

CWB/ARDC

Collected
Papers

NO-002

氣象科技研究中心 技術報告彙編

(科技顧問部分)

第1-2卷

交通部中央氣象局
氣象科技研究中心
中華民國七十五年八月

Atmospheric R&D Center
Central Weather Bureau
Ministry of Communications
TAIPEI, TAIWAN, R.O.C.
August 1986

序 言

中央氣象局自恢復建制以來，即以積極推行建教合作為業務方針之一。歷年來，均能循此途徑切實執行。尤以本局成立氣象科技研究中心以來，此項關係愈形密切。凡學術機構在教學上所需運用本局之設備與資訊，本局莫不坦誠與共，全力支援。各大學或研究所之畢業生凡願來局服務者，總極力羅致，優先錄用。而本局遇有諮詢事項，無論學理與實作，各學術機構之學者專家，無不悉心指導，匡贊鞭策，不遺餘力。更有進者，吾氣象學者，無論身處國內外，對於本局氣象科技業務之進展，熱心關懷，感蒙俞允兼任本局科技顧問，溯自本局引進大電腦，實施氣象業務全面電腦化以來，上述情況，有增無已。其盡心盡力之處，令人欽敬萬分。如此學術交流，水乳相融。在目前之經建範疇，亦尚不多見。此所以近年來本局業務得以寸進者，其功在此也。

茲以本局氣象科技研究中心成立有年，承諸本局兼任科技顧問，出示其研究報告，特專輯成卷，列為本局重要文獻之一，願學其精粹之點如下：

本局對於颱風侵襲及梅雨期大（豪）雨預報作業及警告發布辦法，歷經改進，行有年數。頃由曲顧問克恭密集觀察，實地訪問後，提供之檢討與建議報告，頗富鞭辟入裏之感，堪為本局氣象預報作業單位今後續謀改進服務之準繩。

在「非線性正模初始化與四維數據資料融入」一文，除評介其擁有紮實之物理與數學依據外，並預料本局發展數值天氣預報遲早亦將發生類似問題，值得研究人員早作準備，展開更實際之研究工作。

豪雨預報研究，為目前研究工作之重點，但就各種各次豪雨預報個案研究，各有其特性及形成之條件，究應如何從累積資料中，尋求預報之南針，最能道出預報人員分析有關資料時之艱辛及今後應循之方向，殊堪借鏡。

戚啓勳教授於本報告中專對梅雨鋒豪雨部分為文指出國內學者對此已有研究成果，可歸納為天氣學分析法與氣象統計法兩種，有關摘要一目了然，檢索稱便。

鑒於本局今後於數值天氣預報方面，可能經由不斷校驗進行客觀分析至實作之階段，但如何採用適當數量及性質之樣品資料，乃未來研究人員之課題，此在本報告內曾教授忠一之大作，有其啟發性之功能。

寒潮為臺灣地區四大災變天氣之一，其所引發之氣溫突變，常使農作與水產遭受重大之損失，其成因何在，經由蔡清彥教授應用日本預測圖，從事台灣寒潮預報之成效評估，發現台灣地區之寒潮，乃由於移動性高氣壓從貝加爾湖西方南下籠罩中國大陸所造成。故此文在各次寒潮個案之研究上深具參考價值。

以上各門專著，均與本局天氣預報業務息息相關，內容精闢，詮釋詳明，啓發發曠，彌足珍貴，爰謹爲序，藉伸謝悃。

吳 宗 堯

中華民國七十五年八月

目 錄

頁 次

序 言.....	吳宗堯
大(豪)雨預報作業程序及警告發布之檢討與建議.....	曲克恭 ... 1
非線性正模初始化與四維數據資料融入.....	
.....	洪秀雄、周思運、王錦華 ... 13
1981年5月28日、1983年5月31日及1984年6月3日	
北部豪雨的氣象因素比較.....	陳景森 ... 35
國內研究梅雨鋒豪雨之綜合簡介.....	戚啓勳 ... 47
最佳內插法及其他客觀分析方法的比較研究(一).....	曾忠一 ... 53
最佳內插法——氣象場的統計結構(二).....	曾忠一、林淑卿 ... 69
應用日本預測圖從事台灣寒潮預報成效評估.....	蔡清彥 ... 73

Contents

Preface.....	Tsung - yao Wu	
A Review and Some Suggestion of the Pcedures of the Heavy Rain Forecasting and Warning.....	Ko - kung Chu	1
Nonlinear Normalization Initialization and Four - Dimensional Data Assimilation.....	Siu - shung Hong , Sy - yun Chou , Ching - hwa Wang	3
The Comparision Study of Some Meteorological Factors for Flood Cases on May 28 1981 , May 31 1983 , June 3 1984		
.....	Ching - sen Chen	35
A Review of Mei - Yu Research in Taiwan, R. O. C	Chi - hsin Chi	47
A Comparative Study of Optimal Interpolation Method and Other Objective Analysis Methods: Part I.....	Chung - yi Tseng	53
Optimal Interpolation - Statistical Structure of Meteorological Fields. Part II	Chung - yi Tseng, Shou - ching Lin	69
An Evaluation of JMA's Prognostic Charts in Cold Surge Predictions of Taiwan Area	Ching - yen Tsay	73

大(豪)雨預報作業程序及警告發布之檢討與建議

曲克恭

中國文化大學

摘要

檢討中央氣象局在颱風(或熱帶低壓)侵襲期間及梅雨期中現行大(豪)雨預報作業狀況與警告發布辦法,並根據台灣地區現有之設備與可蒐集之氣象資料,建議可行之大(豪)雨預報作業程序及警告發布辦法,以增加預報準確度及警告發布時效。建議的作業程序及警告發布辦法主要乃以適當的守視制度,以補預報之不足,而守視較預報更為重要。

一、前言

台灣地區大(豪)雨最易發生之時機為颱風(或熱帶低壓)侵襲及梅雨期間梅雨鋒系統影響之際,其他季節偶有發生,但機率較小,故本檢討及建議主要針對颱風侵襲及梅雨期間大(豪)雨作業程序及發布方式。

關於檢討部分乃根據作者於民國73年8月1日至9月14日止,在中央氣象局工作14個工作天中訪問有關作業單位而完成者,由於淺薄的觀察,如有不當之處,尚乞在研討時指正,並請作業單位原諒。

作者曾於74年2月間隨國科會大型防災「劇烈區域性豪雨觀測與分析實驗計畫」考察小組訪問美國「國家劇烈風暴預報中心」(NSSFPC),因為作者從事氣象實際工作近三十年,對該中心的作業方式特別注意及感興趣,故將管見認為可取者一併納入原已撰就之作業程序中,希望獲借鏡之益。

二、現行大(豪)雨預報及守視作業狀況檢討

(一)大(豪)雨之定義

根據中央氣象局73年7月9日中象技字4176號函修正之突變天氣作業程序,其定義為:

大雨—每小時雨量超過15mm之連續性大雨,日雨量超過50mm,可能導致災害者。

豪雨—每小時雨量超過15mm之連續性大雨,日雨量超過130mm,可能導致災害者。

以上定義在事後分析研究及預報雨量時適用,但對作業單位,以日雨量之定義為守視之標準,有失時效,且時雨量與日雨量間之關係未明確說明。

(二)颱風(或熱帶低壓)侵襲期間雨量估計作業概況

中央氣象局「天氣預報標準作業規範」第五篇「颱風預報作業規範」對颱風之預測,警報之發布以及工作分配,皆有明確而完備的規定,但全部關係於颱風未來之動態預測,對由於颱風所引起之風雨預測及作業程序尚無規定,亦未指出可採用之方法。颱風路徑之預測固然重要,但是如何預測颱風所引起之風雨在台灣地區之分布乃公眾所最為重視者。颱風雨量之預測甚為困難,必須輔以時之守視作業。有關颱風作業最重要的氣象雷達、衛星接收站及中央氣象局所屬各地測站如何配合特別觀測及處理作業亦未明確規定,僅在「突變天氣作業程序」中規定:預報中心通知氣象雷達觀測站、氣象測站實施每小時天氣測報作業,以利預報研判。但乃指突變天氣,非屬正常之颱風作業,而且由預報中心通知已屬被動,似應明確規定而由各接收站與測站主動按規定執行特別觀測,

以爭取時效。關於颱風所引起之雨量預報，預報中心尚無一定之作業程序及可用的方法，據瞭解，現在採用以下之作業方式：

1 對台灣地區只在颱風降雨將開始時，發布颱風可能發生之總雨量，所用範圍採用三日天氣預報所用之區域圖（見天氣預報標準作業規範3～15頁），分北部、中部、南部、東北部、東部及東南部等六個地區。

2 採用方法：

(1)王時鼎技正個人所保有之統計資料。

(2)從過去颱風調查報告中找出相關月分之類似颱風個案，主觀的研判可能之颱風總雨量。

(3)特殊流域及水庫已有模式可供作業者有：

a.石門水庫流域、曾文水庫流域一由陳正改課長負責應用 T I 電腦（連接資料處理科）運算。

b.淡水河、新店溪、大甲溪三流域一由預報中心預報人員應用 T I 電腦計算，乃水文科發展之模式。濁水溪流流域之模式已存入資料科電腦中，尚未運作。

當颱風警報發布期間，在預報中心之颱風作業小組中尚無一定之編組人員負責颱風雨量預報作業、校驗及檢討之事宜。

㊦梅雨期間大（豪）雨之處理概況

據瞭解，預報中心對梅雨期間之大（豪）雨尚無一定之作業程序及方法可遵循，除過按照綜觀尺度天氣預報法主觀的研判外，僅按「突變天氣作業程序」處理之，（關於突變天氣於後檢討之）。

㊧對現行作業之檢討

1 颱風（或熱帶低壓）侵襲期間

(1)預報中心颱風作業小組中無專責處理雨量（或風及浪潮）之人員編組。

(2)預報中心尚缺完整的颱風雨量作業程序及可用的方法，用以參考之過去雨量分布型式必須在颱風調查報告中找尋，化費時間。

(3)王時鼎技正個人保有之資料尚未完全整理成可供預報人員使用之作業圖或表。

(4)氣象雷達、衛星圖，中央氣象局所屬測站之觀測（特別是雨量資料）報告等之分析對颱風大（豪）雨之守視極為重要，未明確規定作業程序及分析應用（實際在執行中）。

(5)颱風雨量之預測極為困難，但是仍應有一套可資遵循之客觀預測方法，以後才可以逐步改進，若僅憑主觀的估計，則因人而異，而且無法校驗及修正，至於應用模式（包括有高空資料之參數在內，則在颱風侵襲期間（甚至侵襲前後）地面風速增強，探空氣球多無法施放，獲得可用資料極為困難。

(6)據瞭解，應用統計方法發展之颱風雨量客觀預報法（圖）王時鼎技正已在進行中，可供今後之應用。

(7)據個人瞭解，完全應用數值模式預報颱風雨量仍有許多困難，非一時可供實際作業使用，如何將 NWP 之產品與統計方法結合應用（MOS）似應為中央氣象局目前急應發展之課題，據瞭解，曾振發先生已在計劃研究，希盡速設法支援，提前完成。但是千萬不可完全依賴電腦計算的結果，對劇烈風暴的預測，人工仔細的分析與判斷永遠是極重要的一環。

2 梅雨期間

(1)梅雨期間對每次梅雨鋒影響時可能造成之豪雨尚無一定可循之作業程序及方法。

(2)梅雨鋒影響時在預報中心僅按一般之作業處理，不似颱風侵襲時有特定之小組處理。

(3)對梅雨期間之系統尚無一定可用之圖表及方法分析中尺度系統，如氣壓場、風場、濕度場與雨量場以及其變化。

(4)中央氣象局所屬地面測站、雷達站、探空站（含空軍測站）、衛星站亦未規定如何加強測報及分析作業，以期及時發現中尺度系統之移動及變化，高空測站仍按平時每隔 12 小時觀測一次，有失時效。

(5)過去有關梅雨期間豪雨研究文獻有許多值得應用及參考，但必須再予分析及簡化，使能成為作業時的一種參考工具。

(6)據個人瞭解，發展 MOS，預報梅雨期間大（豪）雨發生與否乃為可行而較佳之途徑。但是千萬不要忽略人腦的重要性。

(7)關於突變天氣作業程序並非一種預報作業及守視作業程序之指導，突變天氣乃指未期望的某種劇烈天氣（中央氣象局程序中列有八種）發生，而且被觀測到以後，如何緊急處理之規定，在此作業程序中僅規定「預報將有本作業程序第二項（共有八種）任

何一種或併發之特殊或劇烈天氣發生時，除應於氣象報告內詳加報導，並視需要以電話通知有關機關及傳播機構傳播之，並記錄備查，似乎不能視為一種預報及作業程序，而且突變天氣之定義是未曾預測者，亦即在未預知之情況下發生之天氣現象可稱之為突變天氣，至於作業程序中稱為突變天氣之八種現象，皆屬劇烈天氣（Severe weather），如可預知，則不應稱之為突變，而應按其他預報程序處理之，其中關於大雨及豪雨之定義，對突變天氣言，似嫌不足，原因是以日雨量區別大雨及豪雨，在突變天氣處理上有失時效，而大雨及豪雨皆為超過15mm/hr者，不易區別，似應以時雨量之急增量明定之，始可及時予以守視及發布。

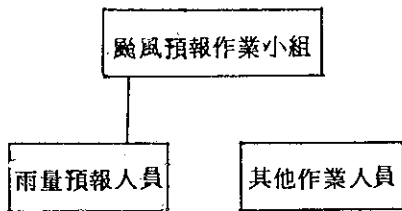
(8)如何緊急通知公眾，大眾傳播系統亦為急需研討解決之問題。

三、對大(豪)雨預報作業程序及方法之建議

(一)颱風(或熱帶低壓)侵襲期間雨量預報作業程序及方法

1. 颱風(或熱帶低壓)雨量預報人員之編組

颱風預報作業小組內應有專司雨量預報之編組(是否加入風及浪潮可予研討決定)如下圖所示:



雨量預報人員由中央氣象局指派，但必須為長期兼任人員，並負責預報之校驗及研究工作。

2. 雨量預報作業程序之建議

(1)雨量預報發布之時機

台灣地區發布陸上警報，經颱風預報小組決定認為有必要時隨颱風警報一併發布之。

(2)雨量預報發布分區

(a)按照「天氣預報標準作業規範」3~15頁三日天氣預報所用之區域圖之分區發布之，共分北部、中部、南部、東北部、東部及東南部等六個地區(

如附圖一)，並含各區之山區及特定水庫流域。圖二為科技中心王時鼎技正設計之圖，分區較為詳盡，若按照做為預報雨量(或大雨是否發生)之分區，在預報技術上困難甚多。圖一之分區與國科會氣象及水文測站規劃分區相同，為配合今後豪雨及洪水預報作業，似可研討採用。

(b)特定流域：石門及曾文水庫流域，淡水河流域(含新店溪流域)，大甲及濁水溪流域。

(c)特定地點：中央氣象局所轄測站所在地點(應用王時鼎技正正在進行研究之客觀預測圖)及曾經有容觀預測圖可供應用之其他地點(如空軍基地)。

(3)雨量發布內容

(a)一次颱風侵襲可能之總雨量

(b)日雨量

(c)六小時雨量

(d)每小時雨量根據王時鼎技正之研究，應用統計法預測，誤差較大，可研究是否發布。

(e)如採用方法中有標準差之計算時，應該有最大可能雨量之估計。

(f)特殊大(豪)雨地區之警告。

(4)雨量預測建議可用之方法

過去之研究及已發表之文獻中有許多可供應用之方法，但必須再予整理簡化而製成一有系統而應用方便之「颱風雨量預報參考檔」，預報人員可以很迅速的應用而據以發布雨量預報。茲按照颱風總雨量、日雨量、6小時雨量、特殊降雨及流域雨量分述如下：

(a)首先預報颱風總雨量建議根據之現有方法有：

①王時鼎技正個人保有之統計資料一希望王技正能夠整理成可供應用之圖表置於「雨量預報檔」中。

②類型法

(a)將預報中心保有之歷年颱風調查報告，按颱風路徑(王技正分類為八種)分別影印整理成一「類型參考檔」，每一類颱風包括有個別颱風路徑，颱風接近台灣時之地面圖、雨量分布圖等。

(b)此外可參考徐晉淮、羅字振、王博義(1972)：侵襲台灣颱風之分析研究，氣象學報18卷

4 期 34~37, 有颱風個案總雨量圖。中央氣象局「八十年來之颱風」, 54~70, 亦有個案颱風總雨量圖, 整理合併成一較完整的類型檔。

(丙)蔡清彥、周根泉(1982): 颱風路徑與台灣地區之風速及雨量分布, 中範圍天氣系統研討會論文彙編, 209~221, 有合成颱風雨量分布, 可做一般性之參考。

(b)日雨量預報建議可用之方法有:

①平均日降雨量(不能用做作業上之預報值, 個別颱風與平均值間差異極大, 但可做各類不同路徑颱風日雨量分布之形態參考, 其文獻有:

(甲)魏元恒、謝信良、林民生(1971): 颱風特性與台灣雨量之研究, 氣象學報 17 卷 3 期, 1~17 (可將其 6~11 頁之圖影印成檔)。

(乙)魏元恒、謝信良、林民生、蕭長庚(1972): 台灣颱風降雨預報之研究, 氣象學報 18 卷 3 期, 1~21。

②王時鼎、王正個人保有之統計資料—希望王正能整理成可供應用之圖表置於「雨量預報檔」中。

③俞家忠(1970): 颱風侵襲下台灣各地雨量及台北水災之初步研究, 氣象預報與分析, 45 期, 1~22。

④李富城、馬汝安(1982): 颱風路徑與台灣雨量分布之研究, 中範圍天氣系統研討會論文彙編, 163~174。

(c)六小時雨量

①王時鼎(1983): 台灣颱風降雨特性及其預報研究, 防災科技研究報告 72~13 號(有客觀預測圖)。

②范治安、鍾金堂(1982): 台東地區颱風豪雨之調查與探討, 中範圍天氣系統研討會論文彙編 79~90 (有客觀預測圖)。

(d)特殊降雨

①王崇岳(1977): 台灣北部地區暖鋒型豪雨之分析與預報, 氣象學報 23 卷 4 期 1~8 (颱風鋒面共伴型豪雨)。

②俞家忠(1982): 通過台灣北部海上颱風與台灣中南部豪雨之研究, 大氣科學 9 期, 95~

112 (特殊路徑與豪雨)。

③吳宗堯、陳正改(1978): 台灣北部地區豪雨特性之分析, 氣象預報與分析 77 期, 15~30, (颱風路徑及降雨剖面之類型)。

④曲克恭、劉廣英(1982): 台灣地區豪雨及暴雨量分布之研究, 國科會研究報告 022 號, (可做大雨中心之估計參考)。

(e)流域及水庫

中央氣象局已有石門水庫、大甲河流域、濁水河流域、淡水河流域、新店河流域颱風降水量之預報模式, 並納入電腦中儲存待用, 各模式且有研究報告參考。

(5)雨量預測圖(表)

任何一次之雨量預測皆應有紀錄, 在未能繪製預測等雨量綫分布圖之前, 應將各區及特殊地區之預測雨量填於雨量預測圖之適當位置。

(6)特殊豪雨之守視

在颱風侵襲時及颱風過後, 仍應以氣象衛星、雷達及中尺度分析法守視可能發生之特殊豪雨地區及時發出警告。

(7)颱風預測雨量方法之校驗及檢討

颱風雨量預報人員於一次颱風大(豪)雨全部發布完畢後, 應立即校驗及檢討所用方法之優缺點, 並繼續研究改進之。雨量預報人員可以提出研究改進之計畫由科技中心支援促成。

(8)雨量預報人員作業流程如圖三所示。

(二)梅雨期間大(豪)雨預報作業程序及方法

1 梅雨期間大(豪)雨預報之困難及可行方式

梅雨期間在台灣地區所發生之大(豪)雨多屬中尺度系統, 且受地形作用極大, 據瞭解: 目前尚無可用之方法提供作業時估計梅雨期間可能發生之雨量, 故建議首先探討預報大(豪)雨是否發生之可行性, 但必須輔以適當的守視制度, 以補預報之不足, 而守視較預報更為重要。根據過去之研究, 梅雨期間大(豪)雨發生之必要條件乃係線觀尺度之梅雨鋒, 而台灣地區之大(豪)雨多發生於鋒前暖區中之中尺度系統, 且受特殊地形之影響甚大, 梅雨期間平均有 4~5 次鋒面之影響。因之, 梅雨期間大(豪)雨預報作業程序之基本構想為比照中央氣象局颱風作業小組之方式,

稱之為梅雨期大(豪)雨作業小組，由颶風作業小組中之雨量預報人員為員為基礎組成之。若研判有大(豪)雨發生時，此小組立即成立展開作業，而其他有關作業單位亦應立刻按照程序配合作業。

