t$ 之 (56) 式, 令 E_0 爲此方程式之根, 即 $E_0 = \rho e^{i\theta}$, 其中 ρ 爲正數 θ 爲實數。故 $|E_0| = \rho \leq 1$ 才有穩定性。同時 $-E_0^{-1} = -\rho^{-1}e^{-i\theta}$ 也是此方程式之解, 此時須要 $\rho \geq 1$ 才有穩定性。因此可得 $\rho = 1$,

$$E_0 = e^{i\theta} \text{ 及 } E_0^{-1} = e^{-i\theta} \Rightarrow E_0 - E_0^{-1} = 2i \sin \theta. \text{ 故穩定條件變成 } |a| = |\sin \theta| \leq 1 \quad (59)$$

現在使用 (58) 式估計 $|a|$ 之上限。(58) 式之第一項可變型爲

$$\sigma \frac{\Delta t}{d} \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \sin^2 kd + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \sin^2 \mu d \right\} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \sin kd + \frac{\partial z}{\partial x} \sin \mu d \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

而 $\sin$ 之最大值爲 1, 故上式之上限可寫成

$$\sqrt{2} \frac{\Delta t}{d} \text{MAX.} |\sigma \nabla_P Z| = \sqrt{2} \frac{\Delta t}{d} \text{MAX.} |m \nabla_g|. \quad (60)$$

若應用 $x \approx 0$ 時 $\sin x \approx x$ 之性質, (58) 式之第二項可寫成

$$-\Delta t \frac{\frac{\partial \eta_g}{\partial x} k - \frac{\partial \eta_g}{\partial y} \mu}{k^2 + \mu^2} = \frac{\Delta t}{k^2 + \mu^2} \left[\left(\frac{\partial \eta_g}{\partial x} \mu - \frac{\partial \eta_g}{\partial y} k \right)^2 - \left\{ \left(\frac{\partial \eta_g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_g}{\partial y} \right)^2 \right\} (k^2 + \mu^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

當然天氣圖之長度 L_x 或 L_y , 比波長 $\frac{\pi}{k}$ 或 $\frac{\pi}{\mu}$ 大才有意義, 即 $\frac{\pi}{L_x} < k$ 或 $\frac{\pi}{L_y} < \mu$ 。若應用此性質, 上式之上限可寫成

$$\Delta t \cdot \frac{L}{\sqrt{2} \pi} \text{MAX.} |\nabla_P \eta_g|, \quad \text{其中 } L = \left\{ \frac{1}{2} (L_x^{-2} + L_y^{-2}) \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (61)$$

由 (60) 式及 (61) 式之關係, 穩定條件 (59) 可寫成

$$\frac{d}{\Delta t} \geq \sqrt{2} \left\{ \text{MAX.} |m \nabla_g| + \frac{Ld}{2\pi} \text{MAX.} |\nabla_P \eta_g| \right\} \quad (62)$$

現在考察 $J(\sigma, Z)\Delta t$ 之影響。於 (56) 式內, $a = \pm 1$ 以外沒有重根可存在。故安定條件 $|a| < 1$ 之下 $J(\sigma, Z)\Delta t \approx \Delta t$, 故於近似估計時, 此項之影響可略而不計。

由每日之天氣圖分析之經驗, $L = 10^7 \text{m}$, $\text{MAX.} |m \nabla_g| \approx 50 \text{m/sec}$, $m \approx 10^\circ$, $\eta_g \approx \frac{10^{-4}}{3} \text{sec}^{-1}$ 。故 (62) 式之右邊大約等於

$$\sqrt{2} \left\{ \text{MAX.} |m \nabla_g| + \frac{Ld}{2\pi} \cdot \frac{\Delta \eta}{d} \right\} \approx \sqrt{2} \left(50 + \frac{10^7}{6.3} \cdot \frac{10^{-4}}{3} \right) = 71 + 74 = 145.$$

故安定條件 (62) 變成 $\frac{d}{\Delta t} > 145 \quad (63)$

Charney 於最初之數值預報實驗時 (第六節), 選 $d = 628.5 \text{km}$, 故 $\Delta t < 72 \text{分} \quad (64)$

若置 Δt 爲 1 小時, 則記述於第四節之數值計算的第三步驟, 爲 24 小時預報之目的, 須要反覆 24 次才可完成其程序。

六、Charney 之數值預報實驗

1950 年 Charney 及其共同研究者 [9], 由前述之方法, 使用北美及歐洲之觀測結果, 實行數值計算求出 24 小時後 $\geq 500 \text{mb}$ 高度圖之預報圖。結果 24 小時預報之計算時間等於 24 小時, 即計算速度與天氣變化剛好一致。又求出之預報圖大體與實測圖一致, 但是對迅速發達之高低氣壓, 其預報圖有相當大之誤差。Charney 之檢討結論, 斷定預報誤差之原因有二, 一爲選 d 等於 628.5km 是過大, 使剪斷誤差增加, 其二是順壓模型對實際大氣之斜壓效果追隨不到而生之誤差。

剪斷誤差 T 可由 $f(x+d)$ 及 $f(x-d)$ 之 Taylor 的展開估計其大小,

$$\text{則 } T = \frac{1}{f'(x)} \left\{ \frac{f(x+d) - f(x-d)}{2d} - f'(x) \right\} \approx \frac{d^2}{12} \frac{f'''(x)}{f'(x)} + O(d^4)$$

若令 $f = \cos \frac{2\pi x}{L}$, 則 $\left| \frac{f'''}{f'} \right| = 4\pi^2 L^{-2}$

$$\text{故 } T = \frac{d^2}{12} \frac{f'''}{f'} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{d}{L} \right)^3 \quad (65)$$

若取 $L=2000\text{km}$, 則 $d=628.5\text{km}$ 時之剪斷誤差 $T=40\%$, 若 $d=300\text{km}$, 其剪斷誤差 $T=7.5\%$ 。可見 Charney 之 d 值, 628.5km , 實際選的太大使剪斷誤差增加。目前認為選 d 等於 300km 最適當, 此時前節之穩定條件變成 $\Delta t < 35\text{分}$ 。 (66)

回顧 Charney 一派的一連串之數值預報研究, 可以說其第一階段已完了, 已證實數值預報之可能性及實用之可能性。所以對數值預報, 吾人可抱信心, 一路邁進研究之。數值預報研究之第二階段, 是確立其實用性之問題。其目的為: ①探求充分真實之預報方程式 (即模型),

②同時其計算充分簡單而可由合理的勞力完成其程序。

故很多氣象學者, 沿此路線從事研究, 發表許多模型及比較合理的計算法。容後逐一介紹以供研討。

七、平流模型 (Advection model)

順壓模型的最大缺點是在波浪擾動 (Wave perturbation) 之生長問題。於順壓模型裏, 擾動波生長的能量源 (Energy source) 在於主流 (Basic flow) 之動能而不在牠的位能。但是根據 Charney [5], Eady [13] 及 Fjörtoft [17] 等研究, 在斜壓模型內, 擾動波的生長是消費體系之位能不是消費動能。事實上在西風帶發達的波動大概從這種不穩定裏產生, 故這種不穩定波不能存在於順壓模型裏, 因為位能與動能之變換機構在順壓模型, 先驗的 (A priori) 不成立。Fjörtoft [9] 為克服此缺點, 乃應用 Sutcliffe [27, 28] 之研究結果, 設計平流模型。若假定大氣中之溫度變化, 完全靠平流而生, 即

$$\nabla(x, y, p, t) = \bar{\nabla}(x, y, t) + A(p) \nabla_T(x, y, t) \quad (67)$$

其中 ∇_T 表 p_1, p_2 兩氣壓面間之溫度風 (Thermal wind)。令 h 為兩氣壓面間之厚度 ($h = \frac{R}{g} \bar{T} \ln(\frac{p_1}{p_2})$), 而 $\bar{Z}$ 為兩氣壓面高度之平均, 則地衡風近似可寫做

$$\bar{\nabla} = -\frac{g}{f} \mathbf{K} \times \nabla_P \bar{Z}, \quad \nabla_T = -\frac{g}{f} \mathbf{K} \times \nabla_P h \quad (68)$$

$$\text{而相對渦度爲 } \bar{\zeta}_a = -\frac{g}{f} \nabla_P^2 \bar{Z}, \quad \bar{\zeta}_T = -\frac{g}{f} \nabla_P^2 h \quad (69)$$

若(67)式代入(3)式可得

$$\left(\frac{\partial \bar{\zeta}_P}{\partial t} \right)_P + A \left(\frac{\partial \bar{\zeta}_T}{\partial t} \right)_P + \bar{\nabla} \cdot \nabla_P (f + \bar{\zeta}_P) + (\bar{\nabla} + A \nabla_T) \cdot \nabla_P (A \bar{\zeta}_T) - f \frac{\partial w_p}{\partial p} = 0$$

若取質量平均(28)且使用(29)式之境界條件, 可得

$$\left(\frac{\partial \bar{\zeta}_P}{\partial t} \right)_P + \bar{\nabla} \cdot \nabla_P (f + \bar{\zeta}_P) + A^2 \nabla_T \cdot \nabla_P \bar{\zeta}_T + A \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\zeta}_T}{\partial t} \right)_P + \bar{\nabla} \cdot \nabla_P \bar{\zeta}_T \right\} = 0$$

故由(69)式, 可得

$$\left(\frac{\partial \bar{\zeta}_P}{\partial t} \right)_P + \bar{\nabla} \cdot \nabla_P (f + \bar{\zeta}_P) + A^2 \nabla_T \cdot \nabla_P \bar{\zeta}_T = 0 \quad (70)$$

$$\text{及 } \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_P + \bar{\nabla} \cdot \nabla_P h = 0 \quad (71)$$

上記之聯立微分方程式, 唯含有兩個水平場 $\bar{Z}$ 及 h 。故使用數值積分法求出此兩水平場之時間的傾向, 且由時間的外插, 可達成數值預報。

若(70)式及(71)式, 由擾動論 (Perturbation theory) 線型化, 且求其波動傳播速度 C , 可得

$$C = \bar{U} - \frac{\beta}{2k^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{2k^2} \right)^2 - A^2 U_T^2} \quad (72)$$

其中, k 表波數; $\bar{U}$ 為平均風速, U_T 為溫度風速。此方程式, 由 Fjörtoft [17], Sutcliffe [30] 及 Berson [2] 均已求過的。由此公式, 波動之穩定不穩定, 可由波長大於或小於一定極限值之事實而認出。其極限值與溫度風速之平方根成正比例。此事實與 Charney [5] 之三次元的研究結果, 完全一致。但是對於波長比極限值小之波動, 平流模型之結果與三次元的考察者, 完全相異。故理論上, 平流模型未必完全適合於數值預報之需要。

八、二層模型 (Two-layer model)

為避免三次元方程式數值計算之困難, 如何導入斜壓效果於二次元的方程式, 而求出大氣運動之模型是目前

最大之關心事。此種模型仍須與考慮大氣之三次元的構造及其垂直運動，但是數學上乃為二次元之模型，故 Eady 命名為 $2\frac{1}{2}$ -次元 ($2\frac{1}{2}$ -dimensional) 模型。若從方法而論，這種模型常常使用兩個水平場，代表大氣運動。故如 Eliassen 的命名，稱為二參數模型 (Two-parametric model) 比較切實。前述之平流模型也是二參數模型之一。

Phillips [21] 設計，兩層均質 (homogeneous) 非壓縮性之流體，由準水平的接觸面分割，且由二個剛性水平面互夾之，如第二圖之模型。若等壓面與接觸面相交，則有斜壓效果。但是模型各層是順壓場，故斜壓力集中於其接觸面。因此接觸面之傾斜或上下運動，對應各層之垂直運動或水平發散。在各層中，流體成順壓場，故由 (2) 式省略傾壓項，且令 $\eta = \zeta + f$, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla$, 可得 $\frac{d\eta}{dt} + \eta \nabla \cdot \nabla = 0$ (73)

再於層中取斷面積 F , 高度 B 之垂直渦管 (Vortex tube) 為考察之對象，則由 Lagrange 方式的流體力學，水平輻散可由斷面積 F 之時間的增大率表示，故 $\nabla \cdot \nabla = \frac{1}{F} \frac{d_F F}{dt}$ (74)

從 (73) 式及 (74) 式消去水平輻散項，可得 $\frac{d\eta}{dt} + \frac{\eta}{F} \frac{d_F F}{dt} = 0$ 或 $\frac{d\eta}{dt} (\eta \cdot F) = 0$ (75)

同時，應用質量不變之法則，可得連續方程式

$$\frac{d\eta}{dt} (\rho F B) = 0 \quad (76)$$

考慮非壓縮性之假定，消去渦管之斷面積 S , 可得

$$\frac{d\eta}{dt} \left(\frac{\eta}{B} \right) = 0 \quad (77)$$

若應用上式於模型之各層，且令 $'$ 符號表上層之物理量，則可得各層之渦度方程式為

$$\frac{d\eta}{dt} \left(\frac{\eta}{h} \right) = 0 \text{ (下層)} \text{ 及 } \frac{d\eta'}{dt} \left(\frac{\eta'}{H-h} \right) = 0 \text{ (上層)} \quad (78)$$

或 $\frac{d\eta}{dt} - \frac{\eta}{h} \frac{dh}{dt} = 0$ 及 $\frac{d\eta'}{dt} + \frac{\eta'}{H-h} \frac{dh}{dt} = 0$ (79)

由地衡風近似 (13), 可得

$$\nabla_p^2 \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{f}{g} \left(u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{f\eta}{gh} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad (80)$$

$$\text{及 } \nabla_p^2 \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{f}{g} \left(u' \frac{\partial \eta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \eta'}{\partial y} \right) - \frac{f\eta'}{g(H-h)} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u' \frac{\partial h}{\partial x} + v' \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad (81)$$

$$\text{由靜力學方程式, 可得 } Z = (1-\epsilon)h + \epsilon Z' - \frac{p-p'}{gp}, \quad \epsilon = \frac{\rho'}{\rho} < 1 \quad (82)$$

若從 (80), (80) 及 (82) 式消去 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial z'}{\partial t}$, 可得

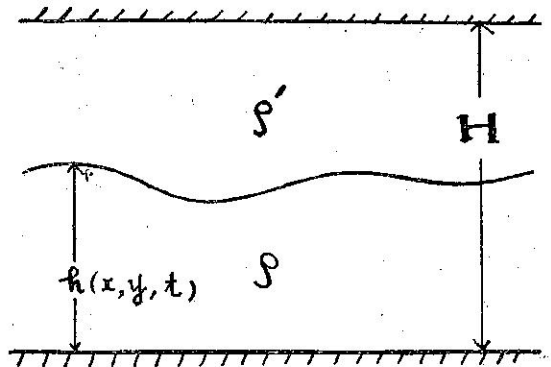
$$\nabla_p^2 \frac{\partial h}{\partial t} - a(x, y) \frac{\partial h}{\partial t} + q(x, y) = 0 \quad (83)$$

$$\text{其中 } a(x, y) = \frac{f}{(1-\epsilon)g} \left\{ \frac{\eta}{h} - \epsilon \frac{\eta'}{H-h} \right\} \quad (84)$$

$$q(x, y) = \frac{f}{(1-\epsilon)g} \left\{ u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - \epsilon \left(u' \frac{\partial \eta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \eta'}{\partial y} \right) - \left(\frac{\eta}{h} + \frac{\eta'}{H-h} \right) \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right\} \quad (85)$$