2 梅雨期間大(豪)雨預報及守視作業程序之建議

(1) 大(豪)雨預報發布時機及分區

(a) 根據中央氣象局大(豪)雨定義，由綜觀尺度分析上如發現可能有大(豪)雨發生，則首先發布較廣大地區之預行報告，此種報告只是提醒大眾之注意，當然其準確性較差，顧客應有所瞭解，發布分區如颶風雨量預測圖，但不一定硬性規定必須按分區發布，因為梅雨鋒所形成之大(豪)雨區常常顯示特殊的地域性分布。同時在此區域內或鄰近地區之民衆如發現特殊的惡劣天氣、大雷雨及狂風暴雨等現象應盡可能的電話告知附近地區的氣象測站，氣象測站接獲報告予以證實後應立即轉告中央氣象局預報中心。

(b) 當衛星、雷達及中尺度分析顯示某一特殊小區域或流域將可能有大(豪)雨發生，或報告顯示已經發生，則立刻對該區域發布「大(豪)雨特報」，並且隨時守視之，據瞭解：雷達或雨量資料，以及小尺度之衛星影像外推(目前較小之中尺度系統唯一可行之預報方法仍為外推法，但非簡單的外推，而須考慮雲系新生及消失等影響作用)應在 0~6 小時之內，過此則效果不佳。

(2) 大(豪)雨發布內容

(a) 預行報告

一廣大區域可能受梅雨鋒之影響而在此廣大區域內之某些特殊小區域發生大(豪)雨(按中央氣象局之定義)，因之發出此注意報告，提醒公眾，並請民衆協助報告惡劣天氣現象及已發生之大(豪)雨。

(b) 大(豪)雨特報

由氣象衛星、雷達及中尺度系統分析發現，或由測站與報告獲知在 0~6 小時內某一區域或流域將可能有(或已發生)大(豪)雨，應該立即採取防範措施。

(3) 大(豪)雨預報及守視之建議

梅雨期間大(豪)雨預測，以目前對中尺度

系統之能力，僅可應用綜觀尺度鋒面系統歷史資料之統計分析與個案分析中所獲之特徵予以推估，其準確性當然較差，如果期望預測何時、何地發生，當然困難極大，唯一可行之方法乃予以守視外推(即現在 Nowcast 所用之方法)，但執行守視之最佳時機為綜觀尺度鋒面系統可能影響之下。故將大(豪)雨之處理劃分為二步驟，即綜觀尺度梅雨鋒可能導致大(豪)雨之分析及大(豪)雨之守視。

(a) 綜觀尺度梅雨鋒導致大(豪)雨之分析

以下各種文獻曾經統計分析及個案分析梅雨鋒導致台灣地區之大(豪)雨，個人認為對預報上有極大之幫助，但希望予以綜合及簡化為圖表或工作核對卡(Check list)，並且做成「預報參考檔」，以備預報人員使用。

① 劉昭民(1984)：低層噴射氣流與台灣地區豪雨之關係，氣象預報與分析，99期，43~51，另見天氣分析與預報研討會論文集編(1984)，85~93。

② 陳泰然，紀水上(1978)：梅雨期台灣地區中範圍天氣分析與預報，大氣科學 5 卷 1 期，35~47(鋒面距台灣遠近與大雨發生之統計)。

③ 陳正改(1979)：梅雨鋒面所伴隨之低層噴射氣流和台灣地區豪雨之關係，大氣科學 6 卷 1 期，29~37。

④ 吳宗堯、陳泰然(1983)：台灣地區春末至夏初之局部性豪雨研究，中央氣象局研究報告 077 號(綜觀尺度分析)。

⑤ 紀水上、陳泰然(1980)：台灣梅雨期華南及鄰近地區之鋒面頻率分布及其移動速度分析，第二屆全國大氣科學研討會論文集編，67~77。

⑥ 陳政改(1980)：台灣北部地區梅雨期之環流型與降水特性，第二屆全國大氣科學研討會論文集編，78~86。

(b) 中尺度梅雨系統之分析

以下為過去研究中尺度系統與梅雨期中大(豪)雨之關係，建議綜合及簡化為圖表及工作核對卡，並且做成預報參考檔，以供應用。

① 王崇岳(1978)：梅雨期台灣地區中範圍天氣分析與預報，大氣科學 5 卷 1 期，15~25(詳

圖分析)。

②陳泰然、紀水上(1980):台灣梅雨季中幅度降水與中幅度低壓研究,大氣科學7期,39~48(詳圖分析)。

③廖學銓(1978):近年來國外梅雨研究之評介,台灣地區災變天氣研討會論文集編,108~149。

④林銓(1982):梅雨鋒面通過中正國際機場之個案研究,第三屆全國大氣科學研討會論文集編,258~265。

⑤俞川心、徐天佑、呂國財(1982):春末夏初台灣特殊天氣個案探討,同上,279~287。

⑥丘台光、廖學銓、洪理強(1982):民國70年5月28日之豪雨個案研究,中範圍天氣系統研討會論文集編,233~247。

⑦張儀峯、林沛鍊、徐天佑、劉廣英(1982):局部暴雨特性之分析研究,同上,317~328。

⑧曲克恭(1984):豪雨診斷分析之評介,天氣分析與預報研討會論文集編,1~17。

⑨紀水上、陳泰然(1984):1981年5月27~28日華南及台灣地區中尺度對流複合系統之初步分析,95~115。

⑩丘台光、廖學銓(1984):華南及鄰近地區中尺度對流系統之研究,同上,397~411。

⑪童茂祥(1984):民航局氣象中心雷雨預報方法之評估,航空氣象與飛安研討會論文集編,21~26(熱力指數可做參考)。

⑫丘台光(1984):華南地區中尺度對流複合系統對飛航之影響,同上,27~36。

⑬徐天佑、易成安、呂芳川(1984):台灣北部冬末春初低層強風與劇烈天氣之關係,同上,37~44。

⑭楊正治、郭忠暉(1984):中尺度對流系統與飛行天氣之個案研究,同上,345~352。

⑮陳景森、丘台光、林沛鍊(1984):中尺度高壓與地面天氣的變化,同上,409~420(可做詳圖分析之參考)。

(c)梅雨鋒中尺度系統之守視及作業圖

對梅雨鋒中尺度系統之守視有兩種作用,一為發現已經發生之系統,另一可提供預報人員從事中尺度分析資料,對研判梅雨期間大(豪)雨之發生極具功用,大致可分為氣象雷達、衛星、無線電探空及地面觀測(含自動雨量站之報告)在梅雨大(豪)雨守視期間皆應改變平常之觀測方式,以應需求,茲分述如下:

①觀測時距

(甲)氣象雷達

中央氣象局高雄及空軍清泉崗(以及將來預備裝置之其他雷達)皆應該每30分鐘觀測一次,需有重要目標範圍、頂高、移動方向、速度及強度(db)之資料,梅雨作業小組應該在雷達圖上繪出各雷達回波之連續圖,以研判其變化,極為重要。

(乙)氣象衛星

中央氣象局氣象衛星站從00Z~21Z接收日本之GMS衛星資料,時距過久(約為每3小時一次),但從06Z~23Z仍可接收NOAA 6及7號之資料,在台灣地區可有4次雲圖,用以彌補時距過久之缺失,在守視期間衛星站應該接收所有之雲圖,並予以色調強化處理,同時派專業人員親送預報中心,做必要的說明此點極為重要,因為預報人員對雲圖之認知究非專才。衛星圖有其連續性之變化,建議在預報中心有適當位置展示圖片,同時在圖片上分析重要雲系之連續性及變化。總之,衛星站應盡力協助預報人員瞭解雲圖之真實意義及其變化,若雨量預報作業人員中能網羅一位衛星作業人員將更佳。

(丙)無線電探空

中央氣象局台北探空站及東沙探空站,空軍所屬東港、桃園及馬公探空站應該每6小時施放一次,電腦中心立即繪圖及計算各種指數,送預報中心,而梅雨作業小組人員應於探空電碼收到後立即填入高空風剖面圖中,並計算 θ_e 等資料與分析水汽含量變化等。

(丁)地面觀測

中央氣象局所屬地面測站應該每小時觀測一次,且將資料立即傳送至預報中心,當地雨勢增大時(當雨量達5mm/hr及以上,而雨量急增至先一次報告數值之一倍)雖未達報告時間亦應專電報告

預報中心，地面觀測報告中必須含有海平面氣壓（高山測站例外）。中央氣象局所屬 7 個自記雨量站平時每 3 小時對預報中心報告一次雨量，規定雨量超過 15 mm/hr 時則每小時通知預報中心，此種規定似嫌太遲，建議規定雨量增加先一次報告雨量之一倍時（不計雨量之多少）及雨量達 10 mm/hr 以上時均應每小時（或隨時）報告預報中心，預報中心梅雨作業小組應在開始守視時先行通知自記雨量測報站（在 5 F 觀測室）。

②中尺度分析作業圖

中尺度分析除已有雷達回波圖、衛星雲圖及已分析之探空曲線外，預報中心大雨作業人員應該每小時分析以下各圖：

(甲)台灣地區（含外島）每小時地面詳圖（用大比例尺圖）—注意中尺度高壓、低壓及槽之移動及變化情形，並參考每三小時之地面圖，追蹤中國大陸上之短波系統。

(乙)台灣地區（含外島）每小時雨量分布圖。

(丙)各探空站（台北、桃園、馬公、東港、東沙）風向風速垂直時間剖面圖—注意低空及中空噴射氣流及一般風向風速之分布及變化。

(丁)追蹤華南地區之短槽（此較為困難，因為高空圖為每 12 小時一次）。

(戊) θ_e 之連續圖。

(己)各種指數（指標）連續圖。

(庚)在高空圖（850 及 700 mb）上追蹤暖舌及冷舌之移動及變化。

(辛)每隔 12 小時及 24 小時之氣壓變化。

(壬)其他在建議參考文獻中所指出而有價值之徵候。

(4)綜合分析作業方式之建議

作者與氣象局預報中心任立渝副主任合作研究「梅雨季發生大雨之綜觀預報法」，從過去研究之文獻中選出九個重要因子，即：梅雨鋒之距離，低空噴流、溫度平流，850 mb 溫度槽（15°C），垂直穩定度（ $\frac{\partial \theta_e}{\partial p}$ ），K 及總指數，測站地面露點及其變化，測站地面氣壓及其變化（12 小時及 24 小時）及乾舌與濕舌等。經初步對所選大（豪）雨個案之分析，除梅雨鋒外，其他八個因子，若單獨使用為預報因子

，則與大（豪）雨之發生與否尚無良好的相關。大（豪）雨很可能是數種因子所代表之綜合作用，故必須綜合的分析眾多的氣象資料及代表的因子，實非人力可以勝任。在我們尚未能如美國「國家劇烈風暴預報中心」一樣的發展「人機對話系統」（Man-Computer Interactive Data Access System）及「風暴資訊中央處理系統（Centralized Storm Information System），用電腦處理很多氣象資料的分析與計算之前，作者建議用人工將有關可以計算及分析的參數或因子或天氣系統等繪成綜合圖，表示豪雨可能發生的狀況，易於研判及討論。

(5)大（豪）雨預報及特報發布之通信問題

氣象消息之傳播概可分為消極與積極二種方式，在非緊急之狀況時多用消極方式，如電視、報紙、電台廣播，「166」廣播等，公眾可以接受亦可以不接受，但是在緊急狀況時，此種消極傳播方式常失時效，而且公眾不一定能夠獲知消息，故必須輔以積極方式，如電話、警報器、喊話、分送報告單（如時間允許）等，回顧過去梅雨期中之大（豪）雨成災多在數小時內發生，即使預報中心已經發現有豪雨將發生，但用何種方式通知公眾，值得研究，否則一切努力仍將成空，即使用現行方式，警告一定要發出，否則中央氣象局必將受到指責。

(6)梅雨期大（豪）雨作業小組於梅雨期過後應立即校驗及檢討所用方法及步驟之優缺點，並繼續研究改進之。

(7)作業小組作業流程如附圖四。

四、結語

作者曾以 14 個工作天先後訪問中央氣象局之預報中心、衛星中心、通信中心、電算中心、水文科、資料處理科及自動雨量站觀測室等單位，並且參照實際作業之需求，初步研擬此作業程序。今後中央氣象局之天氣預報作業可能接受之最大挑戰為大（豪）雨發生之預告與警報發布以及定量雨量預報。以過去研究之文獻及方法論，固然統計方法有其基本上之缺失，不如所謂之數值模式法有理論上之根據，但是綜觀今日數值模式法對定量雨量預報與中尺度大（豪）雨發生之

估計，從研究發展到提供實際作業應用仍有一段距離，尤其預報作業以爭取時間為首要，不容許化費長時間之作業過程，故客觀預測法仍有其利用之價值。

如何將綜觀尺度系統以及預測之綜觀尺度系統與中尺度系統之天氣現象（常是劇烈天氣）相連結以及如何守視中尺度天氣現象予以外推（今天尚無其他方法替代），並且迅速的傳播予顧客乃為補救今天大（豪）雨預報缺失之可行辦法，今後NWP發展成功，亦不可能替代直接預報天氣，如果仍舊主觀的解釋NWP之產品，則與現在的作業情況無何改進。我們寄望於MOS之發展成功，但MOS之輸入大部分為NWP之產品，其作業時效仍受NWP之限制（每日二次）。檢討台灣地區大（豪）雨成災之時距，多在數小時內，MOS亦不可能每次適時的提供預報，在兩次MOS預報作業期間，仍需要守視（包括每小時之詳圖分析）以補預報之不足。

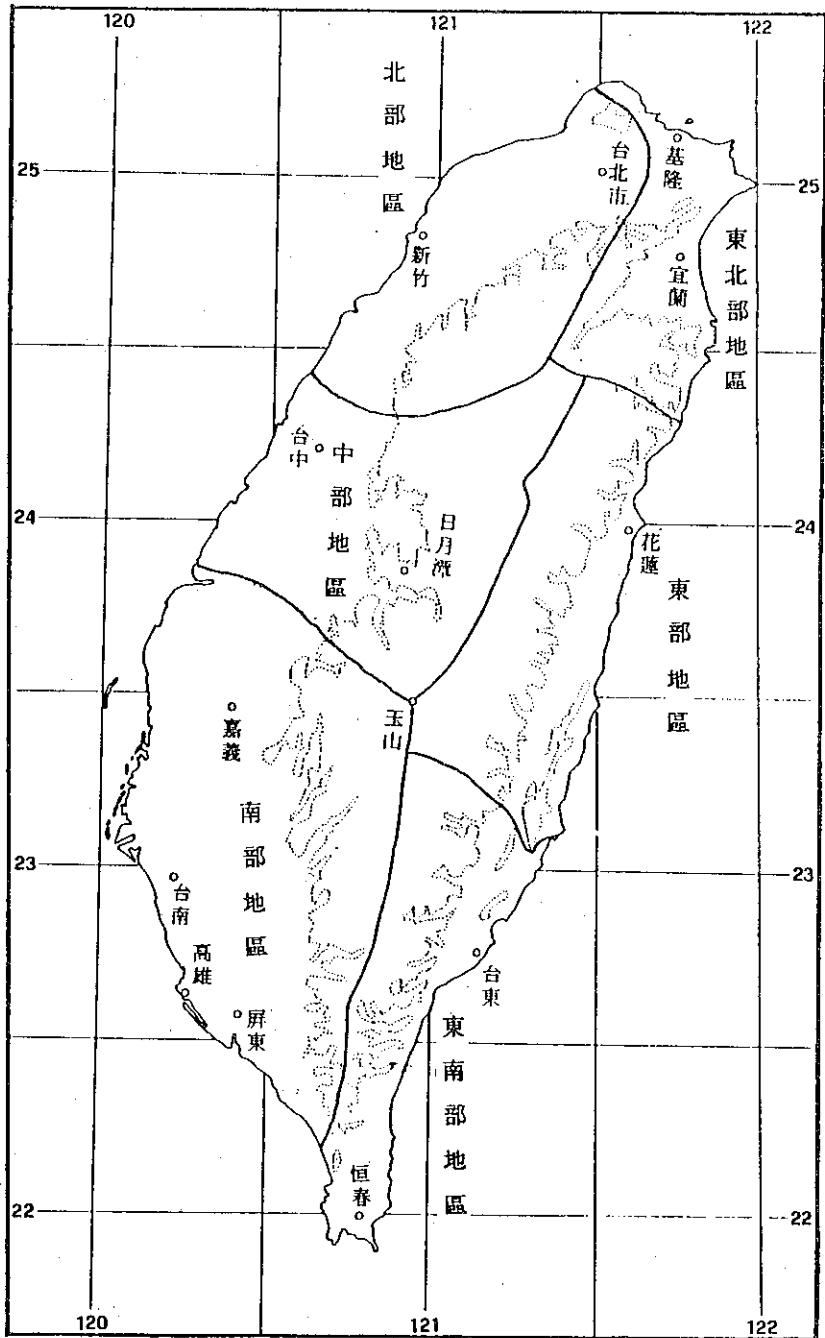
颱風降雨範圍較大，將來數值模式法亦有希望提供作業應用，目前唯一可用之方法仍然是統計法（包括統計模式法），雖然只是預報最可能發生之雨量概值，但過去已有許多研究，今後再予改進仍不失為可用之方法，再輔以氣象衛星、雷達及雨量站網之守視，對颱風雨量預報應該有逐漸的改善，而且在預報安全因素之考慮下，對台灣地區錯過一次颱風大（豪）雨之預報（即發生大（豪）雨而未曾預告）實不太可能。

梅雨期間之大（豪）雨則情況不同，此種屬於中尺度系統內小範圍的降雨系統，固然無法預測其可能發生之雨量（至少在最近的將來），即使預報大（豪）雨發生與否，亦感困難，而其所造成之災害却仍然可觀，對預報人員言，才是真正的挑戰者，綜觀尺度系統乃促成此種降雨系統之主要原因，但孕育於其中

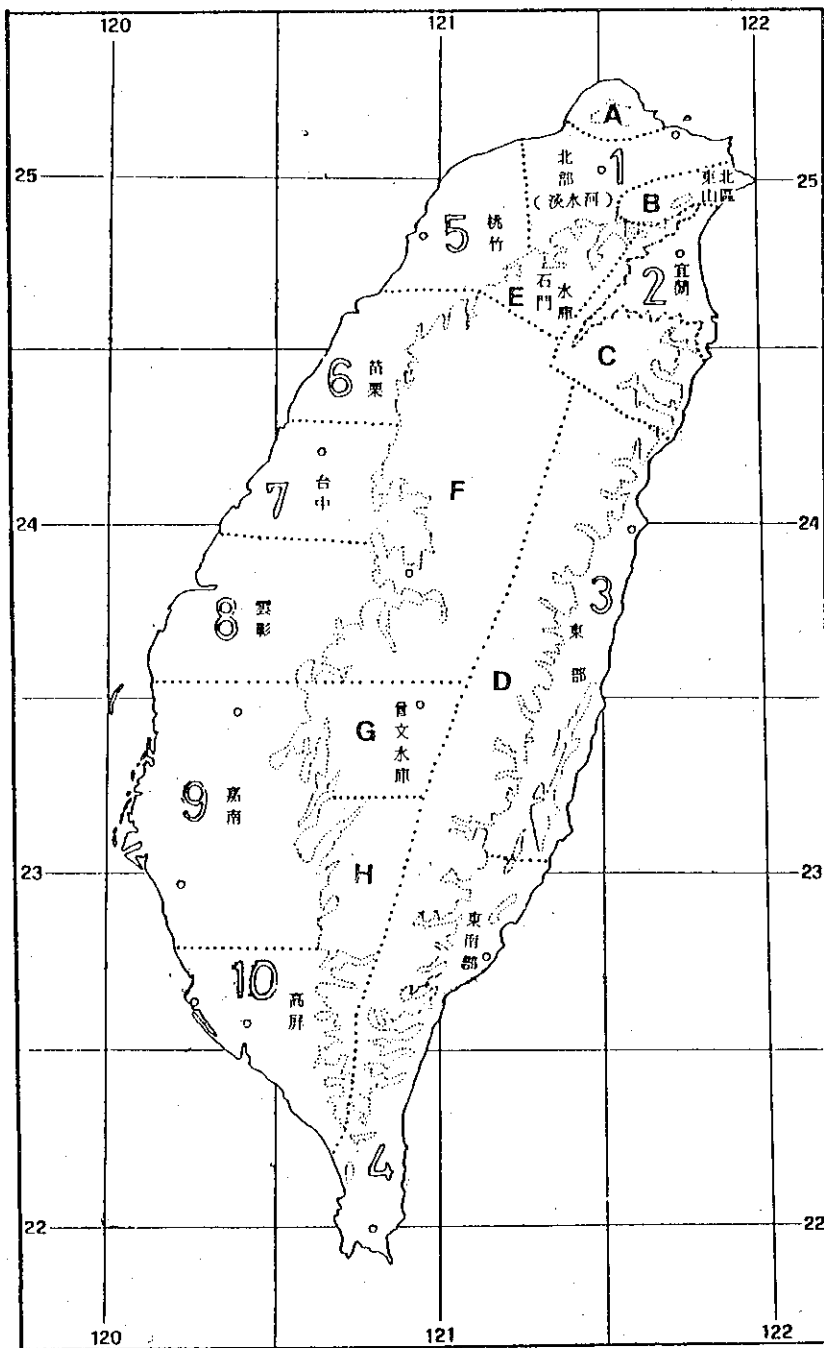
之中尺度系統只有以嚴密的守視制度彌補預報之不足，所謂 Nowcast 之精神，不過是在短時間內應用雷達、衛星及稠密的地面及高空測站，配合中尺度之分析守視此種天氣變化，予以時間及空間的外推，因之，今後預報中心在梅雨期中之工作，除正常的作業外，分析資料亦應縮短時距，放大空間（用大比例尺圖），做較為詳細的分析，而其他部門必須配合提供適當的資料及支援。此外，值得注意的是，中尺度分析的參數繁多，原始觀測的資料衆多，借助電腦計算（或者分析）爭取時效，是所必需；但是如何將這許多參數綜合解釋大（豪）雨之發生與否却捨人腦外，目前尚無其他途徑可尋。