故此模型之數值計算，可由下述之操作完結之。即首先由實測值求出 $a(x, y)$ 及 $q(x, y)$ 代入 (83) 式，而求其解 $\frac{\partial h}{\partial t}$ 。後來此 $\frac{\partial h}{\partial t}$ 再代入 (80) 及 (81) 式，求之等方程式之解 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial z'}{\partial t}$ ，則可由時間的外插繪成預報圖。

Phillips [21] 應用此模型於二層之異速度均質一般流中，討論擾動波之動向。關於長波，其結果與 Charney 之參次元的考察者 [5]，及平流模型者完全一致。即得到波長大於極限波長時穩定，而小時不穩定之性質。若波長一直變小。於平流模型，其擾動波之生長率一直增大。但於 Phillips 之二層模型，其生長率不一直增大。而增大至其極大值後漸減少至零。故 Phillips 之二層模型對很小波長之擾動波，可維持穩定之狀態，這部頻率分布與 Eady [13] 之三次元的斜壓流的研究結果者，完全一致。其全部頻率分布與 Fjørtoft [17] 之能量的考察者，亦完全一致。這個事實表示二層模型與三次元的大氣有力學上之相似。但是從幾何學的形狀而論，實際大氣



(第二圖)

與二層模型裏，沒有適當之形狀的對應。故此點為二層模型之最大缺點。

九、 $2\frac{1}{2}$ 次元模型 ($2\frac{1}{2}$ -dimensional model)

1952年 Eady [14] 擴張平流模型及二層模型之思想，設計所謂 $2\frac{1}{2}$ 元模型。若從渦度方程式(73)及連續方程式(3)消去水平輻散項 $\nabla \cdot \mathbf{V}$ 且假定 $\zeta \ll f$ ，可略而不計，可得

$$\frac{d\eta}{dt} = f \frac{\partial w}{\partial z} \quad (86)$$

若取上式之地面 ($Z = -Z_0$) 至大氣上限 ($Z = Z_0$) 之積分可得

$$\int_{-Z_0}^{Z_0} \frac{d\eta}{dt} dZ = f \int_{-Z_0}^{Z_0} \frac{\partial w}{\partial Z} dZ = 0 \quad (87)$$

應用 Sutcliffe [27, 28] 之研究結果，假定任意高度 Z 之風速場可由平均運動及相對運動之兩流線函數 ψ 及 ψ_T 決定，即

$$\nabla(u, v) = \nabla_0(u_0, v_0) + \frac{Z}{Z_0} \nabla_1(u_1, v_1) = -(\nabla\psi + \frac{Z}{Z_0} \nabla\psi_T) \times \mathbf{K} \quad (88)$$

$$\text{故 } \zeta_0 = \mathbf{K} \cdot \nabla \times \nabla_0 = \nabla^2 \psi; \quad \zeta_1 = \mathbf{K} \cdot \nabla \times \nabla_1 = \nabla^2 \psi; \quad \zeta = \mathbf{K} \cdot \nabla \times \nabla = \zeta_0 + \frac{Z}{Z_0} \zeta_1. \quad (89)$$

若上述之關係代入(87)式可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-Z_0}^{Z_0} \left\{ \left[-\frac{\partial}{\partial t} + (u_0 + \frac{Z}{Z_0} u_1) \frac{\partial}{\partial x} + (v_0 + \frac{Z}{Z_0} v_1) \frac{\partial}{\partial y} \right] (\zeta_0 + \frac{Z}{Z_0} \zeta_1) + (v_0 + \frac{Z}{Z_0} v_1) \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dZ \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta_0 + \frac{1}{3} (u_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_1 \frac{\partial}{\partial y}) \zeta_1 + v_0 \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \quad (90)$$

$$\text{故 } \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) (f + \zeta_0) = -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial \psi_T}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_T}{\partial y} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right) = -\frac{1}{3} J(\psi_T, \zeta_1) \quad (91)$$

$$\text{或 } -\nabla^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \frac{1}{3} J(\psi_T, \nabla^2 \psi_T) \quad (92)$$

其中 J 表 Jacobian, Eady 命名上式右邊之第三項為發達頂 (Development term)。令 $\psi_T = \frac{gZ_0}{f} \bar{S}$, $\bar{S} = \ln \theta$ (一表平均值) (93)

$$\text{即 } S = \bar{S} + \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial Z} \right) Z = \frac{f}{gZ_0} \psi_T + GZ \quad (94)$$

其中 $G = \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial Z} \right)$ 為平均靜穩定度。故 ∇ 變成溫度風

$$\frac{\partial \nabla}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ -\frac{Z}{Z_0} \nabla \psi_T \times \mathbf{K} \right\} = -\frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ Z \nabla (S - GZ) \times \mathbf{K} \right\} = -\frac{g}{f} \nabla S \times \mathbf{K} \quad (95)$$

若應用絕熱變化之假定，從(94)式可得

$$\frac{dS}{dt} = 0 = \frac{f}{gZ_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_T + GW \quad (96)$$

取上式之 $-Z_0$ 至 Z_0 之積分，且假定 $W = W_0 \left(1 - \frac{Z}{Z_0}\right) \left(1 + \frac{Z}{Z_0}\right)$ (W_0 為大氣中央 ($Z=0$) 之垂直風速)，可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_T = -\frac{g}{2f} \cdot G \cdot \int_{-Z_0}^{Z_0} W dZ = -\frac{g \cdot G}{f} \frac{2}{3} Z_0 W_0. \quad (97)$$

若求 (86) 式之 $-Z_0$ 至 0 及 0 至 Z_0 之積分的差，可得

$$-\frac{2f}{Z_0} W_0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta_1 + \left(u_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta_0 + v_1 \frac{\partial f}{\partial y} \quad (98)$$

從(97)及(98)兩式消去 w_0 ，可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_T = \frac{1}{3} \frac{gG}{f^2} Z_0^2 \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta_1 + \left(u_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta_0 + v_1 \frac{\partial f}{\partial y} \right\} \quad (99)$$

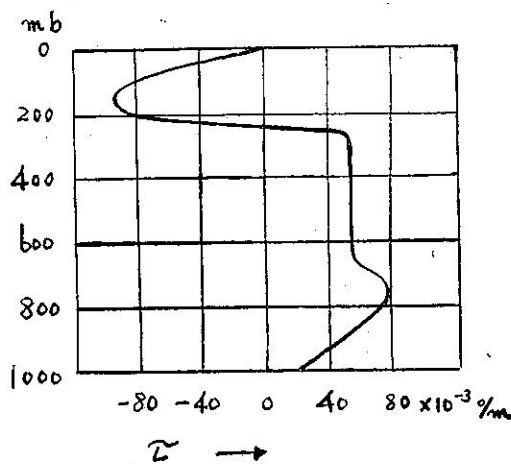
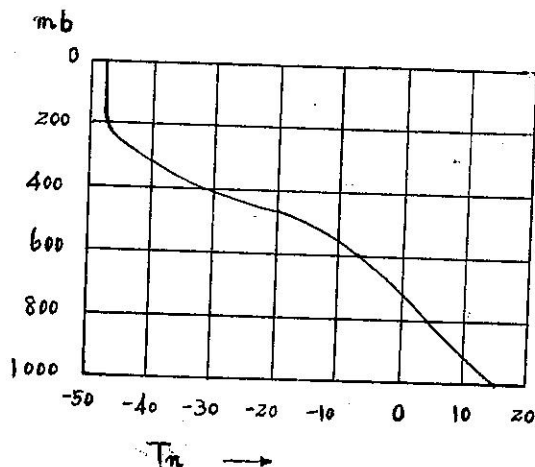
若令無次元數 $b = \frac{gG}{f}$ ，且應用(88)式之關係可得

$$\left(\frac{3}{bZ_0^2} - \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial \psi_T}{\partial t} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi_T}{\partial x} + J(\psi_T, \nabla^2 \psi) + J(\psi, \nabla^2 \psi_T) - \frac{3}{bZ_0^2} J(\psi, \psi_T) \quad (100)$$