另一個值得考慮的問題是警告傳播系統，以雷達觀測的資料，衛星雲圖中較小範圍的中尺度系統及地面雨量分布之外推時距不能過長（一般多在六小時之內，時間越短，準確度越高），一旦發現大（豪）雨之系統，如何讓公眾知悉而做防範、需要研究。

總之，台灣地區大（豪）雨之預報、觀測、警告之傳播等，確實為一迫切需要而應努力解決之問題，建議在中央氣象局科技中心內組成一台灣地區大（豪）雨研究小組，專門負責策劃及推動之任務，一方面改進現行之預報制度及方法，一方面研究如何配合NWP之產品而使大（豪）雨預報更為準確，至於中尺度系統之數值模擬似應配合實際作業之需求為第一優先，（各種研究必須是集體的研究）。在中央氣象局預報中心臨時編組擔負颱風及大（豪）雨之預報與守視工作，並非為一良好的作業方式，如果能在預報中心內設立「劇烈天氣課」則事有專責，人有專攻，舉凡在作業方面需要的準備與改進工作皆可於平時按步就班的完成，而在實際作業時更有經驗豐富的分析人員，對預報準確之增加極有助益。

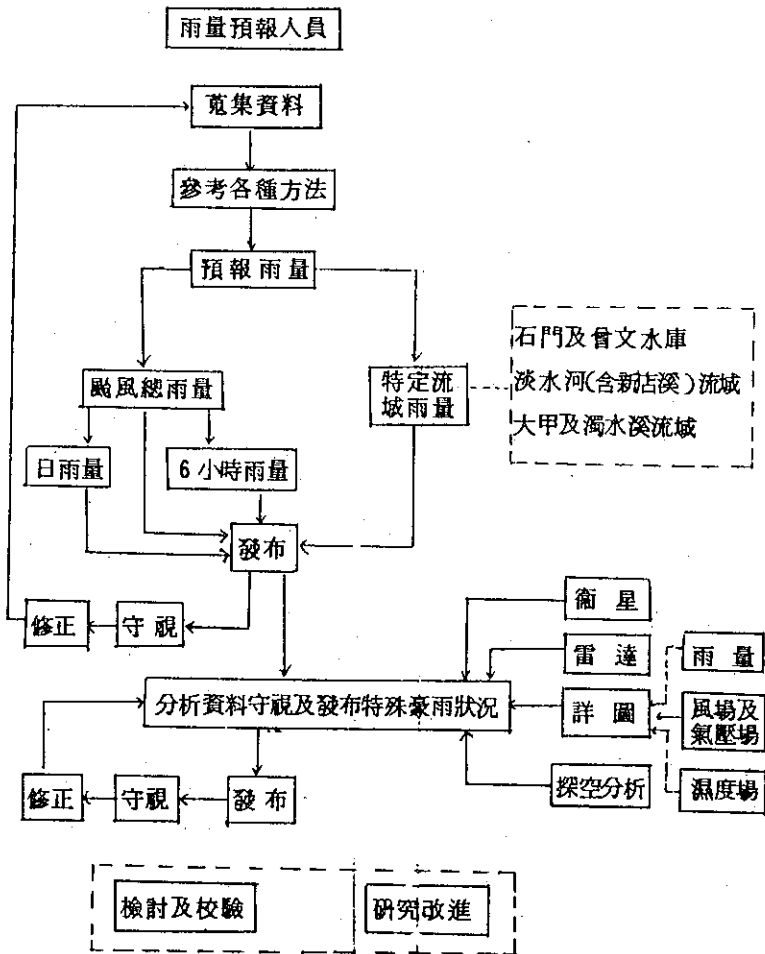


(圖一) 雨量預報區域圖

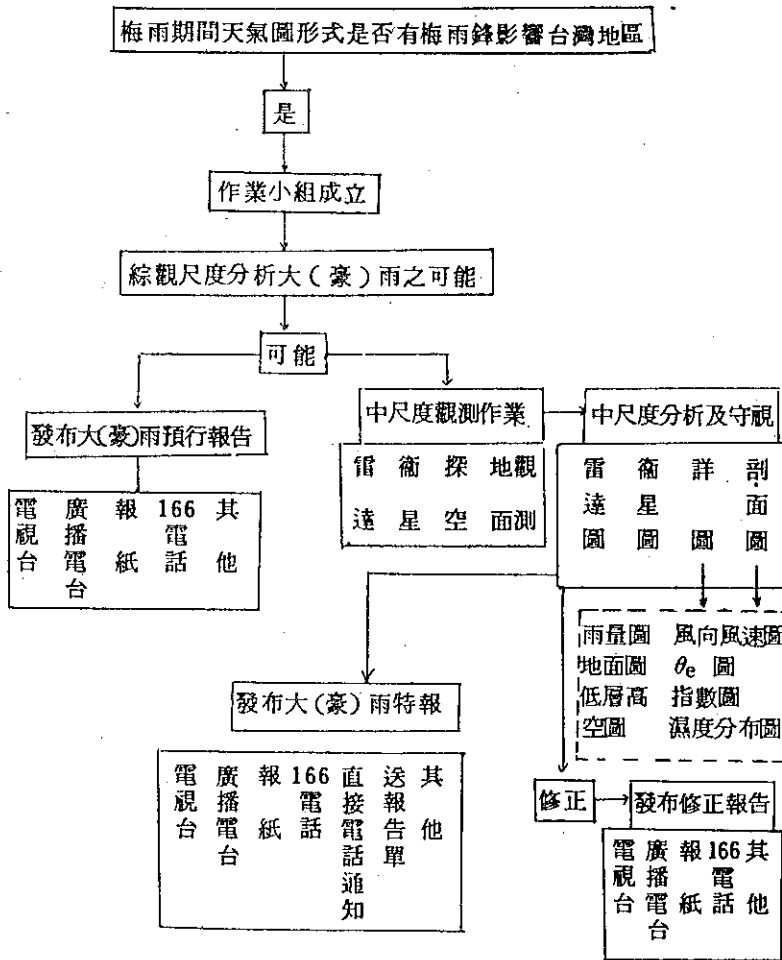


(圖二) 王時鼎技正設計雨量預測分區圖

(圖三) 作業流程圖



(圖四) 作業流程圖



非線性正模初始化與四維數據資料融入

洪秀雄 周思運

王錦華

國立中央大學大氣物理系

中央氣象局科技中心

第一章 導言 (Introduction)

流體的運動可以用納維滋——斯托克方程式 (Navier - Stokes Equations) 定量的描述，而大氣是流體的一種，因此同一套方程式也可以描述氣象的行爲。很早以前，科學家們就想到如果有快速的計算利器，直接解流體力學方程式組就可以達到預報天氣的目的。1922年Richardson以實際行動實驗其可行性，可惜那時不了解尺度分析及濾波的重要性而失敗了。一直到電子計算機問世之際，Charney (1949), Charney, Fjortoft and Von Neumann (1950) 以準地轉假設濾去雜波而告成功。然而這種「成功」的結果與實際天氣仍有相當大的距離。

後來大家發現重力波的性質對數值天氣預報也是一個不可忽略的因素，於是在1960年代乃有所謂原始方程式模式 (Primitive Equations model, 簡稱原始模式) 的發展。先進的天氣預報模式現在都使用原始模式。

可是如果使用原始模式，因為容許重力波存在，尤其高頻重力波常會破壞運動場使之發生扭曲或計算不穩定。因此在計算過程中，必須附加各色各樣的平滑器 (Smoother)，以濾去「雜波」。可是這樣做也同時濾掉部份主波。尤其是當觀測的氣象資料與方程式所代表的狀態不一致時，例如大尺度的資料並不成地轉平衡，就會有地轉調節過程所伴隨的重力波產生。於是有一陣子，許多人用地轉平衡作為初始條件。問題是資料若調整為地轉平衡仍和方程式不一致，因為方程式為原始方程式，仍會有高頻重力波的發生。所以資料的初始化是一個

重要而微妙的問題。初始化方法還有變分法，動力法 (Dynamical Initialization)。後者是根據原始模式方程式前行、後行反覆積分直到接近穩流為止。不過無論如何還是有前述的缺點，尤其是處理行星尺度或赤道地區時為然。

近年來流行使用非線性正模法 (Non-linear Normal Mode Initialization)，這種方式容許我們清楚的知道濾掉的是什麼波而又不傷害其他波。這種方法和傳統的潮汐理論很近似。只是在潮汐理論中強制力的週期及形式為已知，而在原始模式初始化的問題中，用的是模式的正模 (Normal Modes, 即自由波動——free waves)。我們下面將先簡介潮汐理論體系，以體認球面上正模的意義。

線性正模初始化，在1960年代就開始採用，如：Dickinson (1966), Flattery (1967), Dickinson and Williamson (1972), Williamson (1976)。這種方法是在原始模式的線性形式中，求取正模。正模中包含了許多固有頻率的解，涵蓋了慣性重力波及羅士培波。其中高頻重力波和天氣系統關係較小，而且會導致模式的計算不穩定。因此初始化的作法乃是將屬於高頻的重力波予以濾除。可惜線性正模的處理只達成部分的成功，主要因為原始模式中的非線性部分會重新引發高頻重力波。

這種缺憾一直到1970年代末期Machenhauer (1977), Baer (1977) 的發明非線性正模處理法，才得以克服。雖然非線性正模法仍未完善，

還有一些細節問題有待解決，但原始模式只要使用非線性正模處理，都會獲得可觀的改善。

非線性正模方法的長處並不僅在初始化過程才得以發揮。正因為正模是模式的自然解，不但數學上沒有缺失，每個正模的物理意義我們也可以確實的知道，因此這種方法還可用在氣象數據資料融入

的問題。它甚至於可能是客觀分析時的有力工具。

下面我們將先簡介潮汐理論體系，以介紹正模的意義。以後的章節將依次介紹其他面及球面上的非線性正模初始化，慢流形程序及四維數據資料融入。

第二章 潮汐理論體系與相當厚度

(Tidal Theory and Equivalent Depth)

考慮在自轉的地球表面上的大氣，原始運動方程式寫成球面坐標為：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega v \sin \phi + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = R_u \dots\dots\dots(2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega u \sin \phi + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = R_v \dots\dots\dots(2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{RS}{p} \omega = R_{\bar{\Phi}} \dots\dots\dots(2.3)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} + \frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \phi} v \cos \phi \right] = 0 \dots\dots\dots(2.4)$$

式中 λ , ϕ , p , 分別為經度、緯度及氣壓，

U 、 V 為西風，南風， $W = \frac{dp}{dt}$ ， Φ 為重力位。(

2.3) 式已合併了靜力平衡式及熱力學第一定律。
 a , Ω 分別為地球半徑，及自轉速率。 R_u , R_v , $R_{\bar{\Phi}}$ 包括非線性項及摩擦項、非絕熱項。

$$R_u = -v_H \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + F_\lambda \dots\dots(2.5)$$

$$R_v = -v_H \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} + F_\phi \dots\dots(2.6)$$

$$R_{\bar{\Phi}} = -v_H \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{RS'}{p} \omega - \frac{\kappa}{p} Q \dots\dots\dots(2.7)$$

其中 S 為靜力穩定度， S' 為其平均值之偏差。

省略(2.1)至(2.4)式右邊各項，亦即只保留線性項，而令 $R_u = R_v = R_{\bar{\Phi}} = 0$ ，則可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega v \sin \phi + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \dots\dots\dots(2.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega u \sin \phi + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 0 \dots\dots(2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{RS}{p} \omega = 0 \dots\dots\dots(2.10)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} + \frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \phi} v \cos \phi \right] = 0 \dots\dots\dots(2.11)$$

由(2.10)及(2.11)兩式中消除 ω ，

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p}{RS} \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{1}{a \cos \phi} \dots$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \phi} v \cos \phi \right] = 0 \dots\dots\dots(2.12)$$

(2.8), (2.9), (2.12) 式構成三個變數，三個聯立方程式的系統，而且顯然水平與垂直自變數是可以分離的。令

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}(\lambda, \phi, t) \\ \hat{V}(\lambda, \phi, t) \\ \hat{\Phi}(\lambda, \phi, t) \end{pmatrix} Z(p) \dots\dots(2.13)$$

則(2.8), (2.9), (2.12) 變成

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} - 2\Omega \hat{V} \sin \phi + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \lambda} = 0 \dots\dots\dots(2.14)$$

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} + 2\Omega \hat{U} \sin \phi + \frac{\partial \hat{\Phi}}{a \partial \phi} = 0 \dots\dots(2.15)$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} + \frac{g\tilde{H}}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial \hat{U}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \phi} \cos \phi \right] = 0 \dots\dots\dots(2.15)$$

及

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{p}{RS} \frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{Z}{g\tilde{H}} = 0 \dots\dots(2.17)$$

式中 $(g\tilde{H})^{-1}$ ，為分離常數 (Separation constant)。(2.17) 式決定 Z 的解，亦即 u 、

v 、 Φ 的垂直結構，故又稱為垂直結構方程式 (Vertical structure equation)。(2.14) ~ (2.16) 式與淺水海洋潮汐的運動方程式完全一致。如果 \tilde{H} 取代海洋平均深度的話。故 \tilde{H} 一般稱為相當厚度 (equivalent depth 或 equivalent height)。值得一提的是， H 實際上是分離常數而不是海洋深度，故不必要為正。

(2.14) 至 (2.16) 式都只是 λ 、 ϕ 及 t 的函數，我們把 U 、 V 、 Φ 寫成

$$\begin{pmatrix} \hat{U} \\ \hat{V} \\ \hat{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}^m \\ i \hat{V}^m \\ 2\Omega \hat{\Phi}^m \end{pmatrix}$$

$$\exp(im\lambda - 2\Omega i\sigma t) \dots\dots\dots (2.18)$$

亦即令運動系統為緯向傳播的平面波， m 為緯向波 $i = (-1)^{1/2}$ 。代入 (2.14) ~ (2.16) 式後可得

$$\sigma \hat{U}^m = -\hat{V}^m \sin \phi + \frac{m \hat{\Phi}^m}{a \cos \phi} \dots\dots\dots (2.19)$$

$$\sigma \hat{V}^m = -\hat{U}^m \sin \phi - \frac{1}{a} \frac{\partial \hat{\Phi}^m}{\partial \phi} \dots\dots\dots (2.20)$$

$$\sigma \hat{\Phi}^m = \frac{g \tilde{H}}{4\Omega^2 a \cos \phi} \left[m \hat{U}^m + \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{V}^m \cos \phi \right] \dots\dots\dots (2.21)$$

消除 \hat{U}^m 及 \hat{V}^m 後，最後的單一方程式可寫成

$$\mathcal{L}^m (\hat{\Phi}^m) + \frac{4\Omega^2 a^2}{g \tilde{H}} \hat{\Phi}^m = 0 \dots\dots\dots (2.22)$$

其中

$$\mathcal{L}^m \equiv \left[\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{\cos \phi}{(\sigma^2 - \sin^2 \phi)} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{(\sigma^2 - \sin^2 \phi)} \left[\frac{m(\sigma^2 + \sin^2 \phi)}{\sigma(\sigma^2 - \sin^2 \phi)} - \frac{m^2}{\cos^2 \phi} \right] \right] \dots\dots\dots (2.23)$$

稱為拉布拉斯潮汐微分算子 (Laplace Tidal Differential Operator) 或哈夫算子 (Hough Operator)。(2.22) 式為水平結構方程式 (Horizontal structure equation)，亦即著名的拉布拉斯潮汐方程式 (Laplace Tidal Equa-

tion，或簡寫為 LTE)。在南北極 ($\cos \phi = 0$) (2.22) 式的解仍維持有限的邊界條件下，其解稱為哈夫函數 (Hough Function)。

至此，方程式 (2.17) 至 (2.23) 均與潮汐理論相同。不過我們這兒有興趣的和潮汐問題略有不同。潮汐的問題中外力是已知的，故 σ 為已知，(2.22) 式要滿足水平邊界條件而決定 \tilde{H} ，再代入 (2.17) 式中求垂直結構。而現在我們的興趣是在自由運動 (free modes)，亦即缺乏特定的外力的情況。在這情況下我們可以先解 (2.17) 式，只有一些 $g\tilde{H}$ 可以同時滿足 (2.17) 式及上、下邊界條件。因此由 (2.17) 式及邊界條件可求出固有向量及相對應之固有值 $g\tilde{H}_n$ ，然後再解 (2.22) 式或 (2.19) ~ (2.21) 等三式以得到水平的固有向量及固有頻率 (eigen frequency)。通常由 (2.19) ~ (2.21) 式求取固有頻率較簡單，也是常用的方式。

至於解法，我們留到後面再介紹，這兒我們要引用潮汐的理論架構，討論一下固有頻率的一些特性。

假設 \tilde{H} 已由 (2.17) 式決定出來，我們將之表示成 H_0 。(2.14) 至 (2.16) 式可寫成

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} - 2\Omega \hat{V} \sin \phi = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \lambda} \dots\dots\dots (2.14a)$$

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} + 2\Omega \hat{U} \sin \phi = -\frac{\partial \hat{\Phi}}{a \partial \phi} \dots\dots\dots (2.15a)$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} + \frac{gH_0}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{V} \cos \phi \right) = 0 \dots\dots\dots (2.16a)$$

引進速度位 (Velocity potential) χ 及流函數 (Stream function) Ψ ，定義為

$$\hat{U} = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}$$

$$\hat{V} = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \phi}$$

$$\text{再定義 } \chi = \frac{gH_0}{2\Omega} \tilde{\chi} \exp(im\lambda - 2\Omega i\sigma t),$$

$$\Psi = \frac{gH_0}{2\Omega} \tilde{\Psi} \exp(im\lambda - 2\Omega i\sigma t), \text{ 及}$$

$$\Phi = gH_0 \tilde{\eta} \exp(im\lambda - 2\Omega i\sigma t),$$

$\mu = \sin \phi$, 則渦度及輻散度分別為

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \hat{U} \cos \phi}{\partial \phi} = \nabla^2 \Psi$$

$$= \frac{gH_0}{2\Omega a^2} \nabla_n^2 \tilde{\Psi} \dots \dots \dots (2.25)$$

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \hat{V} \cos \phi}{\partial \phi} = \nabla^2 \chi$$

$$= \frac{gH_0}{2\Omega a^2} \nabla_n^2 \tilde{\chi} \dots \dots \dots (2.26)$$

$$\nabla_n^2 = \frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} - \frac{m^2}{1 - \mu^2}$$

$$\dots \dots \dots (2.27)$$

交叉微分 (2.14 a), (2.15 a) 式可得
渦度方程式 (vorticity equation)

$$(\sigma \nabla_n^2 - m) \tilde{\Psi} + (\mu \nabla_n^2 + D) (i \tilde{\chi}) = 0 \dots \dots \dots (2.28)$$

式中

$$D = (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \dots \dots \dots (2.29)$$

及輻散方程式 (divergence equation)

$$(\sigma \nabla_n^2 - m) (i \tilde{\chi}) + (\mu \nabla_n^2 + D) \tilde{\Psi} = \nabla_n^2 \tilde{\eta} \dots \dots \dots (2.30)$$

(2.16 a) 式可化簡為

$$\sigma \tilde{\eta} = -\frac{gH_0}{4\Omega^2 a^2} \nabla_n^2 (i \tilde{\chi}) = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla_n^2 (i \tilde{\chi})$$

$$\dots \dots \dots (2.31)$$

$$\text{式中 } \varepsilon = \frac{4\Omega^2 a^2}{gH_0} \dots \dots \dots (2.32)$$

將 (2.31) 式的 $\tilde{\eta}$ 代入 (2.30) 式, 消除 $\tilde{\eta}$, 可得

$$(\sigma \nabla_n^2 - m + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n^4) (i \tilde{\chi}) + (\mu \nabla_n^2 + D) \tilde{\Psi} = 0 \dots \dots (2.33)$$

$$(\sigma \nabla_n^2 - m) \tilde{\Psi} + (\mu \nabla_n^2 + D) (i \tilde{\chi}) = 0 \dots (2.34)$$

$\tilde{\chi}$, $\tilde{\Psi}$ 的解在極區必須為非奇異點 (non-singular), 表示可以展開成

$$\tilde{\chi} = \sum_{n=m}^{\infty} i A_n^m P_n^m(\mu)$$

$$\tilde{\Psi} = \sum_{n=m}^{\infty} B_n^m P_n^m(\mu) \quad \dots \dots \dots (2.35)$$

P_n^m 為結合拉然得多項式函數 (Associated Legendre Polynomial), 遵守以下的規則

$$\nabla^2 P_n^m = -n(n+1) P_n^m$$

$$\mu P_n^m = \frac{n+m}{2n+1} P_{n-1}^m + \frac{n-m+1}{2n+1} P_{n+1}^m$$

$$D P_n^m = \frac{(n+1)(n+m)}{(2n+1)} P_{n-1}^m$$

$$\text{及 } (\mu \nabla_n^2 + D) P_n^m = -\frac{(n-1)(n+1)(n+m)}{(2n+1)}$$

$$P_{n-1}^m - \frac{n(n+2)(n-m+1)}{(2n+1)} P_{n+1}^m$$

於是 (2.33) 式變成

$$\left[-n(n+1)\sigma - m + \frac{n^2(n+1)^2}{\varepsilon\sigma} \right] A_n^m$$

$$+ \frac{(n-1)(n-m)(n+1)}{(2n-1)} B_{n-1}^m$$

$$+ \frac{(n+2)(n+m+1)}{(2n+3)} B_{n+1}^m = 0$$

$$\dots \dots \dots (2.36)$$

(2.34) 式變成

$$[-n(n+1)\sigma - m] B_n^m +$$

$$\frac{(n+1)(n-1)(n-m)}{(2n-1)} A_{n-1}^m$$

$$+ \frac{n(n+2)(n+m+1)}{(2n+3)} A_{n+1}^m = 0$$

$$\dots \dots \dots (2.37)$$

(2.36), (2.37) 兩式可進一步寫成

$$K_n B_{n-1}^m + M_n A_n^m + L_n B_{n+1}^m = 0$$

$$\dots \dots \dots (2.38)$$

$$K_n A_{n-1}^m + N_n B_n^m + L_n A_{n+1}^m = 0$$

$$\dots \dots \dots (2.39)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} K_n &= \frac{(n-1)(n-m)}{(n-1)n}, \\ L_n &= \frac{(n+2)(n+m+1)}{(2n+3)(n+1)} \\ N_n &= \sigma + \frac{m}{n(n+1)} \\ M_n &= \sigma + \frac{m}{n(n+1)} - \frac{n(n+1)}{\varepsilon\sigma} \end{aligned} \right\} (2.40)$$

(2.38), (2.39) 有兩組獨立解, 一組為 $\tilde{\chi}$ 對稱於赤道, 一組為反對稱。分別為(1)對稱解

$$\begin{pmatrix} M_m & L_m & 0 & 0 \\ K_{m+1} & N_{m+1} & L_{m+1} & 0 \\ 0 & K_{m+2} & M_{m+2} & L_{m+2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_m^m \\ B_{m+1}^m \\ A_{m+2}^m \\ B_{m+3}^m \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

(2)反對稱解

$$\begin{pmatrix} N_m & L_m & & 0 \\ K_{m+1} & M_{m+1} & L_{m+1} & 0 \\ 0 & K_{m+2} & N_{m+2} & L_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_m^m \\ A_{m+1}^m \\ B_{m+2}^m \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

A 及 B 有異於零的解只有當行列式為零。這兒我們不準備詳細說明怎麼解及完整的解是什麼, 而將注意力放在漸近解上。

將 (2.38), (2.39) 重寫為

$$N_n B_n^m + (K_n A_{n-1}^m + L_n A_{n+1}^m) = 0 \quad (2.41)$$

$$M_n A_n^m + (K_n B_{n-1}^m + L_n B_{n+1}^m) = 0 \quad (2.42)$$

當 $\varepsilon \rightarrow 0$, 且 $\varepsilon\sigma \rightarrow 0$ 時, M_n 的最後一項變得很大, 而 K_n 及 L_n 仍維持 1 的數量級。有兩種可能性會發生:

(-) 在高頻的一邊, σ 大到足以和 $\frac{1}{\varepsilon\sigma} n(n+1)$

相抗衡, 以至於 $|M_n|$ 並沒有變得很大。此時

$$\sigma \approx \frac{1}{\varepsilon\sigma} n(n+1) \text{ 得解 } \sigma^2 \approx \frac{1}{\varepsilon} n(n+1)$$

化成因次量 (dimensional) $\sigma_* = 2\Omega\sigma$

$$\sigma_* = \pm \frac{1}{a} \sqrt{gH_0} \sqrt{n(n+1)}$$

正是慣性重力波的頻散方程, 這族解稱為第一類波 (Waves of the First Class)。對這類波而言, 因為 σ 很大, N_n 因而也大 (見 (2.40) 式), (2.41) 式要被滿足, B_n^m 必須很小。回到 (2.35) 式的定義, 可見這類波的旋轉性質微弱, 而主要以輻散為主。故這類波又稱為重力波系 (Gravitational Mode)。

(-) 在低頻的部分, σ 不大, 於是 $|M_n|$ 隨

$\frac{1}{\varepsilon\sigma} n(n+1)$ 也變得很大, 但 A_n^m 很小, 以至於 B_n^m 維持在 1 的數量級而 (2.42) 式可滿足。由 (2.41) 式可見 $N_n \approx 0$, 即

$$\sigma \approx -\frac{m}{n(n+1)}$$

化成其單位量

$$\sigma_* = -\frac{2\Omega m}{n(n+1)}$$

是為向西傳播的羅斯貝——侯唯茲波 (Rossby-Haurwitz Waves) 的頻散方程, 這一類波解稱為第二類波 (Waves of the Second Class)。因為 $A_n^m \approx 0$, $\tilde{\chi} \approx 0$, 這類波以渦度為主, 故又稱為旋轉波系 (Rotational Mode)。

由上所述, 可見羅斯貝——侯唯茲波是自由大氣中自然存在的一種波, 且為拉布拉斯潮汐方程式的 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的特殊解, 也是控制天氣系統的主要因素。

當 $\mu \approx 0$ (即赤道地區) 時, (2.40), (2.41), (2.42) 式的解的漸近形式包括三種類型, 分別為向西傳播的羅斯貝波, 向東傳播的克爾芬波 (Kelvin Wave) 及可向東、西傳播的慣性重力波。限於篇幅, 這裡不再詳述。讀者可參考 Longuet-Higgins (1968)。

至於分離常數是否具有物理意義的問題, 可由下面舉的例子窺見大概。

由 (2.8), (2.9), 若令 $(u, v, \Phi) = (U_*, V_*, \Phi_*) \exp(i(-\sigma_* t + s\lambda))$, 可得

$$U_* = \frac{\sigma_*}{2\Omega a (\sigma_*^2 - \sin^2 \phi)} \left(\frac{\sin \phi}{\sigma_*} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{s}{\cos \phi} \right) \Phi_* \dots\dots (2.51)$$

$$V_* = \frac{i}{2\Omega a (\sigma_*^2 - \sin^2 \phi)} \left(\sigma_* \frac{\partial}{\partial \phi} - s \tan \phi \right) \Phi_* \dots\dots (2.52)$$

代入(2.11)式，

$$\nabla \cdot \vec{v} - \frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{i \sigma_*}{4\Omega^2 a^2} \mathcal{L}(\Phi_*) \dots\dots (2.53)$$

由(2.22)已知

$$\mathcal{L}(\Phi_*) = -\frac{4\Omega^2 a^2}{gH_*} \Phi_* \dots\dots (2.54)$$

現在考慮一平面且不自轉的正壓大氣中，運動方程式可寫為

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

令 $(u, v, \Phi) = (U_*, V_*, \Phi_*) \exp(ikx + i\ell y - i\sigma_* t)$ 及 $(\nabla \cdot \vec{v}, \omega) = (\nabla \cdot \vec{v}_*, \omega_*) \exp(ikx + i\ell y - i\sigma_* t)$ 可得

$$U_* = -\frac{k}{\sigma_*} \Phi_*, \quad v_* = -\frac{\ell}{\sigma_*} \Phi_* \dots\dots (2.55)$$

則

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v}_* - \frac{\partial \omega_*}{\partial p} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \exp(- (ikx + i\ell y - i\sigma_* t)) \\ &= ikU_* + i\ell V_* \\ &= -\frac{i}{\sigma_*} (k^2 + \ell^2) \Phi_* \dots\dots (2.56) \end{aligned}$$

比較(2.53)及(2.56)，我們知道兩者若互為類比，則

$$\frac{i \sigma_*}{g\tilde{H}} = \frac{i}{\sigma_*} (k^2 + \ell^2)$$

即

$$\frac{\sigma_*^2}{k^2 + \ell^2} = g\tilde{H} \dots\dots (2.57)$$

(2.57)式可解釋為淺水波的頻散方程，亦即水平相速等於 $\sqrt{g\tilde{H}}$ ，故 \tilde{H} 解釋為流體的深度是很自然的，因此 \tilde{H} 被稱為「相當厚度」。

其次再考慮平面、自轉的系統。淺水波運動方程式為

$$\begin{aligned} i\sigma_* U_* - 2\Omega V_* &= -ik\Phi_* \\ i\sigma_* V_* - 2\Omega U_* &= -i\ell\Phi_* \end{aligned}$$

可得解

$$U_* = \frac{1}{(4\Omega^2 - \sigma_*^2)} (k\sigma_* - i\ell \cdot 2\Omega) \Phi_*$$

$$V_* = \frac{1}{(4\Omega^2 - \sigma_*^2)} (m\sigma_* - ik \cdot 2\Omega) \Phi_*$$

於是

$$\nabla \cdot \vec{v}_* - \frac{\partial \omega_*}{\partial p} = i\sigma_* \frac{(k^2 + \ell^2)}{(4\Omega^2 - \sigma_*^2)} \Phi_* \dots\dots (2.58)$$

比較(2.53)及(2.58)可得

$$-\frac{i\sigma_*}{g\tilde{H}} \Phi_* = \frac{i\sigma_* (k^2 + \ell^2)}{4\Omega^2 - \sigma_*^2} \Phi_*$$

即

$$g\tilde{H} = \frac{\sigma_*^2 - 4\Omega^2}{m^2 + \ell^2} \dots\dots (2.59)$$

這對 \tilde{H} 解釋為「相當厚度」的說法是行不通的，因為當 $\sigma_*^2 < 4\Omega^2$ 時， \tilde{H} 為負值，那是不允許的，可是如果將 \tilde{H} 解釋為水平的波長就不會有問題了。因此 \tilde{H} 實際上是決定水平波長的參數。

第三章 貝他面的非線性正模初始化

(Non-linear Normal Mode Initialization on a Beta Plane)

在貝他面上， x, y 分別為向東、向北的坐標，大尺度的斜壓原始方程式，包括水平運動，靜力平衡，質量連續，及熱力等方程式，可寫為

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial p} + f \hat{k} \times \vec{V} = -\nabla \Phi + \vec{F} \dots \dots \dots (3.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \dots \dots \dots (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} + \frac{\partial w}{\partial p} = 0 \dots \dots \dots (3.3)$$

及

$$C_p \frac{dT}{dt} = \frac{RT}{p} \omega + Q \dots \dots \dots (3.4)$$

將 (3.2) 代入 (3.4) 式可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{\omega}{p} \frac{\partial}{\partial p}$$

$$\left(P \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \kappa \Phi \right) = -\frac{\kappa}{p} Q \dots \dots \dots (3.5)$$

式中 $\kappa \equiv R/C_p$, $\vec{V} \equiv U\hat{i} + V\hat{j}$,
 $\nabla \equiv \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}$, $\omega \equiv \frac{dp}{dt}$

假設等壓面和地面交角不大，上下邊界條件可寫成

$$\text{在 } p=0 \text{ 處 } \quad \omega = 0$$

$$\text{在 } p=p_s \text{ 處 } \quad \frac{d\Phi}{dt} = 0$$

§ 3-1. 方程式的無因次化

令 L, D 分別為特徵水平及垂直的長度尺度， U 為特徵水平運動速率， L/U 為特徵時間尺度，而 P 為特徵垂直氣壓尺度（即為 100 Hpa，或 1000mb）。定義下面的無因次量

$$\vec{V}' = \vec{V}/U, \quad (x', y') = (x, y)/L$$

$$t' = (U/L)t, \quad \nabla' = L\nabla$$

$$p' = p/p_s, \quad w' = L(PU)^{-1}w$$

及

$$\Phi = gD\Phi_s'(p) + 2\Omega UL\Phi'$$

式中 Φ_s' 為基本平均狀態的重力位， Φ' 為與 Φ_s' 的偏差。引進貝他近似

$$f' = \frac{1}{2\Omega}f = f_s + R_1\beta y'$$

其中

$$R_1 = L/a, \quad f_s = \sin\phi, \quad \beta = \cos\phi$$

(3.1) 至 (3.5) 式無因次化後結果為

$$\frac{\partial \vec{V}'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla' \vec{V}' + W' \frac{\partial \vec{V}'}{\partial p'} + R_0^{-1}$$

$$[\nabla' \Phi' - (f_s + R_1\beta y') \hat{k} \times \vec{V}'] = \vec{F}' \dots \dots \dots (3.7)$$

$$\nabla' \cdot \vec{V}' + \frac{\partial \omega'}{\partial p'} = 0 \dots \dots \dots (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla' \right) \frac{\partial \Phi'}{\partial p'} + (R_1 R_0 + \frac{1}{p'} \frac{\partial}{\partial p'} (p' \frac{\partial \Phi'}{\partial p'} - \kappa \Phi')) \omega' = -\frac{\kappa}{p'} Q' \dots \dots \dots (3.9)$$

式中

$$\vec{F}' \equiv LU^{-2} \vec{F}, \quad Q' \equiv Q/2\Omega U^2,$$

$$R_0 \equiv U/2\Omega L,$$

$$R_1 \equiv \frac{gD}{U^2} \frac{d\Phi_s'}{dp'} \frac{d\ln\theta_s}{dp'},$$

R_0, R_1 分別為羅斯貝數，理查遜數，而 θ_s 為標準平均大氣的位溫。

$$\text{令 } \varepsilon = 0.1, \quad R_0 = \varepsilon, \quad R_1 = \varepsilon,$$

$$R_1 = \varepsilon^{-2} S,$$

$$S \equiv \varepsilon^{-1} \frac{d\Phi_s'}{dp'} \frac{d\ln\theta_s}{dp'} = O(1) > 0$$

則 (3.7) ~ (3.9) 在省略「 ϵ 」後，變成

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \epsilon^{-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} f_0 V \right) = -\vec{V} \cdot \nabla U$$

$$-w \frac{\partial U}{\partial p} + \beta y V + F_s, \dots \dots \dots (3.10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \epsilon^{-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + f_0 U \right) = -\vec{V} \cdot \nabla V$$

$$-w \frac{\partial V}{\partial p} - \beta y U + F_s, \dots \dots \dots (3.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} + \frac{\partial w}{\partial p} = 0 \dots \dots \dots (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial p} + \epsilon^{-1} S w = -\vec{V} \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

$$- \frac{\omega}{p} \frac{\partial}{\partial p} \left(p \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \kappa \Phi \right) - \frac{\kappa}{p} Q$$

$$\dots \dots \dots (3.13)$$

在上邊界因加熱項消失，由 (3.13) 及 $w = 0$ 之條件可得，在 $p = 0$ 處，

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0 \dots \dots \dots (3.14)$$

在下邊界 $p = p_s$ 處， $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ 之條件，在無因次處理後變成

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \epsilon^{-2} \omega \frac{\partial \Phi_s}{\partial p} = -\vec{V} \cdot \nabla \Phi - \omega \frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

左邊為 ϵ^{-2} 之數量級，故右邊項可忽略，得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \epsilon^{-2} \omega \frac{\partial \Phi_s}{\partial p} = 0$$

$$\dots \dots \dots (3.15)$$

§ 3-2 非線性正模初始化

改寫 (3.10) 及 (3.11) 為

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \epsilon^{-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - f_0 V \right) = N_s$$

$$\dots \dots \dots (3.16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \epsilon^{-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + f_0 U \right) = N_s \dots \dots (3.17)$$

先就 (3.13) 對 p 微分，再結合 (3.12) 式，可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] + \epsilon^{-1} \nabla \cdot \vec{V} = N\Phi$$

$$\dots \dots \dots (3.18)$$

$N_s, N_s, N\Phi$ 主要為非線性項，其他項，加熱項

及摩擦項，分別為

$$N_s = -\vec{V} \cdot \nabla U - \omega \frac{\partial U}{\partial p} + \beta y V + F_s$$

$$N_s = -\vec{V} \cdot \nabla V - \omega \frac{\partial V}{\partial p} - \beta y U + F_s$$

$$N\Phi = -\frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{1}{S} \vec{V} \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right] - \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{\omega}{S p} \frac{\partial}{\partial p} \left(P \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \kappa \Phi \right) \right]$$

$$- \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\kappa Q}{S p} \right) \dots \dots \dots (3.19)$$

邊界條件 (3.15) 可進一步改寫。利用 (3.13) 的線性形式

$$w = -\epsilon \frac{1}{S} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial p}$$

代入 (3.15)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S}{\epsilon} \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = 0$$

引進 S 的定義

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} - \frac{d \ln \theta_s}{d P} \Phi = 0 \dots \dots \dots (3.15 a)$$

現在尋求 (3.16) 至 (3.18) 在 (3.14)

) 及 (3.15 a) 的邊界條件下的正模，意即 (3.16) 至 (3.18) 的線性解而又能滿足

(3.14), (3.15 a) 者。事實上 (3.16) 至 (3.18) 式與前章 (2.8), (2.9) 及 (2.12) 神似，表示我們可以用變數分離法。令

$$(U, V, \Phi) = (\hat{U}, \hat{V}, \hat{\Phi}) G(p) \dots (3.20)$$

代入 (3.18) 後，

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} \frac{d}{d p} \left(\frac{1}{S} \frac{d G}{d p} \right) - \epsilon^{-1} \nabla_1 \cdot \vec{V} G = 0$$

$$\frac{1}{\epsilon^{-1} \nabla_1 \cdot \vec{V}} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} = \frac{G}{\frac{d}{d p} \left(\frac{1}{S} \frac{d G}{d p} \right)} = -H$$

$$\dots \dots \dots (3.21)$$

H 為分離常數。(3.16) 至 (3.18) 都這樣處理過後，變成

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \epsilon^{-1} \left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} - f_0 \hat{V} \right) = 0 \dots \dots (3.22)$$

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} + \epsilon^{-1} \left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} + f_0 \hat{U} \right) = 0 \dots \dots (3.23)$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} + \epsilon^{-1} H \nabla \cdot \vec{\hat{V}} = 0 \dots\dots\dots (3.24)$$

及

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{S} \frac{dG}{dp} \right) + \frac{G}{H} = 0 \dots\dots\dots (3.25)$$

(3.22) 至 (3.24) 描述運動的水平結構，
(3.25) 則為垂直結構方程式。

上、下邊界條件為

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG}{dp} &= 0, \text{ 在 } p=0 \text{ 處} \\ \frac{dG}{dp} - \frac{d \ln \theta_s}{dp} G &= 0, \text{ 在 } p=p_s \text{ 處} \end{aligned} \right\} (3.26)$$

(3.25) 的解必須滿足 (3.26) 的條件，因此是一個固有值的問題，即只有特定的 H 才能同時滿足 (3.25) 及 (3.26)。故 H 為固有值 (eigen value)，也就是前章所謂的相當厚度， G 為固有函數 (eigen function)。正交化的固有函數 G_i 和 G_j 是相對應於固有值 H_i 及 H_j ，當 $H_i \neq H_j$ 時， G_i 與 G_j 有以下的關係，

$$\int_0^{P_s} G_i(p) G_j(p) dp = \delta_{ij} \dots\dots\dots (3.27)$$

$\delta_{ij} = 1$ 若 $i = j$ ，否則為零。

現在定義新的重力位為 $\tilde{\Phi} = \hat{\Phi} H_n^{-1/2}$ ，則 (3.22) 至 (3.24) 變為

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \epsilon^{-1} (-f_0 \hat{V} + H_n^{1/2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x}) &= 0 \\ \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} + \epsilon^{-1} (f_0 \hat{U} + H_n^{1/2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y}) &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \epsilon^{-1} (H_n^{1/2} \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} + H_n^{1/2} \frac{\partial \hat{V}}{\partial y}) &= 0 \end{aligned} \right\} (3.28)$$

這方程式組可進一步簡寫為

$$\frac{\partial \vec{\hat{W}}}{\partial t} + \mathbf{L} \vec{\hat{W}} = 0 \dots\dots\dots (3.29)$$

式中

$$\vec{\hat{W}} = \begin{pmatrix} \hat{U} \\ \hat{V} \\ \tilde{\Phi} \end{pmatrix}$$

及

$$\mathbf{L} = \epsilon^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -f_0 & H_n^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \\ f_0 & 0 & H_n^{1/2} \frac{\partial}{\partial y} \\ H_n^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} & H_n^{1/2} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}$$

因為 (3.29) 為常係數的偏微分方程式，若假設有週期性的解，則

$$\vec{\hat{W}} = \vec{\tilde{W}} \exp(-i\nu t + ikx + i\ell y) \dots\dots\dots (3.30)$$

ν 為頻率， k, ℓ 分別為 x, y 方向之波數。代入 (3.29) 可得

$$\mathbf{L} \vec{\tilde{W}} = i\nu \vec{\tilde{W}} \dots\dots\dots (3.31)$$

式中

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & -f_0 & ikH_n^{1/2} \\ f_0 & 0 & i\ell H_n^{1/2} \\ ikH_n^{1/2} & i\ell H_n^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