總之，(92)及(100)兩式之右邊都是既知函數，故由 Poisson 微分方程式(92)可求出 $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ ，而由 Helmholtz 微分方程式 (100) 可求出 $\frac{\partial \psi_T}{\partial t}$ ，達成數值預報。

十、連續二參變數模型 (Continuous two parametric model)

Eliassen [16] 設計之連續二參變數模型，從物理的立場而論，與 Eady 之 $2\frac{1}{2}$ 次元模型無異。唯不分大氣為兩層討論連續的大氣之差異而已。同時與 Eliassen 完全獨立，Sawyer 及 Bushby [24] 設計同類之模型。以後按 Eliassen 之理論說明之。

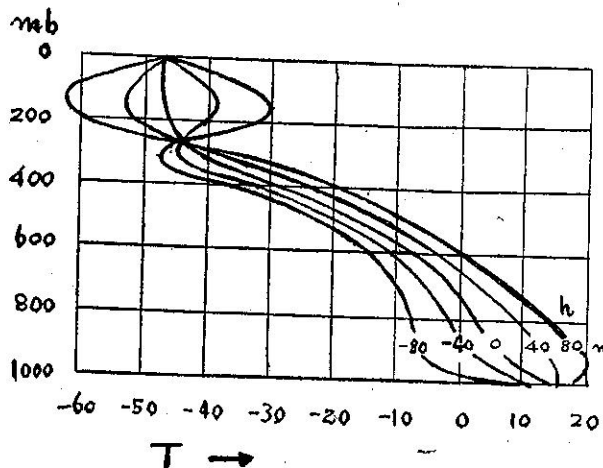


第3圖 正常溫度分布函數 $T_n(p)$ 。

第4圖 函數 $\tau(p)$

假定垂直溫度分布 $T(p)$ 為 $T(p) = T_n(p) + \tau(p)(h - h_n)$ (101)

其中 h 為決定溫度分布之參變數； h_n 為常數； $T_n(p)$ 為如第3圖之正常 (Normal) 溫度分布函數； $\tau(p)$ 為如第4圖之函數。故對種種 h 值，溫度分布可繪成如第5圖。對應 (101) 式之比容 ρ^{-1} 及等壓面高度 Z 之關係式為



第5圖 氣溫分布函數 $T(p)$ 。

$$\rho^{-1}(x, y, p, t) = R \frac{T_n(p)}{p} + R \frac{\tau(p)}{p} [h(x, y, t) - h_n] \quad (102)$$

$$Z(x, y, p, t) = \bar{Z}(x, y, t) + H(p) + A(p) [h(x, y, t) - h_n] \quad (103)$$

式中 $\bar{Z}$ 表平均值； R 表氣體常數； $H(p)$ 及 $A(p)$ 定義如下

$$H' = -\frac{RT_n(p)}{gp}, \quad \bar{H} = 0 \quad (104)$$

$$A' = -\frac{R\tau(p)}{gp}, \quad \bar{A} = 0 \quad (105)$$

故三元場 $Z(x, y, p, t)$ ，現在可由 $\bar{Z}$ 及 h 兩個水平場表示之。從 (103) 式，可得地衡風及近似之相對渦度為

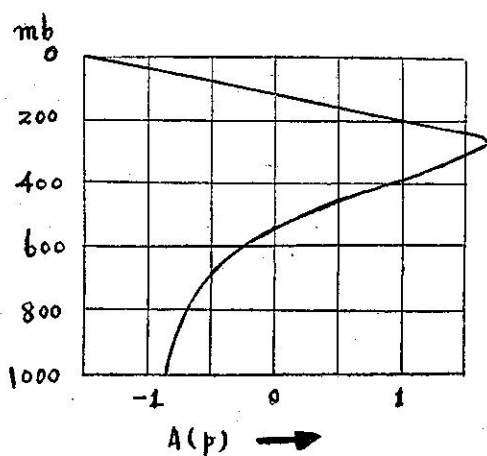
$$\nabla(x, y, p, t) = \bar{\nabla}(x, y, t) + A(p) \nabla_T(x, y, t) \quad (106)$$

$$\zeta_P(x, y, p, t) = \bar{\zeta}_P(x, y, t) + A(p) \zeta_T(x, y, t) \quad (107)$$

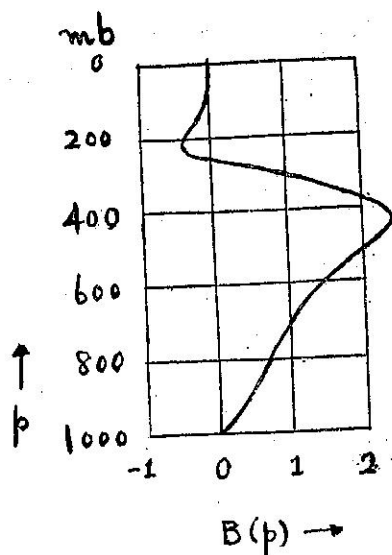
其中 $\bar{\nabla}$, $\bar{\zeta}_P$, $\bar{\zeta}_T$ 及 $\bar{\zeta}_T$ 定義如 (68) 及 (69) 式，而 $A(p)$ 可繪成如第6圖。關於垂直方向之運動，若令 $B(p)$ 為如第7圖之函數，即可取 $w_P(x, y, p, t) = B(p)w(x, y, t)$ 。

若 (102), (106) 及 (108) 式代入熱力學方程式 (15) 可得

$$\frac{\tau}{T_n} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \nabla h \right) + \frac{B}{\theta_n} \frac{d\theta_n}{dp} w = 0 \quad (109)$$



第6圖 函數A(p)



第7圖 函數B(p)

式中 θ_n 為對應 T_n 之位溫。故

$$w = -\nu \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \nabla h \right) \quad ; \quad \nu = \left(\frac{T}{T_n} \right) \cdot \left[\frac{B}{\theta_n} \frac{d\theta_n}{dp} \right]^{-1} \quad (110)$$

關於溫度方程式，由(21)式省略 ∇w_P 項可得

$$\left(\frac{\partial \xi_P}{\partial t} \right)_P + \bar{\nabla} \cdot \nabla_P (f + \xi_P) + w_P \frac{\partial \xi}{\partial p} - (f + \xi_P) \frac{\partial w_P}{\partial p} = 0$$

若代入(106), (107)及(108)式，可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \xi_P}{\partial t} \right)_P + A \left(\frac{\partial \xi_T}{\partial t} \right)_P + \bar{\nabla} \cdot \nabla_P (f + \xi_P) + A \{ \bar{\nabla} \cdot \nabla_P \xi_T + \nabla_T \cdot \nabla_P (f + \xi_P) \} \\ & + A^2 \nabla_T \cdot \nabla_P \xi_T - B' (f + \xi_P) w + (A'B - AB') \xi_T w = 0 \end{aligned} \quad (111)$$

令上式之左邊為 $M(x, y, p, t)$ ，且假定 x, y ，及 t ，則 M 變成 p 之函數。為減少溫度方程式之誤差，取關於 p 之線型回歸方程式 (Linear regression function) $L(p) \equiv 0$ ，使 $\{L(p) - M(p)\}^2 = \text{極小}$ ，即

$$\text{可得 } \bar{M} = 0, \text{ 及 } p\bar{M} - \bar{p} \cdot \bar{M} = 0 \quad (112)$$

代入(111)及(110)之關係，可得

$$\left(\frac{\partial \xi_P}{\partial t} \right)_P + \bar{\nabla} \cdot \nabla_P (f + \xi_P) + a \nabla_T \cdot \nabla_P \xi_T - g \xi_T \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_P + \bar{\nabla} \cdot \nabla_P h \right\} = 0 \quad (113)$$

$$\left(\frac{\partial \xi_T}{\partial t} \right)_P + \nabla_T \cdot \nabla_P (f + \xi_P) + \bar{\nabla} \cdot \nabla_P \xi_T + b \nabla_T \cdot \nabla_P \xi_T - r (f + \xi_P + A^* \xi_T) \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_P + \bar{\nabla} \cdot \nabla_P h \right\} = 0 \quad (114)$$

$$\text{其中 } a = \bar{A}^2, \quad b = \frac{\bar{P} \bar{A}^2 - \bar{P} \bar{A}^2}{\bar{P} \bar{A}}, \quad q = 2\nu \bar{A}' \bar{B}$$

$$r = \frac{\nu \bar{B}}{\bar{P} \bar{A}}, \quad A^* = -\frac{1}{\bar{B}} (\bar{A} \bar{B} - 2 \bar{P} \bar{A}' \bar{B} - 2 \bar{P} \bar{A}' \bar{B}) \quad (115)$$

若(68)及(69)式代入(113)及(114)式，可得關於 $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_P$ 及 $\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_P$ 之線型微分方程式。故可應用於數值預報。

若令氣壓 p_1 及 p_2 之渦度平流 J_1 及 J_2 為

$$\begin{aligned} J_1 &= (\bar{\nabla} + A_1 \bar{\nabla}_T) \cdot \nabla_P (f + \xi_P + A_1 \xi_T) \\ J_2 &= (\bar{\nabla} + A_2 \bar{\nabla}_T) \cdot \nabla_P (f + \xi_P + A_2 \xi_T) \end{aligned} \quad (116)$$

式中 $A_1 = A(p_1)$ 及 $A_2 = A(p_2)$ 為 $A^2 - bA - a = 0$ 之根。即(113)

及 (114) 式中之平流項可簡化為

$$\bar{\nabla} \cdot \nabla_P(f + \bar{\zeta}_P) + a \bar{\nabla}_T \cdot \nabla_P \zeta_T = \frac{A_2 J_1 - A_1 J_2}{A_2 - A_1} \quad (117)$$

$$\bar{\nabla}_T \cdot \nabla_P(f + \bar{\zeta}_P) + \bar{\nabla} \cdot \nabla_P \zeta_T + b \bar{\nabla}_T \cdot \nabla_P \zeta_T = \frac{J_1 - J_2}{A_1 - A_2} \quad (118)$$

根據 Smebye [16] 之計算，預報方程式 (113) 及 (114) 之各係數為

$$\begin{aligned} a &= 0.65, \quad b = 0.74, \quad q = 0.89 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1} \\ r &= 0.76 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}, \quad A^* = 0.85 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} a &= 0.65, \quad b = 0.74, \quad q = 0.89 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1} \\ r &= 0.76 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}, \quad A^* = 0.85 \end{aligned}} \right\} (119)$$

1953 年 Bolin [3] 擴張 Eliassen 之理論，(103) 式之 Z 及 (108) 式之 w_P 由

$$Z(x, y, p, t) = H(p) + \sum_{n=1}^N Z_n(x, y, t) \cdot A_n(p)$$

$$W_P(x, y, p, t) = \sum_{m=1}^M W_m(x, y, t) \cdot B_m(p)$$

(H 為種種氣壓面之高度) 代替，而提唱多參變數模型。(Multiple-parameter model)

十一、 $2 + \frac{n-1}{n}$ 次元模型 c

Charney 及 Phillips [11] 擴張 Eady 之理論，提唱 $2 + \frac{n-1}{n}$ 次元模型。從 (75) 式及所謂 Margles 之式

$$\frac{1}{F} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = \frac{1}{F} \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} = \text{Const.} \quad \text{消去 } F, \text{ 可得 } \quad \frac{d\eta}{dt} \left(\eta \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \right) = 0.$$

若使用地衡風 $\bar{\nabla}_s$ 代替 $\bar{\nabla}$ ，且令 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\nabla}_s \cdot \nabla$ ，可得

$$\frac{D}{Dt} \left(\eta \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \right) = 0 \quad \text{或} \quad \frac{1}{\eta} \frac{D\eta}{Dt} + \left(\frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \right)^{-1} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \right) = 0 \quad (120)$$

$$\text{再令 } S = - \left(\frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \right), \text{ 上式可變成 } \quad \frac{D \ln \eta}{Dt} = S^{-1} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{D \ln \theta}{Dt} \right). \quad (121)$$

現在，大氣上限 ($P=0$) 至地面 ($P=P_0$)，分割成為 n 個等間隔 δp 之層，且各層中央之種種物理量，加添字 K ($K=1, 2, \dots, n$) 表示。即 $P_1 = \frac{1}{2} \delta p$, $P_n = P_0 - \frac{1}{2} \delta p$ 。同時令 $K = \frac{1}{2}$ 及 $K = n + \frac{1}{2}$ 為大氣上限

($P_{\frac{1}{2}} = 0$) 及地面 ($P_{n+\frac{1}{2}} = P_0$) 之添字。且定義運算素 G_K 為 (Q 為任意物理量)

$$G_K Q = Q_{K+\frac{1}{2}} - Q_{K-\frac{1}{2}} \quad \text{或} \quad G_{K-\frac{1}{2}} Q = Q_K - Q_{K-1} \quad (122)$$

$$\text{則從 (121) 式可得 } \quad \left(\frac{D \ln \eta}{Dt} \right)_K = (S \delta p)^{-1} G_K \left(\frac{D \ln \theta}{Dt} \right) \quad (123)$$

若令 $\varphi = gZ$ (geopotential)，從位溫之定義 $\ln \theta = \text{Const} + \frac{C_v}{C_p} \ln p + \ln \left(- \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)$ 可得

$$\left(\frac{D \ln \theta}{Dt} \right)_{K+\frac{1}{2}} = \frac{D_{K+\frac{1}{2}}}{Dt} (\ln G_{K+\frac{1}{2}} \varphi), \quad \text{但 } K \neq 1, n. \quad (134)$$

$$\text{故 (123) 式可變成 } \quad \left(\frac{D \ln \eta}{Dt} \right)_K = (S \delta p)^{-1} \left\{ \frac{D_{K+\frac{1}{2}}}{Dt} (\ln G_{K+\frac{1}{2}} \varphi) - \frac{D_{K-\frac{1}{2}}}{Dt} (\ln G_{K-\frac{1}{2}} \varphi) \right\} \quad (135)$$