(3.31) 式有非零的解如果下面的行列式為零

$$\begin{vmatrix} -i\nu\epsilon & -f_0 & ikH_n^{1/2} \\ f_0 & -i\nu\epsilon & i\ell H_n^{1/2} \\ ikH_n^{1/2} & i\ell H_n^{1/2} & -i\nu\epsilon \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (3.32)$$

這是個 ν 的立方代數式， ν 為其固有值，而 $\vec{\tilde{W}}$ 為固有函數。(3.32) 有解

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \nu_r = 0 \\ \nu &= \nu_c = \pm \epsilon^{-1} [f_0^2 + H_n (k^2 + \ell^2)]^{1/2} \\ &= \pm \epsilon^{-1} \sigma_c \end{aligned} \right\} (3.33)$$

這兒 ν_r 為慢的模式 (slow mode)，屬於羅斯貝模， ν_r 之所以為零是因為貝他效應已被我們省略了。 ν_c 是屬於較高頻的慣性重力波 (或簡稱重力波)，數量級為 $O(\epsilon^{-1})$ ， σ_c 之引介，是為了保有數量級為 1 的量。

將 ν_r 代入 (3.31) 式，固有向量 $(K_1, K_2, K_3)^T$ 可由下面的步驟得出來

$$\begin{pmatrix} 0 & -f_0 & H_n \frac{1}{2} i k \\ f_0 & 0 & H_n \frac{1}{2} i l \\ H_n \frac{1}{2} i k & H_n \frac{1}{2} i l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = 0$$

故歸一的固有向量 (normalized eigen vector) 爲

$$\vec{W}_R = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \sigma_c - 1 \begin{pmatrix} -i l H_n \frac{1}{2} \\ i k H_n \frac{1}{2} \\ f_0 \end{pmatrix} \dots (3.34)$$

將 ν_c 代入 (3.31) 式, 可得

$$\begin{pmatrix} \pm i \sigma_c & -f_0 & i k H_n \frac{1}{2} \\ f_0 & \pm \sigma_c & i l H_n \frac{1}{2} \\ i k H_n \frac{1}{2} & i l H_n \frac{1}{2} & \pm i \sigma_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = 0$$

歸一之固有向量爲

$$\vec{W}_c = [2(k^2 + l^2)\sigma_c^2]^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} i l f_0 \pm k \sigma_c \\ -i k f_0 \pm l \sigma_c \\ (k^2 + l^2) H_n \frac{1}{2} \end{pmatrix} \dots (3.35)$$

所以固有模 (eigenmodes) \vec{W}_R 及 \vec{W}_c 爲 n (即 H_n), k , l 的函數。而所有變數都可以表示爲固有模 $\vec{W}_\alpha(\vec{K}, n)$ 的組合, α 爲 R 或 G , $\vec{K} = \hat{i}k + \hat{j}l$ 。固有模的歸一與正交特性, 可表示爲

$$\begin{aligned} \vec{W}_\alpha(\vec{K}, n) \cdot \vec{W}_{\alpha'}^*(\vec{K}, n) &= 1 \\ \vec{W}_\alpha(\vec{K}, n) \cdot \vec{W}_{\alpha'}^*(\vec{K}, n) &= 0, \end{aligned}$$

若 $\alpha \neq \alpha'$ 。式中 * 號表示共軛複數。

這種組合爲

$$\begin{pmatrix} \hat{U} \\ \hat{V} \\ \hat{\Phi} \end{pmatrix} = \sum_n \begin{pmatrix} \hat{U} \\ \hat{V} \\ H_n \frac{1}{2} \hat{\Phi} \end{pmatrix} G_n(p) \\ = \sum_n \sum_{\alpha} \sum_{k, l} C_\alpha(n, k, l) \hat{W}_\alpha \exp(-i\nu_\alpha t + ikx + ily) G_n(p)$$

任一已知的 n, k, l , 涵蓋三種頻率。

$C_\alpha(n, k, l)$ 爲常數。

現在我們再回到非線性方程式 (3.16),

(3.17), (3.18)。我們仍用線性解的固有模作爲基函數 (Base function)。將解解如此展開

$$\vec{W} = \sum \vec{W} G_n(p) = \sum \begin{pmatrix} \hat{U}^n \\ \hat{V}^n \\ H_n \frac{1}{2} \hat{\Phi}^n \end{pmatrix} G_n(p)$$

代入 (3.16) ~ (3.18) 後,

$$(3.36) \begin{cases} \sum_n G_n \frac{\partial \hat{U}^n}{\partial t} - \epsilon^{-1} f_0 \hat{V}^n + \epsilon^{-1} H_n \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}^n}{\partial x} \\ = N_n \\ \sum_n G_n \left[\frac{\partial \hat{U}^n}{\partial t} + \epsilon^{-1} f_0 \hat{U}^n + \epsilon^{-1} H_n \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}^n}{\partial y} \right] \\ = N_n \\ \sum_n G_n \left[-\frac{\partial}{\partial t} (H_n \frac{1}{2} \hat{\Phi}^n) - \epsilon^{-1} \hat{\nabla} \cdot \hat{V}^n \right] \\ = N_\phi \end{cases}$$

各式均乘以 $G_m(p)$, 再對 p 積分, 應用 G_i 的正交歸一性

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{U}^n}{\partial t} - \epsilon^{-1} f_0 \hat{V}^n + \epsilon^{-1} H_n \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}^n}{\partial x} \\ &= \int_0^{p_s} N_n \cdot G_n dp \\ & \frac{\partial \hat{V}^n}{\partial t} + \epsilon^{-1} f_0 \hat{U}^n + \epsilon^{-1} H_n \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}^n}{\partial y} \\ &= \int_0^{p_s} N_n \cdot G_n dp \quad (3.37) \\ & \frac{\partial \hat{\Phi}^n}{\partial t} + \epsilon^{-1} H_n \frac{1}{2} \nabla \cdot \hat{V}^n \\ &= -H_n \frac{1}{2} \int_0^{p_s} N_\phi \cdot G_n dp \end{aligned}$$

於是我們得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \vec{W}(\vec{x}, t, n) + \mathcal{L}_n \vec{W}(\vec{x}, t; n) \\ &= \vec{N}(\vec{x}, t; n) \quad (3.38) \end{aligned}$$

式中

$$\vec{N}(\vec{x}, t; n) = \begin{pmatrix} P_n \{N_n'\} \\ P_n \{N_n\} \\ -H_n \frac{1}{2} P_n \{N_\phi\} \end{pmatrix} \dots (3.39)$$

P_n 稱為「垂直投影算子」定義為

$$P_n [\] = \int_0^b [\] G_n(p) dp \quad (3.40)$$

用這種算子，可以把 (3.16) 至 (3.18) 式中的垂直變化分離出去，而得到 (3.38) 式的水平結構方程式組。

為了分離開對時間的隸屬性，我們對 $\tilde{W}(x, t; n)$ 展開成

$$\tilde{W}(\vec{x}, t; n) = \sum_{\alpha, \vec{K}} C_\alpha(t; \vec{K}, n) \hat{W}_\alpha(\vec{K}, n) \exp(i\vec{K} \cdot \vec{x}) \quad (3.41)$$

式中， $\hat{W}_\alpha(\vec{K}, n)$ 為模向量(modal vector)，定義如 (3.34) (羅斯貝模) 及 (3.35) (重力波模)，純量 $C_\alpha(t; \vec{K}, n)$ 可以下面的程序求得。

定義「傅立葉投影」(Fourier Projector)

$$P_{\vec{K}} [\] = \frac{1}{XY} \int_0^x \int_0^y [\] \exp(-i\vec{K} \cdot \vec{x}) dx dy \dots \dots \dots (3.42)$$

適用於 $\{ (x, y) : 0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y \}$

，利用傅立葉級數的正交性。

$$P_{\vec{K}} [\tilde{W}(\vec{x}, t; n)] = \sum_{\alpha} C_\alpha(t; \vec{K}, n) \hat{W}_\alpha(\vec{K}, n) \dots \dots \dots (3.43)$$

再定義「成分投影」(Species Projector)

$$P_\alpha [\] = \hat{W}_\alpha^*(\vec{K}, n) \cdot [\] \dots \dots \dots (3.44)$$

可使用 \hat{W}_α 的正交歸一特性定義如前，則

$$P_\alpha P_{\vec{K}} [\tilde{W}(\vec{x}, t; n)] = C_\alpha(t; \vec{K}, n) \dots \dots \dots (3.45)$$

對 (3.38) 式依次作傅立葉投影及成分投影

，可得

$$\frac{d}{dt} C_\alpha(t; \vec{K}, n) + i\nu_\alpha C_\alpha(t; \vec{K}, n) = N_\alpha(t; n) \dots \dots \dots (3.46)$$

其中 $N_\alpha(t; n) = P_\alpha P_{\vec{K}} [\tilde{N}(\vec{x}, t; n)]$ ，而 $L_n \hat{W}_\alpha = i\nu_\alpha \hat{W}_\alpha$ 。於是展開係數 $C_\alpha(t; \vec{K}, n)$ 可由 (3.46) 式決定。(3.46) 式也可分別寫成

$$\frac{d}{dt} C_R + i\nu_R C_R = N_R \dots \dots \dots (3.47)$$

屬羅斯貝波模，及

$$\frac{d}{dt} C_e \pm i\varepsilon^{-1} \sigma_e C_e = N_e \dots \dots \dots (3.48)$$

屬重力波模。

由 (3.48) 式可見第二項的數量級為 ε^{-1} ，除非 C_e 初始時就只有 ε 的數量級，否則重力波漲大是必然的。以往的作法是令初始時 $C_e = 0$ 以消除達力波，但原始模式中的非線性項即足以另行激發重力波，這在 (3.48) 式中也可看出來。如 Machenhauer (1977) 所提議的「非線性正模初始化」的作法是讓

$$C_e = \mp i\varepsilon N_e / \sigma_e \dots \dots \dots (3.49)$$

亦即使 $\frac{d}{dt} C_e = 0$ 來壓抑 C_e 的漲大。

第四章 球面上的非線性正模初始化

(Nonlinear Normal Mode Initialization on Sphere)

在球面上的原始運動方程式，我們在第二章已經介紹過了，亦即(2.1)至(2.7)式。在忽略非線性項，摩擦項，加熱項的情形下， u, v, Φ 對 ϕ 及 p 的依賴性是可以分離的，亦即

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}(\lambda, \phi, t) \\ \hat{V}(\lambda, \phi, t) \\ \hat{\Phi}(\lambda, \phi, t) \end{pmatrix} G(p)$$

在 $R_s = R_e = R_{\bar{x}} = 0$ 的情形下，運動方程式變成

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} - 2\Omega \hat{U} \sin \phi + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \lambda} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} + 2\Omega \hat{V} \sin \phi + \frac{\partial \hat{\Phi}}{a \partial \phi} = 0 \quad \dots\dots (4.2)$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} + \frac{gH_s}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \phi} \cos \phi \right) = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{dP} \frac{p}{RS} \frac{dG}{dP} + \frac{G}{gH_s} = 0 \quad \dots\dots (4.4)$$

上、下的邊界條件為，在 $p=0$ 處， $\omega=0$ ，亦即

$$\frac{dG}{dp} = 0 \quad \text{在 } p=0 \text{ 處} \quad \dots\dots (4.5)$$

在 $p=p_s$ 處， $\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{wR\bar{T}}{p_s} = 0$ ，亦即

$$\frac{dG}{dp} + \frac{SG}{T_s} = 0, \quad \text{在 } p=p_s \text{ 處} \quad \dots\dots (4.6)$$

式中 T_s 為地面的水平平均氣溫。

要同理滿足(4.4)及(4.5)，(4.6)，只有有限的 H_s 可能，因此我們在解上多加「 n 」表示屬於固有值 H_s 的。令

$$\begin{pmatrix} \hat{U}^* \\ \hat{V}^* \\ \hat{\Phi}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}^{*,n} \\ i\hat{V}^{*,n} \\ 2\Omega \hat{\Phi}^{*,n} \end{pmatrix} \exp(im\lambda - 2\Omega i\sigma t)$$

代入(4.1)，(4.2)，(4.3)可得

$$\sigma \hat{U}^{*,n} = -\hat{V}^{*,n} \sin \phi + m \hat{\Phi}^{*,n} / a \cos \phi \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

$$\sigma \hat{V}^{*,n} = -\hat{U}^{*,n} \sin \phi - \frac{1}{a} \frac{\partial \hat{\Phi}^{*,n}}{\partial \phi} \quad \dots (4.8)$$

$$\sigma \hat{\Phi}^{*,n} = \frac{gH_s}{4\Omega^2 a \cos \phi} \left[m \hat{U}^{*,n} + \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{V}^{*,n} \cos \phi \right] \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

解(4.7)，(4.8)，我們有

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}^{*,n} &= \frac{1}{\sigma^2 - \sin^2 \phi} \left[\frac{\sigma m}{a \cos \phi} \hat{\Phi}^{*,n} + \frac{\sin \phi}{a} \frac{\partial \hat{\Phi}^{*,n}}{\partial \phi} \right] \\ \hat{V}^{*,n} &= \frac{-1}{\sigma^2 - \sin^2 \phi} \left[\frac{\sigma}{a} \frac{\partial \hat{\Phi}^{*,n}}{\partial \phi} - \frac{m \sin \phi}{a \cos \phi} \hat{\Phi}^{*,n} \right] \end{aligned} \right\} (4.10)$$

將(4.10)代入(4.9)即可得拉布拉斯潮汐方程式

$$\left\{ \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{\cos \phi}{\sigma^2 - \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{\sigma^2 - \sin^2 \phi} \left[\frac{m(\sigma^2 + \sin^2 \phi)}{\sigma(\sigma^2 - \sin^2 \phi)} - \frac{m^2}{\cos^2 \phi} \right] \right\} \hat{\Phi}^{*,n} + \frac{4\Omega^2 a^2}{gH_s} \hat{\Phi}^{*,n} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

此式的解，如第二章所述，稱為哈夫函數，它本身又是結合拉然得函數 (Associated Legendre Function) 的組合。當 H_s 已知時，特定的 σ 才能滿足解維持有限 (bounded) 的要求，故 σ 為固有值。圖 A 為 $m=1$ 時， $n-m=k$ 的 σ 和 H_s 的關係。可見不同的固有頻率的波有不同的南北結構。

回到(2.1)~(2.4)式。先省略 $R_s, R_e, R_{\bar{x}}$ ，並且把變數展開成

$$\begin{aligned}
W = \begin{pmatrix} U \\ v \\ \Phi \end{pmatrix} &= \sum_n \begin{pmatrix} \hat{U}^n \\ \hat{V}^n \\ \hat{\Phi}^n \end{pmatrix} G_n(p) \\
&= \sum_{n,m} \begin{pmatrix} \hat{U}^{\alpha n,m} \\ i\hat{V}^{\alpha n,m} \\ 2\Omega\hat{\Phi}^{\alpha n,m} \end{pmatrix} G_n(p) \exp(im\lambda) \\
&= \sum_{\alpha, n, m, \alpha'} C_{\alpha n, m, \alpha'} \exp(-2\Omega i\sigma t) \\
&\quad \begin{pmatrix} \hat{U}_{\alpha n, m, \alpha'} \\ i\hat{V}_{\alpha n, m, \alpha'} \\ 2\Omega\hat{\Phi}_{\alpha n, m, \alpha'} \end{pmatrix} G_n(p) \exp(im\lambda) \\
&= \sum_{n,m} \hat{W}^{\alpha n,m} G_n(p) \exp(im\lambda) \\
&= \sum_{n,m} C_{\alpha n, m, \alpha'} H_{\alpha n, m, \alpha'}(\phi) \exp \\
&\quad (-2\Omega i\sigma t) G_n(p) \exp(im\lambda) \dots\dots\dots (4.12)
\end{aligned}$$

其中 $H_{\alpha}^{\alpha n, m, \alpha'}(\phi)$ 稱為哈夫向量函數 (Hough vector function), 定義為

$$H_{\alpha}^{\alpha n, m, \alpha'}(\phi) = \begin{pmatrix} U_{\sigma}^{\alpha n, m} \\ +iV_{\sigma}^{\alpha n, m} \\ \Theta_{\sigma}^{\alpha n, m} \end{pmatrix} .$$

$\Theta_{\sigma}^{\alpha n, m}$ 為哈夫函數 (Hough Function), $U_{\sigma}^{\alpha n, m}$ 及 $V_{\sigma}^{\alpha n, m}$ 為相對應的速度函數。

相對應於 H_{α} 及固有頻率 σ_n^{α} 的正模, (4.12) 也可以寫成下面的形式

$$\hat{\Pi}_n^{\alpha}(\lambda, \phi, p) = \begin{bmatrix} \hat{U}_n^{\alpha}(\lambda, \phi) \\ \hat{V}_n^{\alpha}(\lambda, \phi) \\ \hat{\Phi}_n^{\alpha}(\lambda, \phi) \end{bmatrix} Z_n(p) \quad (4.13)$$

π_n^{α} 是線性方程式組的固有解, 它具有正交性, 定義為

$$(\hat{\Pi}_n^{\alpha} \cdot \hat{\Pi}_l^{\beta}) = \delta_{n,l} \delta_{\alpha,\beta} \dots\dots\dots (4.14)$$

這種正交性緣由於水平結構方程式及垂直結構方程式的解都是正交的。即

$$\left. \begin{aligned}
&\int_p Z_n(p) Z_l(p) dp = \delta_{n,l} \\
&\iint_{\phi} \left[\frac{gH_{\alpha}}{4\Omega^2} (\hat{U}_n^{\alpha} \hat{U}_l^{\beta} + \hat{V}_n^{\alpha} \hat{V}_l^{\beta}) \right. \\
&\quad \left. + \hat{\Phi}_n^{\alpha} \hat{\Phi}_l^{\beta} \right] \cos\phi d\phi d\lambda = \delta_{n,l}
\end{aligned} \right\} (4.15)$$

任何任意的風場與重力位場表示為向量

$$\Pi = \begin{pmatrix} u(\lambda, \phi, p) \\ v(\lambda, \phi, p) \\ \Phi(\lambda, \phi, p) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4.16a)$$

均可展開成 (4.13) 的級數組合, 亦即

$$\Pi = \sum_n \sum_{\alpha} x_n^{\alpha} \hat{\Pi}_n^{\alpha}(\lambda, \phi, p) \dots\dots\dots (4.16b)$$

x_n^{α} 利用 $\hat{\Pi}_n^{\alpha}$ 之正交性, 可寫為

$$x_n^{\alpha} = \langle \Pi \cdot \hat{\Pi}_n^{\alpha} \rangle \dots\dots\dots (4.17)$$

$\langle \rangle$ 表示作垂直及水平投影處理, x_n^{α} 是為正模展開係數 (normal mode expansion coefficient)。

§ 4-1 正模初始化之基本原理

現在利用 (4.16b), (4.17), 可將 (2.1) ~ (2.4) 在 $R_n = R_{\alpha} = R_{\phi} = 0$ 的情況下寫成

$$\dot{x}_n^{\alpha} + 2\Omega i\sigma_n^{\alpha} x_n^{\alpha} = 0 \dots\dots\dots (4.18)$$

舉例說, 我們將 (4.12) 代入 (2.1), (2.2) 及 (2.3) 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n,m} \hat{U}^{\alpha n,m} G_n e^{im\lambda} \\
&\quad - 2\Omega i \sin\phi \sum_{n,m} \hat{V}^{\alpha n,m} G_n e^{im\lambda} \\
&\quad + \frac{2\Omega}{a \cos\phi} \sum_{n,m} im \hat{\Phi}^{\alpha n,m} G_n e^{im\lambda} = 0 \\
&\quad \dots\dots\dots (4.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&i \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n,m} \hat{V}^{\alpha n,m} G_n e^{im\lambda} + 2\Omega \sin\phi \sum_{n,m} \hat{U}^{\alpha n,m} G_n e^{im\lambda} \\
&\quad + \frac{2\Omega}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \sum_{n,m} \hat{\Phi}^{\alpha n,m} G_n e^{im\lambda} = 0 \dots\dots\dots (4.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \frac{p}{RS} \sum_{n,m} 2\Omega \hat{\Phi}^{\alpha n,m} e^{im\lambda} \frac{\partial G_n}{\partial p} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{a \cos\phi} \sum_{n,m} im \hat{U}^{\alpha n,m} G_n e^{im\lambda}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \phi} i \sum_{n,m} \hat{V}^{\alpha n,m} G_n e^{im\lambda} \cos\phi = 0 \dots\dots\dots (4.21)$$

取垂直投影及傅立葉投影 (見前章), 分別定義為

$$P_V[\] = \int_0^{p_s} [\] G_n dp,$$

$$P_F [] = \int_0^{2\pi} [] e^{im\lambda} d\lambda \dots\dots (4.22)$$

(4.19) ~ (4.21) 變成

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^{n,m} - 2\Omega i \sin\phi \hat{V}^{n,m} + 2\Omega \frac{im}{a \cos\phi} \hat{\Phi}^{n,m} = 0 \dots\dots\dots (4.23)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{V}^{n,m} + 2\Omega \sin\phi \hat{U}^{n,m} + \frac{2\Omega}{a_1} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\Phi}^{n,m} = 0 \dots\dots\dots (4.24)$$

$$2\Omega \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Phi}^{n,m} + \frac{gH_n}{a \cos\phi} im \hat{U}^{n,m} + \frac{gH_n}{a \cos\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} i \hat{V}^{n,m} \cos\phi = 0 \dots\dots (4.25)$$