若使用地衡風近似 $\bar{\nabla}_s = f^{-1} \mathbf{k} \times \nabla \varphi$ 及近似置換 $\varphi_K = \frac{1}{2} (\varphi_{K+\frac{1}{2}} - \varphi_{K-\frac{1}{2}})$ 可得

$$\left\{ \frac{D \ln (\varphi_{K+1} - \varphi_K)}{Dt} \right\}_{K+\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{D \ln (\varphi_{K+\frac{1}{2}} - \varphi_K)}{Dt} \right\}_{K+1} = \left\{ \frac{D \ln (\varphi_{K+1} - \varphi_K)}{Dt} \right\}_K$$

$$\text{故 (135) 式可變成 } \quad \left(\frac{D \ln \eta}{Dt} \right)_K = (S \delta p)^{-1} \left(\frac{D}{Dt} \right)_K \ln \left(\frac{\varphi_{K+1} - \varphi_K}{\varphi_K - \varphi_{K-1}} \right)_K \quad (136)$$

$$\text{或} \quad \left(\frac{D}{Dt} \right)_K \left\{ \eta_K \cdot \left(\frac{\varphi_{K+1} - \varphi_K}{\varphi_K - \varphi_{K-1}} \right)^{-L} \right\} = 0 \quad (137)$$

其中 $L = (S \delta p)^{-1} = - \left(\delta p \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \right)^{-1}$, $K \neq 1, n$ 。同時從境界條件

$$\lim_{p \rightarrow 0} W_P = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{D \ln \theta}{Dt} = W_P(p_0) = \left(\frac{D \ln \theta}{Dt} \right)_{P=P_0} = 0$$

可求得最低層 ($K=n$) 及最上層 ($K=1$) 之方程式為

$$\left(\frac{D}{Dt} \right)_n \frac{\eta_n}{(\varphi_{n-1} - \varphi_n)^{-L}} = 0 \quad (138) \text{ 及 } \left(\frac{D}{Dt} \right)_1 \frac{\eta_1}{(\varphi_1 - \varphi)^{-L}} = 0 \quad (139)$$

(137), (138) 及 (139) 三式為 $2 + \frac{n-1}{n}$ 次元模型之方程式。同時 Charney 及 Phillips 證明, 此模型是由 n 個順壓層構成, 故 $n=1$ 時表順壓模型, $n=2$ 時表二層模型, 或可證明數學上與 $2 - \frac{1}{2}$ 次元模型相等。

(137), (138) 及 (139) 之方程式群, 除 $n=1$ 以外很難計算, 故由經驗則

$$\frac{D}{Dt} \ln \theta = \frac{D}{Dt} \ln \rho^{-1} \approx \frac{1}{\rho^{-1}} \frac{D \rho^{-1}}{Dt} = \frac{1}{\rho^{-1}} \frac{D}{Dt} \frac{\partial \varphi}{\partial p} \text{ 及 } \eta \approx \bar{\eta} \text{ (一表平均值)}$$

$$\text{可簡化為 } \left(\frac{D}{Dt} \right)_K (\eta_K + \pi_K (\varphi_{K+1} - \varphi_K) - \pi_{K-1} (\varphi_K - \varphi_{K-1})) \eta \quad K=1, 2, \dots, n. \quad (140)$$

其中 $K=1, n$ 時 $\pi_K=0$

$$K \neq 1, n \text{ 時 } \pi_K = \eta^+ (\bar{p}_{K+\frac{1}{2}} - \delta p)^{-1}$$

十二、應用緩和法之數值積分法。

1953 年 Charney 及 Phillips [11] 為提高計算能率, 乃應用 Southwell [25] 之緩和法 (Relaxation method) 案出一新計算方法。從(45)式可得 $Z_{i+1,j} + Z_{i-1,j} + Z_{i,j+1} + Z_{i,j-1} - 4Z_{i,j} - d^2 \xi_{i,j} = 0$ (141)

若假定 $\xi_{i,j}$ 為既知量, 並取任意值 $Z_{i,j}^0$ 代入上式, 其右邊通常不等於零, 若令 $R_{i,j}^0$ 為

$$Z_{i+1,j}^0 + Z_{i-1,j}^0 + Z_{i,j+1}^0 + Z_{i,j-1}^0 - 4Z_{i,j}^0 - d^2 \xi_{i,j} = R_{i,j}^0 \quad (142)$$

($i=1, 2, \dots, p-1, \quad j=1, 2, \dots, q-1$)

則, $Z_{i,j}^0$ 等稱初期推定值 (Initial guess); $R_{i,j}^0$ 稱剩餘值 (Residual)。若變換推定值, 而反覆求 $Z_{i,j}^v$, 使 $R_{i,j}^v$ 非常接近零時, 其推定值 $Z_{i+1,j}^v, Z_{i-1,j}^v, Z_{i,j+1}^v, Z_{i,j-1}^v, Z_{i,j}^v$ 是很接近 (141) 式中之正確值。這種近似值之求法稱 Southwell 之緩和法。

推定值之選擇法中 Richardson 之方法最簡單。他令 $(v+1)$ 次之推定值為 $Z_{i,j}^{v+1} = Z_{i,j}^v + \frac{1}{4} R_{i,j}^v$ (143) 則, 加剩餘值之四分之一之補正。由(142)式可得

$$Z_{i+1,j}^v + Z_{i-1,j}^v + Z_{i,j+1}^v + Z_{i,j-1}^v - 4(Z_{i,j}^v + \frac{1}{4} R_{i,j}^v) - d^2 \xi_{i,j} = R_{i,j}^v - R_{i,j}^v = 0 \quad (144)$$

可見, Richardson 之方法, 不擾亂 $Z_{i,j}^v$ 值而有誘導 (i,j) 點之剩餘成為零之作用。若所有之 Z 值, 同時由(143)式補正, 即其剩餘 $R_{i,j}^{v+1} \neq 0$, 但是可嚴密的證明, 次數 v 增加 Z 可收斂其正確值。Southwell 又指示(143)式之斷片的使用, 比同時使用可增加其收斂速度。且證明選大於 $\frac{1}{4}$ 之變數 α 代替 $\frac{1}{4}$ 又可收獲同樣之效果。未記之方法通稱為過緩和 (Overrelaxation) 法。若個定 α 值, 則變成 Frankel [20] 命名之擴張的 Liebmann 法 (Extrapolated Liebmann method)。此方法可由反覆方程式

$$Z_{i,j}^{v+1} = Z_{i,j}^v + \alpha R_{i,j}^{v+1} \quad (145)$$

定義。其中重指標 $v, v+1$ 指示, 使用指標 v 或 $v+1$ 。以據添字 $i, i+1, j, i, j+1$ 或 $i-1, j, i, j-1$, 之區別而定之。若誤差 $E_{i,j}^v = Z_{i,j}^v - Z_{i,j}$ 滿足對應 (141) 式之同次方程式, 可記述為 $E^{v+1} = K(\alpha) E^v$ 式中 $K(\alpha)$ 為 α 之線型運算素 (Lined operator)。

由上述之理論, 現在可詳細記述 Charney 及 Phillips 之新計算法如下:

第一步驟 首先準備 $\xi_{i,j}^{v-1}$ 及 $\xi_{i,j}^v$, 繼之取 $Z_{i,j}^{v-1}$ 為初期推定值, 使用反覆方程式 (145), 求出(141)式之解 $Z_{i,j}^v$ 。

$$\text{第二步驟 由方程式 } \left(-\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{i,j}^v = (2d)^{-2} \{ (\eta_{i+1,j}^v - \eta_{i-1,j}^v) (Z_{i,j+1}^v - Z_{i,j-1}^v) - (\eta_{i,j+1}^v - \eta_{i,j-1}^v) (Z_{i+1,j}^v - Z_{i-1,j}^v) \} \quad (146)$$