整理得

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \hat{U}^{n,m} \\ i \hat{V}^{n,m} \\ 2\Omega \hat{\Phi}^{n,m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \sin\phi & \frac{im}{a \cos\phi} \\ 2\Omega \sin\phi & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{gH_n}{a \cos\phi} im & \frac{gH_n}{a \cos\phi} (\cos\phi \frac{\partial}{\partial \phi} - \sin\phi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}^{n,m} \\ i \hat{V}^{n,m} \\ 2\Omega \hat{\Phi}^{n,m} \end{pmatrix} = 0 \dots\dots\dots (4.26)$$

再作哈夫向量投影，並且記得 α_n 是固有頻率，則可得

$$\frac{dC\alpha^{n,m'}}{dt} + 2\Omega i \sigma_{\alpha^{n,m}} C\alpha^{n,m'} = 0 \dots\dots (4.27)$$

再回到 (2.1) ~ (2.4) 及 (4.18) 式。令 \vec{X} 是一個向量代表所有正模展開係數。換句話說， X_n^k 是 \vec{X} 中的一個分量。我們現在要探討的是在 $R_n, R_s, R_{\bar{p}}$ 不為零的正模形式。在這種情況下，仿照 (4.16a) 定義 $R_n, R_s, R_{\bar{p}}$ 的列向量 (Column Vector)，為

$$R_{II} = \begin{bmatrix} R_n(\lambda, \phi, p) \\ R_s(\lambda, \phi, p) \\ R_{\bar{p}}(\lambda, \phi, p) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

對 (2.1) ~ (2.4) 作 (4.17) 之投影處理後變成

$$\dot{X}_n^k = -2\Omega i \sigma_n^k X_n^k + R_n^k(\vec{X}) \dots\dots (4.29)$$

式中

$$R_n^k(\vec{X}) = \langle R_{II} \cdot \hat{\Pi}_n^k \rangle \dots\dots\dots (4.30)$$

注意 (4.29) 中， R_n^k 因為是非線性項，可能是所有正模展開係數的函數。

(4.29) 可進一步寫為

$$\dot{\vec{X}} = -2\Omega i \Lambda_x \vec{X} + \vec{R}_x(\vec{X}) \dots\dots (4.31)$$

式中 Λ_x 為一對角線矩陣，其組成元素為固有頻率， \vec{R}_x 為非線性項的正模投影。

由第二章的漸近解探討，我們知道正模包括快變化的波解（我們稱為「快模」），及慢週期的波解（稱為「慢模」）。前者常指重力波，後者通常指羅斯貝波。當然這不一定正確，因為重力波也有屬於長週期的「慢模」的。總而言之，這兒有快模與慢模之分。我們定義快模為 \vec{F} ，慢模為 \vec{S} 。而 $\vec{X} = \vec{S} + \vec{F}$ 。因此 (4.31) 式可分解為快，慢模等兩組方程式

$$\dot{\vec{F}} = -2\Omega i \Lambda_F \vec{F} + \vec{R}_F(\vec{F}, \vec{S}) \dots\dots (4.32)$$

$$\dot{\vec{S}} = -2\Omega i \Lambda_S \vec{S} + \vec{R}_S(\vec{F}, \vec{S}) \dots\dots (4.33)$$

非線性項投影到快模 \vec{R}_F 及慢模 \vec{R}_S 時，實際仍為快模及慢模兩者之函數。

在線性的情況下，因 $R_n = R_s = R_{\bar{p}} = 0$ ，故 $\vec{R}_F = \vec{R}_S = 0$ 。(4.32)，(4.33) 兩式是互為獨立的。且

$$\dot{\vec{F}} = -2\Omega i \Lambda_F \vec{F}, \quad \dot{\vec{S}} = -2\Omega i \Lambda_S \vec{S}$$

所以只要令 $\vec{F} = 0$ 就足以消除高頻波動了。

可是在非線性的原始方程式系統中，即使初始時令 $\vec{F} = 0$ ， \vec{R}_F 仍足以再激發 \vec{F} ，而無法達成抑制高頻波的目的。比較 (4.32) 與 (3.48) 及 (4.33) 與 (3.47)，可見它們是完全類似的。(3.49) 的作法可抑制快模的漲大。亦即可令 $\vec{F} = \vec{R}_F(\vec{F}, \vec{S}) / 2\Omega i \Lambda_F \dots\dots (4.34)$ 這就是 Machenhauer (1977) 的處理方式。

(4.34) 式是非線性的，通常用累代法 (iteration) 求解。在 Macherhauer 方法的求解過程中我們不改變慢模 \vec{S} ，求解的步驟如下：

(1) 令 $\vec{F}_0 = 0, \vec{S}_0 = S$

(2) 令 $\frac{d\vec{F}}{dt} = 0$ ，則由 (4.34) 式

$$\vec{F}_1 = \vec{R}_F(\vec{F}_0, \vec{S}_0) / 2\Omega i \Lambda_F$$

(3) 重覆(2)直到收斂，

$$\vec{F}_i = \vec{R}_F(\vec{F}_{i-1}, \vec{S}_0) / 2\Omega i \Lambda_F$$

$$i = 2, 3, \dots$$

假設 \vec{F}_B 為平衡時的值 (即收斂值)，則

$$\vec{F}_B = \vec{R}_F(\vec{F}_B, \vec{S}_0) / 2\Omega i \Lambda_F$$

$$\dots (4.35)$$

(4.32), (4.33) 也可以用更一般化的方法，稱 Baer-Tribbia 法。這種方法把運動分成兩種時間尺度，一為快變化，一為慢變化，於是時間導數可寫成

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T}$$

ϵ 為一小的無因次量，代表非線性項與線性項 (科

氏項) 的比，實際上就是羅斯貝數，約等於 0.1。
 τ 為快的時間尺度， T 為慢時間尺度。就我們現在初始化問題而言，我們尋求的是：保留 \vec{S} ，而調節 \vec{F} 以至於消除快振盪，亦即尋求

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = 0$$

求解步驟大致如下。展開至 ϵ^2 ，

$$(1) \vec{F}_0 = 0, \vec{S}_0 = \vec{S}$$

$$(2) \vec{F}_1 = \vec{R}_F(\vec{F}_0, \vec{S}_0) / 2\Omega i \Lambda_F \quad (4.36)$$

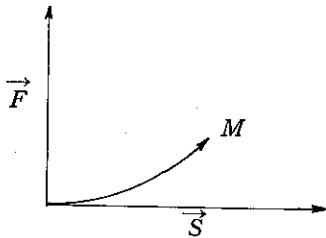
$$(3) \vec{F}_2 = \frac{1}{2\Omega i \Lambda_F} \left[\vec{R}_F(\vec{F}_1, \vec{S}_0) - \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial T} \right]$$

可惜這種方法運用起來有困難，例如 $\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial T}$ 如何求就是一大難題。詳情可參考 Baer (1977)，Bear and Tribbia (1977)。

第五章 慢流形與資料融入

(Slow Manifold and Data Assimilation)

Leith(1980) 首先引介圖解法說明這種初始化程序。(4.35) 的解可用下圖(圖三)表示。圖中橫軸表示慢的羅斯貝模的振幅縱軸表示快的重力波模的振幅。如果解落在橫軸上，解為地轉平衡的，若落在縱軸，則完全為輻散的。若都不在兩軸



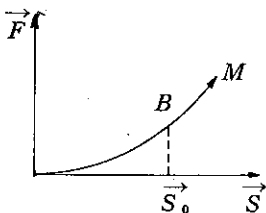
(圖三) F 表示快的重力模 S 表示慢的羅斯貝模， M 則為 (4.35) 代表的慢流形解。

上，則看解靠近那一軸。若靠近橫軸，則地轉性佔優勢，否則為非地轉性佔優勢。而標明 M 的曲線表示滿足 $F = F_B$ 的慢流形 (Slow manifold)

。落在 M 曲線上的點均代表演化緩慢的狀態。

當 $(F, S) \rightarrow 0$ 時，非線性項也趨近於零，這時的解趨近於 \vec{S} ，亦即地轉平衡。可是當振幅很大時，曲線 M 離開 \vec{S} 愈遠，表示也有慢變化的重力波存在，而運動遠離地轉平衡。

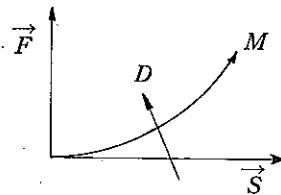
上一章所敘述的 Machenhauer 的方法，畫成圖



圖四 Machenhauer 法之圖示

可表示如圖四。先取原始猜值為 $\vec{F}_0 = 0, \vec{S} = \vec{S}_0$ ，因此是在 \vec{S} 軸上。多次的累代 (Iteration) 可使解趨近於慢流形上 (即 B 點)，趨近的路徑是維持 $\vec{S} = \vec{S}_0 = \text{常數}$ 。

我們現在利用這種原理來處理資料的問題。假設有一組資料，包括質量場、風場等，原來都平衡得很好，以至於都落在慢流形上。再假設此時某一氣象場 (如重力位 Φ) 被固定住，而其他氣象場 (如風) 則在改變，那麼這樣的場不再維持在慢流形上而會沿著 D 的線移動 (見圖五)。這條線我們稱為資料流形 (Data Manifold)，只要資料不在慢流形上，就會有高頻重力波的激發，其振幅與資料所在那一點離開慢流形的距離成正比。所以資料融入要作的工作是將資料放進模式後，再經正模初始化的處理，使模式狀態 (Model State) 回到慢流形上，以消除重力波的激發。

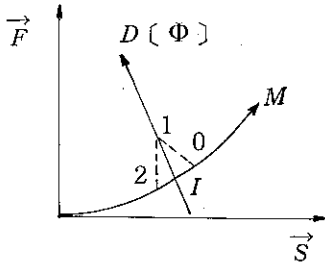


圖五 資料流形

資料融入 (Data Assimilation) 的意義，就是在綜觀天氣觀測網 (Synoptic Observational Network) —— 觀測是同時進行的，因此可以作一般的客觀分析 —— 之外的其他形式觀測方法所得到的資料 (稱為非綜觀資料 —— Asynoptic Data)，如何放進模式中，而能盡量保存非綜觀資料的原形，且同時在模式中不產生震撼 —— 即高頻重力波的激發，所謂非綜觀資料包括由飛機、人

造衛星、雷達等方式所觀測得到的資料，其觀測時間和發佈時間都和綜觀天氣觀測網不一致。

仿照前面所用慢流形的示意圖，資料融入的過程可用圖六來表示。假定我們對重力位場很信任，



圖六 資料融入與慢流形

我們就把非綜觀資料中的重力位安插進模式中，則模式狀態所處的位置一定在 D 的資料流形上，可能不在慢流形上，我們必須再作調整，使之落在 I 點上，這時模式狀態不但在慢流形上（不激發高頻重力波），而且是在資料流形上（顧全資料）。這種情形，我們稱為「理想」方式。

當然對一般性的資料，我們事前不可能知道資料流形 D 在那裡，因此不可能把融入的資料處理到 I 點上。我們最樂觀的期望是將資料處理到慢流形上，同時很靠近 I 點。那麼，我們融入的資料，不會引起震撼（Shock），而且仍相當顧全資料的原始性。

下面我們用三個簡單例子來作進一步說明，圖六中 O 的位置表示非綜觀資料融入前的模式狀態，融入後在 1 的位置（必然在資料流形上），調整後在 2 的位置（必須很靠近慢流形）。

(甲) 直接安插，而不調整。

資料安插後，狀態會由 O 跳到 1 ，因此跳離慢流形，增加 F 的振幅，表示產生了高頻重力波，引起震撼。

(乙) 無強制非線性調整（unconstrained nonlinear adjustment）

我們可以用非線性正模初始化的技巧作調整。讓

$$\vec{F}(2) = R_F(\vec{F}(2), \vec{S}(2)) / 2\Omega i \Lambda_F \dots\dots\dots (5.1)$$

式中的 2 表示在圖上 2 的位置， $\vec{F}(2)$ 當然實際上就是上一章的 \vec{F}_B ，處理步驟如（4.35）所示。注意這時 $\vec{S}(2) = \vec{S}(1)$ ，故 2 不一定會靠近 I ，但不會引發高頻重力波。

(丙) 強制非線性之調整（constrained nonlinear adjustment）

定義積分

$$I = \int_A [(\vec{V}_0 - \vec{V}_I)^2 W_V + (\Phi_0 - \Phi_I)^2 W_\Phi] dA \dots(5.2)$$

$\int_A [] dA$ 表示對大氣積分， \vec{V}_0, Φ_0 表

示觀測的風及重力位， \vec{V}_I, Φ_I 表示「理想」的融入資料。 W_V 及 W_Φ 表示風和重力位的權重函數，如果風是百分之百可信，而重力位完全不可信，則可令 $W_\Phi = 0$ ，相反的，若風不可信，則可令 $W_V = 0$ 。利用變分法的原理，我們在

$$\vec{F}_I = R_F(\vec{F}_I, \vec{S}_I) / 2\Omega i \Lambda_F \dots\dots(5.3)$$

的強制（constrain）下，令 $\delta I = 0$ ，則求得的解，可讓模式狀態由 1 的位置回到 I ，這時兼顧了資料的原始性而且不會引起震撼。資料的自然融入就可以達成了。

有關的實驗及詳細情形可參考 Daley (1981)，Daley and Puri (1980) 及 Tribbia (1982)。

第六章 結論與展望

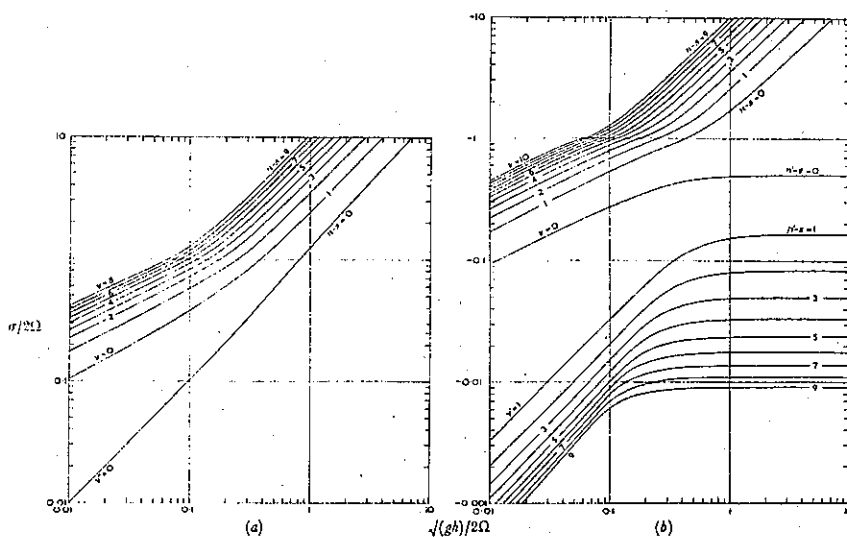
(Conclusion and Suggestions for Further Research)

近年來數值天氣預報已在一些國家與地區成為天氣預報的主體。他們所用的模式及涵蓋的物理基本上都相差無幾，預報的準確程度和成效却有相當大的差距。主要的因素就是在初始化的程序上。本文所介紹的非線性正模初始化，擁有紮實的物理與數學依據，是所有初始化方法中最嚴密，完整且有效的一種。它一方面是1980年度初期研究的熱門主題，也必然是將來數值天氣預報初始化的主流。

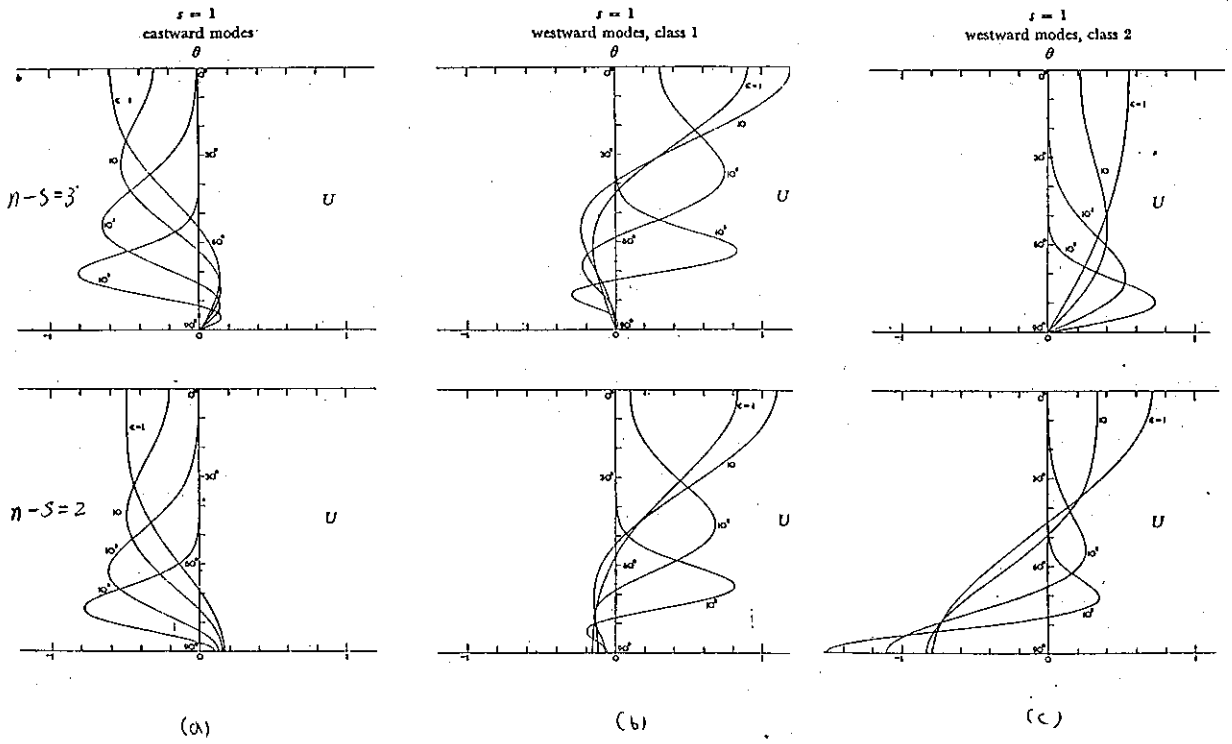
非線性正模法不但是初始化的絕佳方式，而且它在其他方面的應用也甚具神效。例如，在非線性觀氣象資料的融入模式的問題中，非線性正模法可讓我們避免轉接時的震撼，而且不犧牲資料的原始性

。同樣的原理還可讓我們合理的加大原始模式積分的時間間隔，或讓我們選擇適當的時間分段切割方式 (Splitting) (見 Daley, 1980)。我們相信非線性正模法將來在客觀分析方面也會扮演重要的角色。

中央氣象局目前正積極發展數值天氣預報，遲早會遭遇初始化及資料融入的問題。因為這個問題既不簡單也不單純，我們覺得應該早日著手準備，以為前瞻性工作之一。本文雖然主要是評介性質，我們藉此踏出我們的第一步，希望後續的，更實際的工作能順利的展開。



圖一 $m=1$ ，球面上正模的固有頻率
(a)向東傳播者 (b)向西傳播者



圖二 風（子午向）函數 (a)向東傳播者
 (b)向西傳播者，第一類波
 (c)向西傳播者，第二類波

参考文献

1. Baen, F., 1977: Adjustments of initial conditions required to suppress gravity oscillations in nonlinear flows. Contrib. Atmos. Phys., 50, 350-366.
2. Baen, F., and J. Tribbia, 1977: On complete filtering of gravity modes through non-linear initialization. Mon. Weather Rev., 105, 1536-1539.
3. Chapman, S., and R. Lindzen, 1970: Atmospheric Tides. D. Reidel, Hingham, Mass.
4. Daley, R., 1977: The application of non-linear normal mode initialization to an operational forecast model. Atmos. Ocean, 17, 97-124.
5. Daley, R., and K. Puri, 1980: Four-dimensional data assimilation and the slow manifold. Mon. Weather Rev., 108, 85-99.
6. Daley, R., 1981: Normal mode initialization. Rev. Geophys. Space Physics, 19, 450-468.
7. Dickinson, R., 1966: Propagators of atmospheric motions. Rep. 18, Dep. of Meteorol., Mass. Int. Technol., Cambridge.
8. Dickinson, R., and D. Williamson, 1972: Free oscillations of a discrete stratified fluid with application to numerical weather prediction. J. Atmos. Sci., 29, 623-640.
9. Flattery, T., 1967: Hough function. Tech. Rep. 21, Dep. of Geophys. Sci., Univ. of Chicago, Chicago, Ill.
10. Hough, S., 1898: On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of the tides, II, On the general integration of Laplace's dynamical equations. Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A, 191, 139-185.
11. Kasahara, A., 1976: Normal modes of Ultra-long waves in the atmosphere. Mon. Weather Rev., 104, 669-690.
12. Kasahara, A., 1978: Further studies on a spectral model of the global barotropic primitive equations with Hough harmonic expansions. J. Atmos. Sci., 35, 2043-2051.
13. Kasahara, A., 1980: Effect of zonal flows on the free oscillations of a barotropic atmosphere. J. Atmos. Sci., 37, 917-929.
14. Kasahara, A., and K. Puri, 1981: Spectral representation of three-dimensional global data in normal mode functions. Mon. Weather Rev., 109, 37-51.
15. Leith, C., 1980: Nonlinear normal mode initialization and quasi-geostrophic theory. J. Atmos. Sci., 37, 958-968.
16. Longuet-Higgins, M., 1968: The eigenfunctions of Laplace's tidal equations

- over a sphere. Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A, 262, 511-607.
17. Machenhauer, B., 1977: on the dynamics of gravity oscillations in a shallow water model with applications to normal mode initialization. Contrib. Atmos. Phys., 50, 253-271.
18. Miyakoda, K., and R. Moyer, 1968: A method of initialization for dynamical weather forecasting. Tellus, 20, 115-128.
19. Phillips, N., 1960: On the problem of initial data for the primitive equations. Tellus, 12, 121-126.
20. Sasaki, Y., 1958: An objective analysis based on the variational method. Meteorol. Soc. Jpn., 36, 77-78.
21. Tribbia, J., 1979: Non-linear initialization on an equatorial beta plane. Mon. Weather Rev., 107, 704-713.
22. Tribbia, J., 1981: Normal mode balancing and the ellipticity condition. Mon. Weather Rev., 1751-1761.
23. Tribbia, J., 1982: On variational Normal mode initialization. Mon. Weather Rev., 110, 455-470.
24. Williamson, D., 1976: Normal mode initialization procedure applied to forecasts with the global shallow water equations. Mon. Weather Rev., 104, 195-206.
25. Williamson, D., and R. Dickinson, 1976: Free oscillations of the NCAR global circulation model. Mon. Weather Rev., 104, 1372-1391.