求出 $\left(-\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{i,j}^v$ 。

第三步驟 由時間的外插

$$\xi_{i,j}^{t+1} = \xi_{i,j}^{t-1} + E(\tau) \Delta t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{i,j}^t, \quad \begin{matrix} \tau = 0 \text{ 時} & \xi_{i,j}^1 = \xi_{i,j}^0, & E(0) = 1. \\ \tau \neq 0 \text{ 時} & & E(\tau) = 2. \end{matrix} \quad (147)$$

求出 (i,j) 點之 $\xi_{i,j}^{t-1}$ 而繪成預報圖。

上記之新方法不但對順壓方程式之計算很便利，而對三次元化模型中出現之變數係數之橢圓型微分方程式也可應用。

十三、地衡風近似之再檢討。

1955 年 Bolin [4] 使用 Charney 之順壓模型及緩和法，實施 24 小時，48 小時及 72 小時之數值預報實驗。結果一日，二日及三日之預報與實測之相關係數 (Correlation coefficient) 各為 0.85, 0.82 及 0.70。同時結論，關於一日至二日之短期預報，省略斜壓效果以誤差之主要原因。而關於三日之中間預報 (Extending forecast)，斜壓效果之省略又原因之一，但是主要原因不在此。其中地衡風近似之誤差很重要，以後檢討之。

元來，由 Charney [6] 及 Thompson [29] 之初步研究，使用地衡風近似於渦度方程式，可濾過音波重力波等小波長之波動。但由上述之數值預報實驗，Bolin 發見，地衡風近似不但不能濾過重力波，而引起實際大氣中不存在之振幅最當大之重力慣性擾動 (Energetic-gravitational perturbation)。為克服這種缺點，Charney [12] 提倡以平衡方程式 (Balance equation) 代替地衡風方程式。

若運算算 $\nabla \cdot$ 應用於 (1) 式，且考慮靜力學方程式，可得

$$\nabla^2 \phi = f \zeta + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) - (K \times \nabla) \cdot \nabla f \quad (148)$$

式中 $\phi = gZ$ (geopotential)，且假定大氣運動為無幅散。故可使用流線函數 ψ 為 $\nabla = -\nabla \psi \times K$ (149)

$$\text{故上式可變成} \quad \nabla^2 \phi = f \nabla^2 \psi + \nabla \psi \cdot \nabla f - \frac{2}{f} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} \quad (150)$$

此式為 Fjörtoft 求出之所謂平衡方程式 (Balance equation)。此方程式為 Monge-Ampère 型之微分方程式，故

$$\frac{\nabla^2 \phi}{f} + \frac{f}{2} > 0$$

之條件下，可求出其解，即表示地衡風近似之相對渦度 $\frac{\nabla^2 \phi}{f}$ 大於 $-\frac{f}{2}$ 之條件下，可解之。從 (150) 式中，省略非線型項及科氏參變數之梯度項可得

$$\nabla^2 \phi = f \zeta \quad (151)$$

積分上式可得地衡風方程式 (13)，故平衡方程式 (150) 為地衡風方程式之擴張。同時 Charney 從理論上，證明平衡方程式比地衡風方程式之優點。

但其數值預報上之實地應用，待今後之研究才可判斷其優劣。

十四、圖解天氣預報法。

1952 年 Fjörtoft [19] 以順壓模型為基礎，考索一種圖解天氣預報法。若使用面積約為 10^7 km^2 之天氣圖，以 24 小時之預報，圖解法可由一個人以三小時之時間完成其操作。此方法之詳細介紹已刊載本學報上 [第一卷第一期：36—38，第二期：7—14，第四期：16—28]，故在此不再記述。去年 (1955 年) Haug [4] 使用北大西洋之資料，實施圖解法之 48 小時預報，而與使用瑞典之電子計算器 (BESK) 之 Bolin 之數值預報實驗比較，關於實測及預報值之相關係數，得到下表之結果。

	25-27 日	26-28 日	27-29 日	28-30 日	平均	(1954 年 9 月)
BESK	0.58	0.77	0.64	0.83	0.71	
圖解法	0.70	0.60	0.60	0.71	0.65	

Haug 又求出兩方法之槽線及脊線移動之預報誤差如下。

	29-1 日	30-2 日	1-3 日	2-4 日	平均	(1954 年 9-10 月)
槽線移動誤差	BESK 9%	20%	7%	26%	15.5%	
	圖解法 23%	77%	18%	33%	37.7%	
脊線移動誤差	BESK 27%	21%	7%	10%	16.2%	
	圖解法 10%	18%	17%	4%	12.2%	

關於槽線之預報，數值預報成果為佳，但是對脊線之預報，圖解法占優。平均上說，圖解法之正確率尚不及數值預報之正確率。Hang 指示，若預報時間分成 4 至 5 小時之小區分，而反覆使用圖解法，可提高預報成果至數值預報之正確率。

1953 年 Bolin [3] 以 Eliassen 之連續二參變數模型為基礎（即考慮傾壓效果）擴張 Fjörtoft 之圖解法。

若 (117) 及 (118) 式代入 (113) 及 (114) 式可得

$$\left(\frac{\partial \bar{\zeta}_P}{\partial t}\right)_P + \frac{A(p_2)J_1 - A(p_1)J_2}{A(p_2) - A(p_1)} = 0 \quad (152)$$

$$\left(\frac{\partial \zeta_T}{\partial t}\right)_P + \frac{J_1 - J_2}{A(p_2) - A(p_1)} - r f \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_P - \bar{\nabla} \cdot \nabla_P h \right\} = 0 \quad (153)$$

若 (153) 式乘 $A(p_1)$ 或 $A(p_2)$ 而加 (152) 式，且考慮 (106)，(107) 及 (116) 式之關係可得

$$\frac{d_1}{dt} (\zeta_1 + f) - A(p_1) \cdot r f \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_P + \bar{\nabla} \cdot \nabla_P h \right\} = 0 \quad (154)$$

$$\frac{d_2}{dt} (\zeta_2 + f) - A(p_2) \cdot r f \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_P + \bar{\nabla} \cdot \nabla_P h \right\} = 0 \quad (155)$$

式中添字 1 及 2 表對應 p_1 及 p_2 之種種量。故上兩式可綜合為

$$\frac{d_i}{dt} (\zeta_i + f) - A(p_i) r f \frac{d_i h}{dt} = 0 \quad (i=1,2) \quad (156)$$

若定義運算素一為 (α 為任意物理量)

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{4} \{ \alpha(x+d, y) + \alpha(x-d, y) + \alpha(x, y+d) + \alpha(x, y-d) \} \quad (157)$$

即相對渦度 ζ_i 之定差方程式為 $\zeta_i = \frac{4gm^2}{fd^2} (\bar{\zeta}_i - \zeta_i) \quad (i=1,2) \quad (158)$

如 Fjörtoft [19]，定義緯度 ϕ 之函數 $J(\phi)$ 為

$$J(\phi) = \int \frac{4 \Omega^2 d^3 \sin \phi \cos \phi}{m^2(\phi) 4g} d\phi \quad (159)$$

可得 (156) 式之定差方程式為

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_P \{ \bar{\zeta}_i - \zeta_i - K_i(\phi) (Z_1 - Z_2) \} = -\bar{\nabla}_i \cdot \nabla \{ \bar{\zeta}_i - \zeta_i + J(\phi) \} K_i(\phi) \bar{\nabla}_i \cdot \nabla (Z_1 - Z_2) \quad (160)$$

式中 $K_i(\phi) = A(p_i) \frac{r \cdot f^2 d^2}{4gm}$ ， $h = Z_1 - Z_2$ 。 (161)

若令 G (定數) 為 $Z_1 - Z_2$ 之廣區域平均值，且假定 $\nabla K_i(\phi)$ 小而不計可得

$$K_i(\phi) \bar{\nabla}_i \cdot \nabla (Z_1 - Z_2) = K_i(\phi) \bar{\nabla}_i \cdot \nabla (Z_1 - Z_2 - G) \approx \bar{\nabla}_i \cdot \nabla \{ K_i(\phi) (Z_1 - Z_2 - G) \} \quad (162)$$

上式代入 (160) 式可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_P \{ \bar{\zeta}_i - \zeta_i + J(\phi) - K_i(\phi) (Z_1 - Z_2 - G) \} = -\bar{\nabla}_i \cdot \nabla \{ \bar{\zeta}_i - \zeta_i + J(\phi) - K_i(\phi) (Z_1 - Z_2 - G) \} \quad (i=1,2) \quad (163)$$

上記之兩方程式可應用於 Fjörtoft 之圖解法。根據 (119) 式之數值，可求出 p_1 及 p_2 為

$$p_1 \approx 350 \text{ mb} \quad p_2 = 825 \text{ mb}$$

可見，Bolin 之圖解法，不如 Fjörtoft 之圖解法應用於 500mb 高度圖上，而應用於 350mb 及 825mb 高度圖上為適宜。但是以預報業務之便利起見，Bolin 選 300mb 及 700mb 高度圖代替 350mb 及 825mb 高度圖，實行預報實驗，而具 Fjörtoft 之圖解法此較，得下表

		12 小時之實測及 預報值之相關係數	標準偏差 (Standard deviations)	
順壓模型 (Fjörtoft)	500mb 高度圖變化	0.72	實測	230 feet
			預報	190 "
斜壓模型 (Bolin)	300mb 高度圖變化	0.79	實測	460 "
	+700mb 高度圖變化		預報	440 "
	300mb 高度圖變化	0.72	實測	200 "
	-700mb 高度圖變化		預報	170 "

可見，使用 Bolin 之圖解法，即考慮斜壓效果，可稍提高預報之正確率。

十五、結 言

現有之數值預報，以絕熱假定為基礎，未考慮輻射等非絕熱變化及粘性等效果。根據 Charney 之研究，對一至二日之短期預報此等效果無重大影響，可省略。但是為長期預報或精密預報，將來仍要考慮之問題。實際上，現代之氣象學中，由輻射或由水汽變換之非絕熱效果及由亂流 (Eddy motion) 之運動量或熱量之輸送等物理學的機構，未能確立。故導入此等效果於數值預報，可以說是將來之大問題。若占在將來之理想數值預報之立場，現有之數值預報當然不完全。但是根據強固之物理學的基礎上之數值預報，與天氣預報之現狀比較，數值預報之研究，有排除過去之定性的氣象學，確立定量的精密科學之氣象學之作用。也可以說是為氣象學劃一時代之研究。

參 考 文 獻

- [1] Bjerknes, V., 1904: Das Problem von der Wettervorhersage, betrachtet vom Standpunkt der Mechanik und der Physik. Meteor. Zeit., 21: 1-7.
- [2] Berson, F. A., 1950: On the factors controlling the instability of long waves in zonal currents. Arkiv för Geofysik, Stockholm. I. No. 9.
- [3] Bolin, B., 1953 Multiple-parameter models of the atmosphere for numerical forecasting purposes. Tellus, 5, No. 2: 207-218.
- [4] Bolin, B., 1955 Numerical forecasting with the barotropic model. Tellus, 7, No. 1: 27-49.
- [5] Charney, J. G., 1947: The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. J. Meteor. 4, No. 5: 135-162.
- [6] Charney, J. G., 1948: On the scale of atmospheric motions. Geofys. Publ. 17, No. 2. 17pp.
- [7] Charney, J. G., 1949: On a physical basis for numerical prediction of large-scale motions in the atmosphere. J. Meteor. 6, No. 6: 371-385.
- [8] Charney, J. G., and Eliassen, A., 1949: A numerical method for predicting the perturbations of the middle latitude westerlies. Tellus, 1, No. 2: 38-54.
- [9] Charney, J. G., Fjørtoft, R., Von Neumann, J., 1950: Numerical integration of the barotropic vorticity equation. Tellus, 2, No. 4: 237-254.
- [10] Charney, J. G., 1951: Dynamic forecasting by numerical process. Compendium of Meteorology, A.M. S.: 470-482.
- [11] Charney, J. G., and Phillips, N. A., 1953: Numerical integration of the quasi-geostrophic equations for barotropic and simple baroclinic flows. J. Meteor. 10, No. 2: 71-99.
- [12] Charney, J. G., 1955: The use of the primitive equations of motion in numerical prediction. Tellus, 7, No. 1: 22-26.
- [13] Eady, E. T., 1949: Long waves and cyclone waves. Tellus, 1, No. 3: 33-52.
- [14] Eady, E. T., 1952: Note on weather computing and so-called $2\frac{1}{2}$ -dimensional model. Tellus, 4, No. 3: 157-167.
- [15] Eliassen, A., 1949: The quasi-static equations of motion with pressure as independent variable. Geofys. Publ. 17, No. 3. 44 pp.
- [16] Eliassen, A., 1952: Simplified models of atmosphere, designed for the purpose of Numerical weather prediction. Tellus, 4, No. 3: 145-156.
- [17] Fjørtoft, R., 1950: Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex. Geofys. Publ., 17. No. 6.

- [18] Fjørtoft, R., 1951 : Stability properties of large-scale atmospheric disturbances. Compendium of Meteorology, A. M. S. : 454-463.
- [19] Fjørtoft, R., 1952 : On a numerical method of integrating the barotropic vorticity equation. Tellus, 4, No.3 : 179-194.
- [20] Frankel, S. P., 1950 : Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations. Math. tables and other aids to computation, 4, No. 30 : 65-75.
- [21] Phillips, N.A., 1951 : A simple three-dimensional model for the study of large-scale extratropical flow patterns. J. Meteorol. 8, No.6 : 381-394.
- [22] Platzman, G. W., 1952 : Some remarks on high-speed automatic Computers and their use in Meteorology Tellus, 4, No.3 : 168-178.
- [23] Richardson, L. F., 1922 : Weather prediction by numerical process. Cambridge University Press, 236pp.
- [24] Sawyer, J. S. and Bushby, F. H., 1953 : Baroclinic model atmosphere suitable for numerical integration. J. Meteor., 10, : 51-49.
- [25] Southwell, R. V., 1946 : Relaxation methods in the theoretical Physics. Oxford, Clarendon Press. 248pp.
- [26] Starr, V. P., 1945 : A quasi- Lagrangian system of hydrodynamic equations. J. Meteor. 2. No.4 : 227-237.
- [27] Sutcliffe, R. C., 1947 : A contribution to the problem of development. Quart. J. R. Meteor. Soc., 73, 317-318, 370-383.
- [28] Sutcliffe, R. C., and A. G. Forsdyke., 1950 : The theory and use upper air thickness patterns in forecasting. Quart. J.R. Meteor. Soc., 76, : 189-217.
- [29] Thompson, P. D., 1952 : Notes on the theory of large-scale disturbances in atmospheric flow with applications to numerical weather prediction. Geophysical research papers No. 16. U. S. Air Force Cambridge Research Center. 106pp.
- [30] Sutcliffe, R. C., 1951 : The quasi-geostrophic advection wave in a baroclinic zonal current. Quart. J. R. Meteor. Soc. 77, p226.