比較1981年5月28日，1983年5月31日 次及1984年6月3日北部豪雨的氣象因素比較

陳景森
國立中央大學

一、前言

由於1984年6月3日的豪雨，使得台北市，台北縣以及桃園縣地區受到很大的損失。根據災情報導，約有32人死亡，12人受傷，5人失蹤，鐵公路交通中斷，各地積水嚴重（立和劉，1985），由這一次豪雨帶來嚴重的災情，故再一次的證明對豪雨有效的預報，偵測以及警告系統的建立是迫切需要的。

豪雨的產生，大多是由於對流系統產生大量降水而引起的。但是每一種對流系統的來源以及如何組織成爲成熟的系統，卻可能有很大的不同。例如熱帶的擾動可能與中緯度天氣系統或地形相互作用，在某些地區產生劇烈降水（Schlegel, 1976；Williams et al, 1978）。在美國西部，移動緩慢的雷雨，可能會帶來豪雨（William, 1976；Randerson, 1976）。有組織的雷雨系統由於生命期較長或是雷雨胞的不斷產生，也可能帶來豪雨

（Merritt et al, 1974；Sourbeer and Gentry, 1961），地形的抬升也可能激發對流系統的產生因而導致豪雨（Maddox et al, 1978）。

在台灣地區，5、6月間的豪雨常與梅雨鋒有很大的關係，如1981年5月28日，1983年5月31日以及1984年6月3日的豪雨，皆與梅雨鋒面的中尺度對流系統有關，因此了解豪雨發生前的氣象要素，豪雨系統如何移動，以及豪雨系統的激發機制等研究，對豪雨的預報有很大的幫助。因此本文的目的，在對上述三個個案作分析，希望能找出發生豪雨前的天氣要素之共通性以及研究豪雨系統的移動和激發機制，來作爲預報之參考。

二、豪雨發生前及當時的天氣概況

分析1981年5月28日，1983年5月31日以及1984年6月3日發生豪雨前及當時的綜觀天氣，可以發現這三天都具有下列幾點共同性質。

(一)風場的特性

在接近本省西側與西北側的區域內，其低對流層如850 mb 以及700 mb 都具有 15ms^{-1} 以上的強風速同時風場的分佈具有合流（Confluence）的情形（圖1）在較高的對流層（如200 mb）的風場，在本省北部及中北部地區上空有明顯的分流（Diffluence）（圖2）現象。這種低層輻合高層輻散的配合，有利於對流的發展。

(二)低層溫度平流

由850 mb的風場及溫度場（圖1）的配合，使得本省北部可受到很強的暖平流，增加大氣的不穩定度。

(三)溫度場的分析

分析850 mb $T-T_d < 3^\circ\text{C}$ 的等值綫及風場的分佈情形，北部地區低層水汽的平流是相當顯著的（圖1）。在5月27日及5月30日中層大氣（500 mb）也是在潮溼空氣中，因此整層空氣很潮溼有助於輻合的水汽轉變成降水。

上述(一)(二)項的定量分析可借助客觀分析求得，但是由於探空測站時空間隔的限制，中小尺度的消息，仍然會受到限制。

(四)地面鋒面與低層槽綫

在這三個個案的地面鋒面幾乎呈東西走向接近本省北部，伴隨侵台鋒面的同時在850 mb 或700 mb 有短槽接近（圖3及4）。至於短槽對豪雨發生的影響程度需要借助更多的個案分析及數值實驗才能了解。

中尺度低壓

追蹤這三個個案的地面天氣圖，可以發現有一中尺度低壓伴隨降水區，此低壓與雲系亦相當配合（圖5）。當鋒面南下時此低壓和雲系已移向台灣地區然後有大雨發生。要明白這種尺度的低壓對豪雨發生的影響，我們必須由更多的觀測資料與數值模擬著手。

三、豪雨發生前探空資料的特性

檢查三個豪雨個案發生前的探空資料的 θ 。

發現在近地面（850 mb以下） θ 。隨高度減少（圖6）。雖然6月2日台北的探空在近地面60 mb一層的大氣 θ 。有隨高度略為增加，但從940 mb到650 mb θ 。減少很多，尤其在中層大氣 θ 。為330 K，故大氣的不穩定度很大。當鋒面來時這三個個案的不穩定大氣受到抬升，強烈對流容易產生。

探空資料的特性，亦可以由低層水汽平流（ uq ）以及大氣水汽的輻合量中可降水量（ $1-b$ ）來歸類。其中 u 及 q 各為1000, 850及700 mb的風速及混合比的平均值，但考慮密度的比例。 b 的定義參考Kuo and Anthes (1984)。

$$b = \begin{cases} \left(\frac{1 - \langle RH \rangle}{1 - RH_c} \right)^2 & \langle RH \rangle \geq RH_c \\ 1 & \langle RH \rangle < RH_c \end{cases}$$

在此 RH_c 取0.5，而 $\langle RH \rangle$ 假設為1000, 850, 700, 500, 400, 300 mb的RH的平均值。圖7中“x”號表示， $(1-b) \geq 0.85$ 次及 $uq \geq 100$ (ms^{-1}) (qkg^{-1})的個案，在這些個案都有豪雨發生（表1）。在計算5月27日台北的資料，由於風場資料缺乏，故以澎湖資料代替。另外5月31日的豪雨是用5月30日澎湖資料計算得到 $(1-b) \leq 0.85$ 。因此吾人必須探討在計算 b 中所用的 $\langle RH \rangle$ 及 RH_c 的計算方法，是否要加以修正。此即在計算 $\langle RH \rangle$ 的數值時，要用那些層的RH，另外 RH_c 的臨界值是否是0.5。

至於6月2日晚上台北的探空資料的潛浮力量（Potential Buoyant Energy, PBE）的低層風切量也具有產生大雨的特性（圖8，表2）。

PBE的定義如下：

$$PBE = g \int_{LFC}^{EQL} \left(\frac{T_p - T_e}{T_e} \right) dz。$$

其中LFC及EQL是把具有地面50mb性質的氣塊向上抬升，經自由對流層（LFC）後求空氣塊的溫度 T_p 與環境 T_e 之差，一直到平衡高度為止（EQL）。另外低層風切是以

$$\int_0^{3.6 \text{公里}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz / \int_0^{3.6 \text{公里}} dz \text{ 表示。}$$

為什麼有些個案用PBE以及低層風切來表示探空的特性，而有些用 $(1-b)$ 及 uq 來表示探空的特性呢？如果探空資料未受對流的雲系的影響，則使用PBE以及低層風切來表示如此可以代表進入降水系統環境的空氣性質。但如果探空資料受到對流雲系的影響則使用 uq 及 $(1-b)$ 來表示探空的特性，主要的著眼點在於代表水汽的平流及空氣中可降水量的大小。

四、豪雨系統的移動

在氣象界，了解及預測雷雨的產生及移動是一門有趣且困難的學問之一。一般而言，風暴的移動大約和雲層內的環境風場的平均風一致（Byers and Braham, 1949），但是強烈風暴的移動方向有偏向平均風場的右方且有移動較慢的趨勢（Browning, 1964）。偏向平均風場左方移動的風暴亦高出現過（Hammond, 1967）。有時風暴成對發展，分別偏向平均風場的右方及左方（Fujita and Grandoso, 1968；Charba and Sasaki, 1971）。另外多雨胞風暴的移動，深受雨胞形成的快慢及位置的影響（Browning and Ludlam, 1960；Marwitz, 1972；Miller and Fankhause, 1983）。除了環境風場與風暴的移動有密切的關係外，其他許多因素亦能影響風暴的移動。例如由Fritsch and Rodgers (1981)列出的因素：地形，陣風鋒面，濕舌的分佈，對流雨胞之間的相互作用。又如Weaver (1979)強調邊界層輻合區會影響風暴的移動。

分析 1981 年 5 月 27~28 日及 1983 年 5 月 31 日影響北部豪雨的對流系統，可以發現這些系統是從大陸東南移到台灣北部，因此吾人可以用人造衛星及雷達來追蹤對流系統的移動。Chen and Chi (1985) 指出 (圖 9 a) 影響 5 月 28 日北部豪雨的對流系統，在 5 月 27 日 20 L 前後，是向東南方以 7.4 ms^{-1} 移動。由澎湖 5 月 27 日 20 L 的風場可知 (圖 9 b) 850 mb 與 300 mb 的風切 ($7.5 \text{ ms}^{-1} / 345^\circ$) 似乎可以描述對流系統的移動。另外對於 5 月 31 日的個案，比較雷達回波的分析 (圖 10 a) 可知回波系統約以 5.6 ms^{-1} 向南移動而澎湖 5 月 31 日 20 L 850 mb 與 300 mb 的風切 (圖 10 b) (9.5 ms^{-1} , 向南) 可以描述對流系統移動的方向。

影響對流系統移動的速率很多，如低層水汽的輻合，對流系統如何攔截水汽，地形的影響，等因素，因此速率的預測很難。

五、陣風鋒面與豪雨

由於陣風鋒面具有對周圍環境的抬升作用，使得陣風鋒面能夠影響雷雨對流系統的產生以及雷雨系統的演化。利用人造衛星 Purdom (1973 a, 1976) 證實當中尺度高壓移出雷雨區時，常伴有弧狀雲 (Arc-Shaped Cloud)。Purdom (1973 b, 1974; 1976) 亦指出弧狀雲若與其他邊界 (如鋒面，陣風鋒面，海風鋒面，以及颱風等) 有相交的話，其相交處常可產生劇烈的天氣。Holle 和 Maier (1980) 曾研究發生在美國佛羅里達州的兩個陣風鋒面相交處所產生的龍捲風。Simpson (1980) 亦認為佛州的陣風鋒面有助於雲雨區的合併，而使合併後的雲雨區產生較大的降水。

陣風鋒面及中尺度高壓可以脫離其產生之源地而在數千或數百公里外影響對流雲雨系統的發展。Purdom (1979) 利用人造衛星的資料指出陣風鋒面能夠在發生源地 150 公里以外有積雲存在的地區加強積雲的成長，使積雲發展成較大的系統。接著他又在 1982 年的報告中指出兩個伴隨在陣風鋒

面上的弧狀雲在 300 公里外處相交，其相交處是對流系統發展的好地方。Matthews (1981) 利用衛星及雷達資料觀測到陣風鋒面能夠在 60 公里外無雲區引發產生雷達回波的對流系統。

在台灣地區，中尺度對流系統所產生的陣風鋒面與其他界面相交亦可能產生大的降水。如 1983 年大武地區在 5 月 13 日早上 10 點及 11 點分別有 49.8 mm 及 60.4 mm 的降水，全日有 173.9 mm 的降水可能是兩個陣風鋒面的相交。(見 Chen and Chi (1985) 的圖 1)。另外，1981 年 5 月 28 日早上 10 點在新竹地區產生的劇烈降水 (88.7 mm) 相信也是陣風鋒面與梅雨鋒面相交所產生的對流胞的影響 (見丘與林 (1985) 的圖 14)。1984 年 6 月 3 日台北地區的豪雨亦和陣風鋒面上的弧狀雲有關 (見丘與劉 (1985) 之圖 3)。因此要有效預報豪雨發生的時間及地點，我們必須了解在何種情況下，陣風鋒面能夠與其他的界面 (如梅雨鋒面或其他的陣風鋒面) 相交，而激發豪雨。

六、結論與建議

豪雨的預報，是一個非常困難的題目，因為它牽涉的尺度從大尺度，中尺度到小尺度相互之間的關係。因此在本文先比較三個個案的大尺度天氣概況 (第二節)，再分析探空資料的特性 (第三節)。然後提到豪雨發生後，要能準確的預報其移動速度 (第四節)，最後談到在中小尺度範圍內，豪雨系統的激發機制。

建議事項：

1. 分析以前發生豪雨個案的天氣概況是否與此三個個案有相似的情形。
2. 分析探空資料的特性，並找出是否有更好的參數可作為豪雨預報的指針。
3. 分析豪雨系統移動的速度與風場的關係。即移動速度是與雲層平均風，或是和某一層與某一層的風切的關係。
4. 了解在何種情況下，陣風鋒面能激發新的豪雨系統。

5. 了解豪雨發生前的天氣特性後，如何利用統計模式，客觀預報豪雨。
6. 如何利用客觀分析的方法，整理資料，定量的描述豪雨發生前的各種天氣特性。
7. 如何利用中尺度模式，了解豪雨發生的動力及熱力因素。
8. 如何把台灣及華南地形的豪雨發生的影響，作適當的評估。

參 考 文 獻

丘台光、林雨我，1985：利用衛星、雷達資料作台灣地區豪雨預報之初步研究。天氣分析與預報研討會，107—129。

丘台光、劉復誠，1985：民國73年6月3日台灣北部地區豪雨之個案研究。大氣科學、12, 93—102。

Chen, G. T.-J. and S.-S. Chi, 1985: case study of disastrous heavy rains in Mei-Yu season over northern Taiwan-28 May 1981 case. Proceedings of the ROC-JAPAN joint seminar on multiple hazards mitigation Taipei, Taiwan. R. O. C. 815-839.

Browning, D. A., 1964: Air flow and precipitation trajectories within severe local storms which travel to the right of the wind. J. Atmos. Sci 21 634-639.

Browning, D. A. and F. H. Ludlam, 1960: Radar analysis of a hailstorm. Tech. Note, No. 5. Dept. of Meteorology, Imperial college, London, 106pp.

Byers, H. R., and R. Braham, 1949. The Thunderstorm. Gpvt. Printing Office. Washington, D.C. 287pp.

Charba, J., and Y. Sasaki, 1971: Structure and movement of the severe

thunderstorms of 3 April 1964 as revealed from radar and surface mesonet network data analysis. J. Meteor. Soc. Japan 49 191-213.

Fritsch, J. M. and D. M. Rodgers 1981: The Ft. Collins Hailstorm-an example of the short-term forecast enigma. Bull. Amer. Meteor. Soc., 62, 1560-1569.

Fujita, T. T., and H. Grandoso, 1968: Split of a thunderstorm into anticyclonic and cyclonic storms and their motion as determined from numerical model experiments. J. Atmos. Sci., 25, 416-439.

Hammond, G. R., 1967: Study of a left moving thunderstorm of 23 April 1964. Tech. Memo. IERTM-NSSL, 31, ESSA, Norman, OK. 47pp.

Holl, R. L. and M. W. Maier, 1980: Tornado formation from downdraft interaction in the FACE mesonet network. Mon. Wea. Rev., 108, 1010-1028.

Maddox, R. A., L. R. Hoxit, C. F. Chappell and F. Caracena, 1978: Comparison of meteorological aspects of the Big Thompson and Rapid city flash floods. Mon. Wea. Rev., 104 375-389.

Kuo, Y.-H. and R. A. Anthes, 1984: Semiprognostic tests of Kuo-type cumulus parameterization schemes in an extratropical convective system. Mon. Wea. Rev., 112, 1499-1509.

Marwitz, J. D., 1972: The structure and motion of severe hailstorms. Part II:

Multi-cell storm. J. Appl. Meteor., 11, 180-188.

Matthews, D. A., 1981: Observations of a chord are triggered by thunderstorm outflow. Mon. Wea. Rev., 109, 2140-2157

Merritt, L. P. K. E. Wilk and M. L. Weible, 1974; Severe rainstorm at Enid, Oklahoma, October 10, 1973. NOAA TM NWS WR-103, 20pp.

Miller, L. J. and J. C. Fankhauser, 1983: Radar echo structure, air motion and hail formation in a long stationary multicellular thunderstorm. J. Atmos. Sci., 40, 2399-2418.

Purdom, J. F. W., 1973a: Meso-highs and satellite imagery. Mon. Wea. Rev., 101, 180-181.

Purdom, J. F. W., 1973b: Satellite imagery and the mesoscale convective forecast problem. Preprints 8th Conf. Severe Local Storms, Denver, Colo. Amer Meteor Soc. 244-251.

Purdom, J. F. W., 1974: Satellite imagery applied to the mesoscale surface analysis and forecast. Preprints 5th Conf. Weather forecasting and analysis, St. Louis, Mo. Amer Soc. 63-68

Purdom, 1976: Some uses of high-resolution GOES imagery in the mesoscale forecasting of convection and its behavior. Mon. Wea. Rev., 104, 1474-1483.

Purdom, 1979. The development and evolution of deep convection. Preprints 11th Conf. Severe Local Storms.. Kansas City, Amer. Meteor. Soc., 143-150.

Randerson, D., 1976: Meteorological analysis for the Las Vegas, Nevada, flood of 3 July, 1975. Mon. Wea. Rev., 104, 719-727.

Schlegel, J., 1976: A comparison of Hurricane Eloise and Hurricane Angles. Weatherwise, 29, 70-73.

Simpson, J., 1980: Downdrafts as linkages in dynamic cumulus seeding effects J. Appl. Meteor., 19, 477-487.

Sourbeer, R. H. and R. Gentry, 1961: Rainstorm in southern Florida, January 21, 1957. Mon. Wea. Rev., 89, 9-16.

Weaver, J. P. 1979: Storm motion as related to boundary-layer convergence. Mon. Wea. Rev., 107, 612-619.

Williams, G., 1976: Application of the National Weather Service flash-flood program in the Western Region. NOAA TM NWS WR-103, 20pp.

Williams, P., Jr., C. L. Glenn and R. L. Raetz, 1972: Flash flood forecasting and warning program in the western Region NOAA TM NWS WR-83, 12pp.

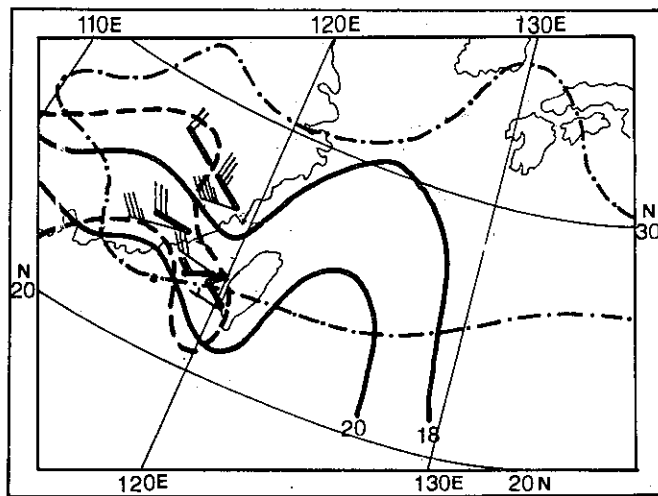


圖 1 a

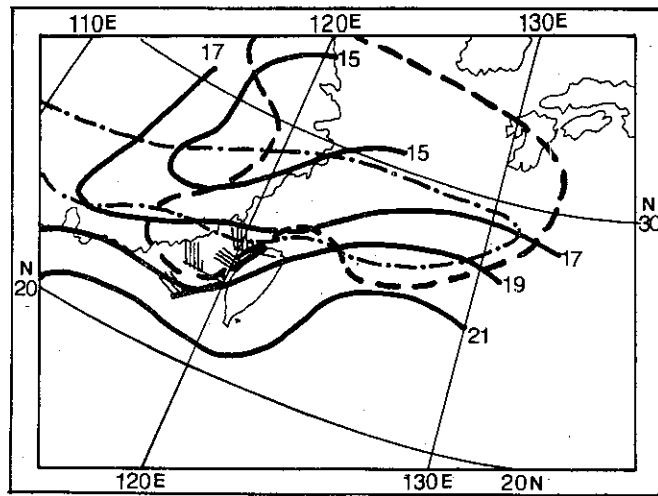


圖 1 c

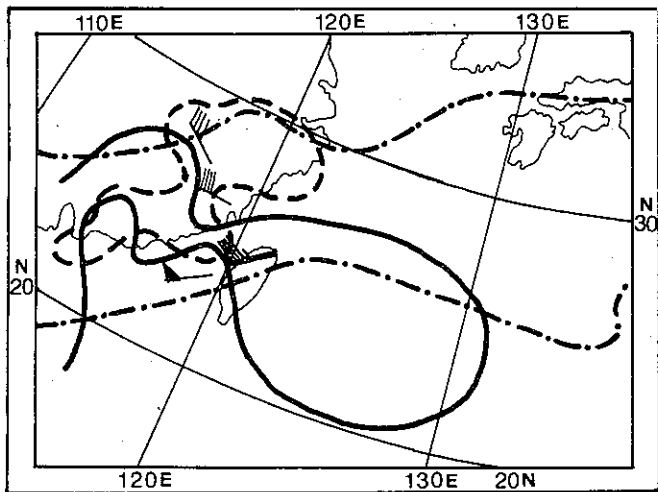


圖 1 b

圖 1 豪兩個案發生前 12 小時，溫度場、濕度場及風場之分佈型態圖：

- (a) 1981 年 5 月 27 日 12 Z (70, 5, 28 新竹、桃園水災)
- (b) 1983 年 5 月 30 日 12 Z (72, 5, 31 新竹地區水災)
- (c) 1984 年 6 月 2 日 12 Z (73, 6, 3 北部地區水災)

粗實線表 850 mb 溫度線

粗虛線表 850 mb $T - T_s < 3^\circ\text{C}$ 之等值線

點虛線表 500 mb $T - T_s < 6^\circ\text{C}$ 之等值線

粗風桿表 850 mb 風場

細風桿表 700 mb 風場

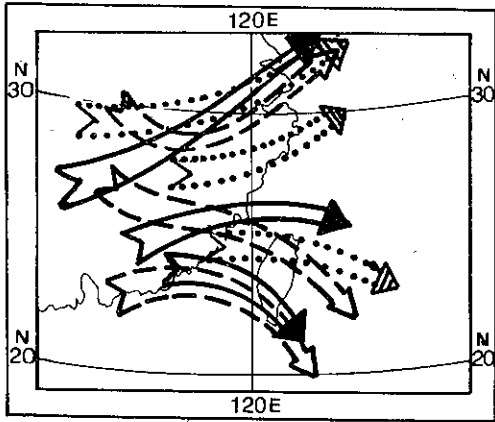
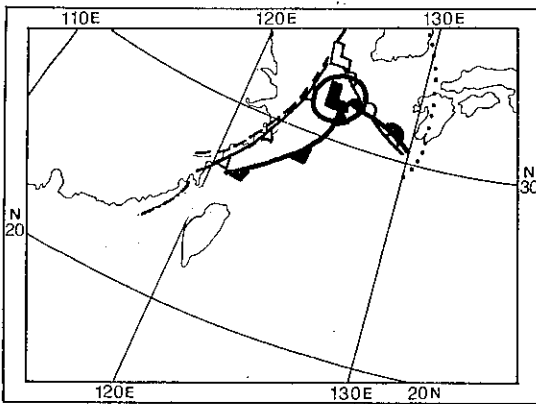


圖 2 豪兩個案發生前 12 小時，200 mb 上噴射氣流之分佈型態示意圖。

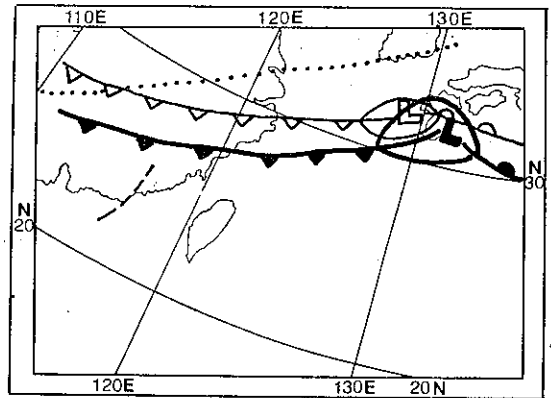
實箭頭：1981 年 5 月 27 日 12 Z

空箭頭：1983 年 5 月 30 日 12 Z

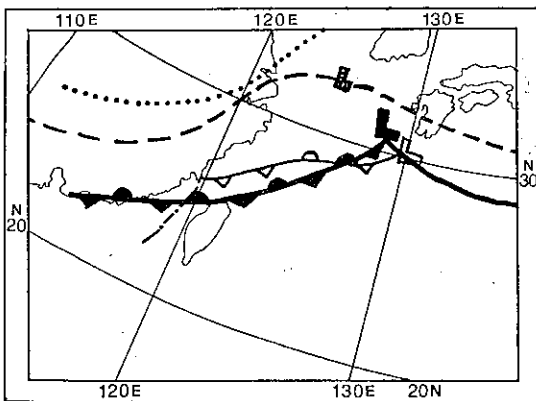
線箭頭：1984 年 6 月 2 日 12 Z



(a)



(b)



(c)

圖 3 豪兩個案發生前 12 小時綜觀天氣圖之型態：

(a)本省西邊有 850mb 短槽

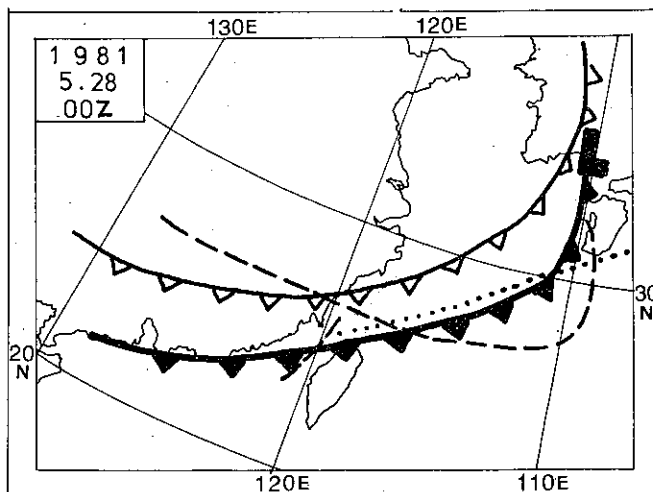
(b)本省西邊有 700mb 短槽

(c)本省西邊有 850mb 短槽

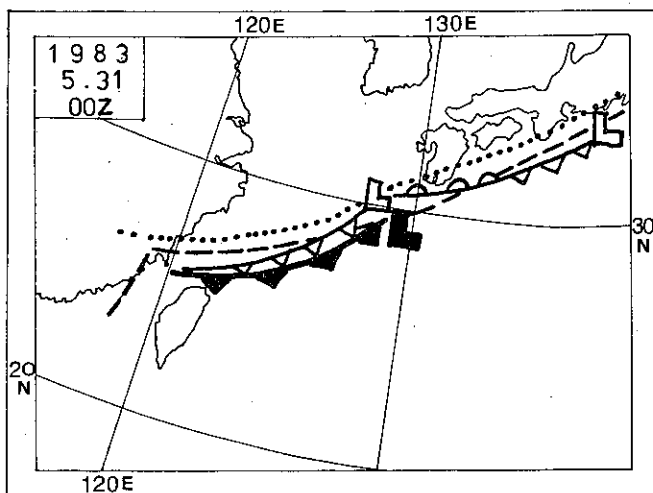
粗實線：地面鋒面 點線：500mb 槽線

細實線：850mb 鋒面 點虛線：850mb 槽線

虛線：700mb 槽線



(a)



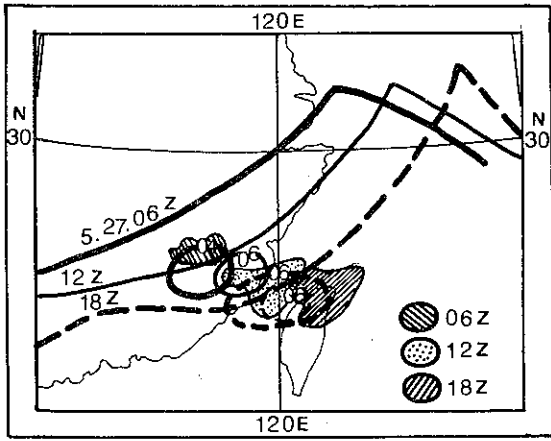
(b)

圖 4 豪雨個案發生當時綜觀天氣圖之型態

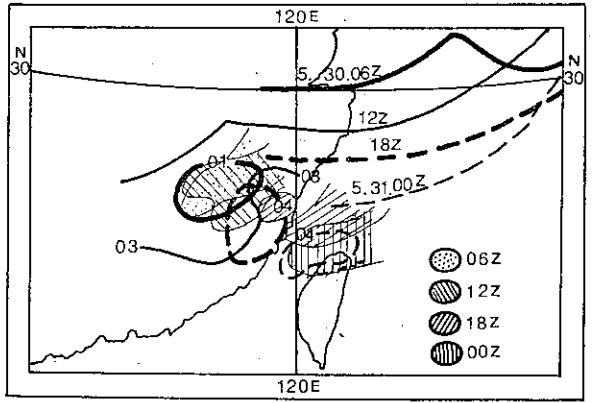
(a) 1981年5月28日00Z

(b) 1983年5月31日00Z

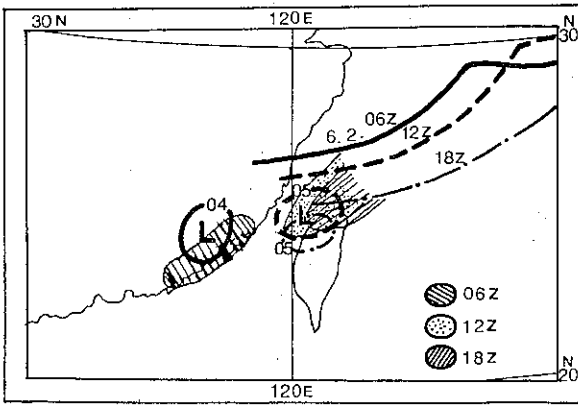
圖說同圖3



(a)



(b)



(c)

圖5 豪雨個案之中尺度低壓分析與雲系移動圖，
圖中低壓的數字表氣壓數值，雲系範圍(a)表
- 52 °C (b)及(c)表- 32 °C 所圍區域
(a) 1981.5.27.06Z ~ 5.27.18Z
(b) 1983.5.30.06Z ~ 5.31.00Z
(c) 1984.6.2.06Z ~ 6.2.18Z

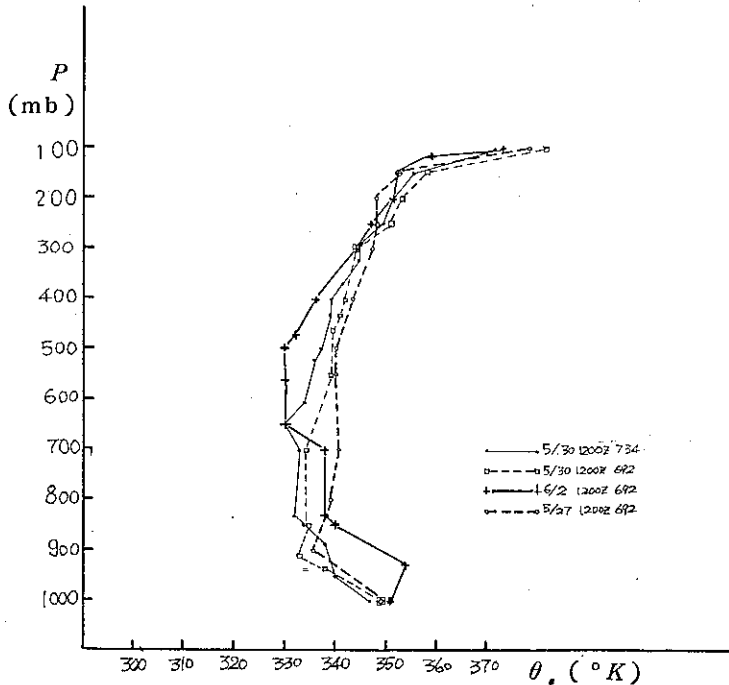


圖6 豪雨發生前 θ 隨高度變化

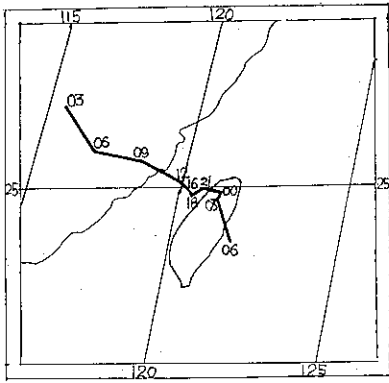


圖 9 a 1981.5.27 ~28 華南中尺度對流系統
移動圖
(取自 Chen and Chi, 1985)

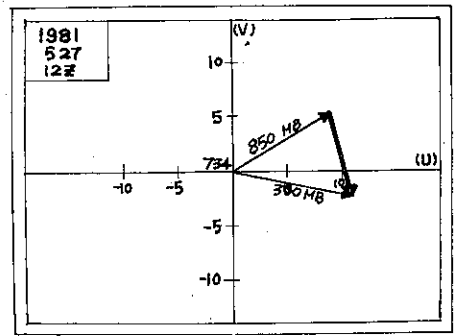


圖 9 b 1981.5.27.12Z 馬公探空資料所測得
300 mb 及 850 mb 風場，粗線表示
850 mb 及 300 mb 風切方向。

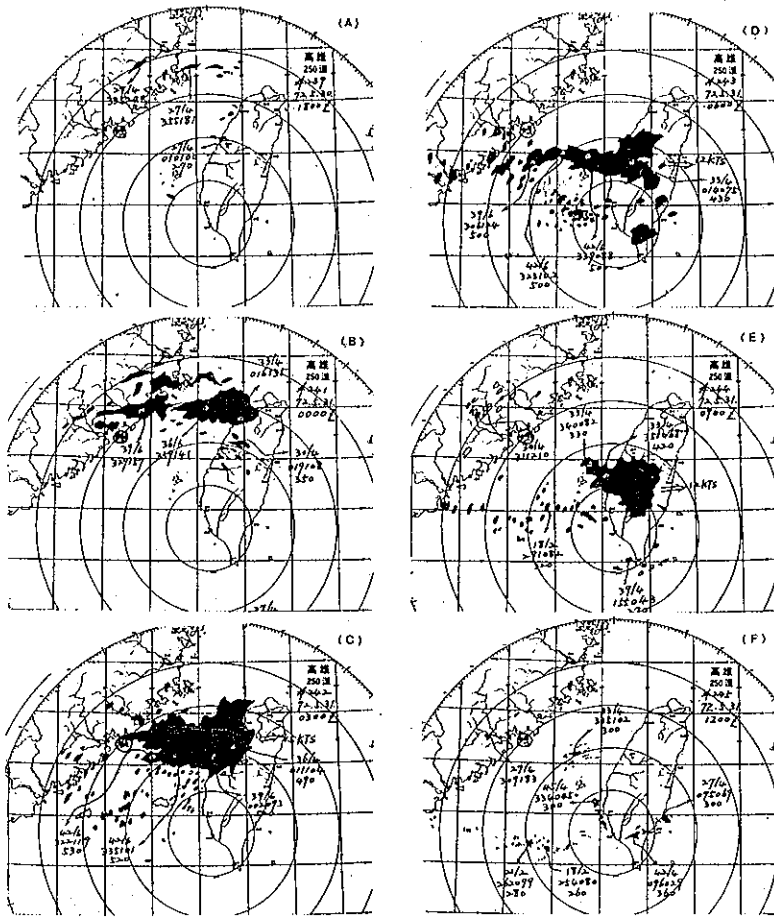


圖 10 a 1983 年 5 月 30 日 18 Z ~ 5 月 31 日 12 Z 高雄雷達站降水回波連續追蹤圖：
(a) 5, 30, 18 Z (b) 5, 31, 00 Z (c) 5, 31, 03 Z (d) 5, 31, 06 Z
(e) 5, 31, 09 Z (f) 5, 31, 12 Z

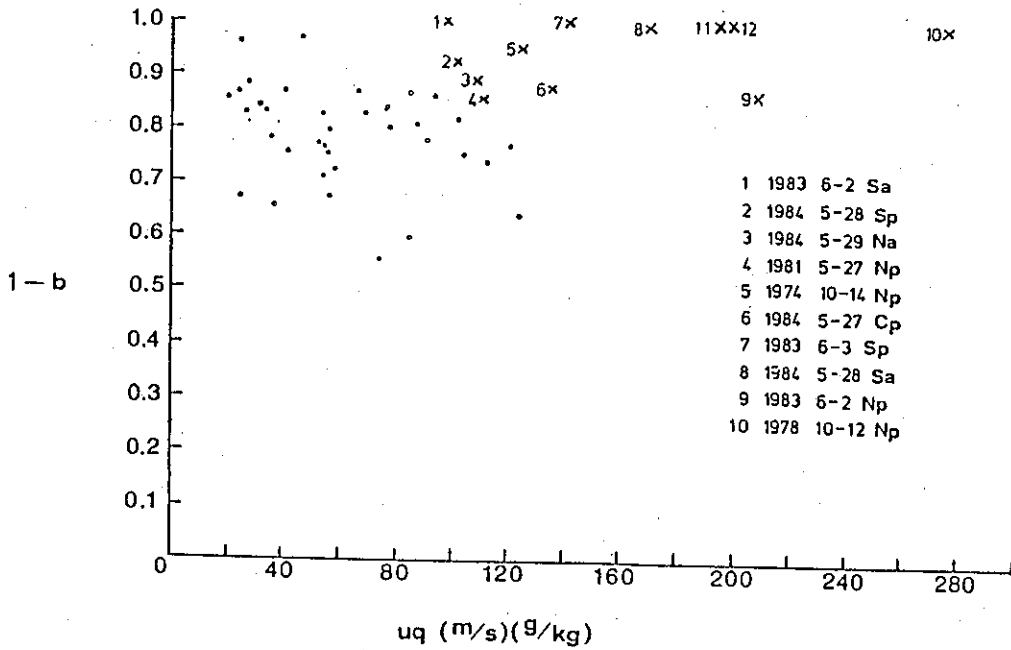


圖7 15 組探空資料中所求得 $1-b$ 及 U_q 大小分布圖，圖中打 \times 表大雨或豪雨發生。

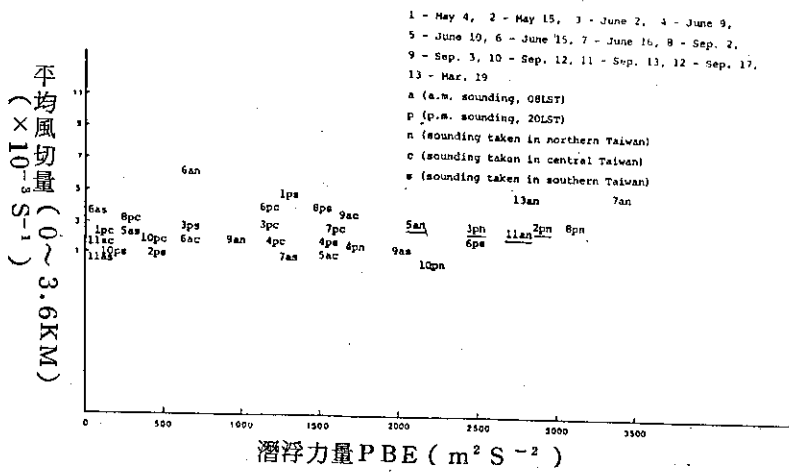


圖8 1984 年 13 組探空資料中所求得 PBE 及低層風切量大小分布圖。

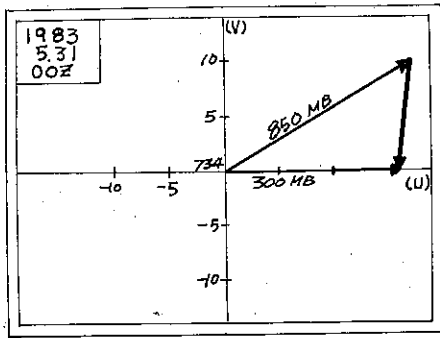


圖 10 b 1983.5.31.00 Z 馬公探空的風場資料，粗線表 850mb 及 300 mb 風切方向

表 1：八組強烈降水個案資料

日期	時間	雨量
1974, 10, 15	3 - 11 LST	基隆 29.2
	1 - 11 LST	台北 83
	1 - 13 LST	宜蘭 110.7
1978, 10, 13	1 - 24 LST	基隆 153.4
	1 - 24 LST	台北 117.4
	1 - 24 LST	宜蘭 388.9
1983, 6, 2 6, 3 6, 4	11 - 14 LST	嘉義 48.6
	4 - 12 LST	台南 65.5
	7 - 12 LST	高雄 73.5
	12 - 24 LST	新竹 62.6
	13 - 24 LST	基隆 64.3
	14 - 24 LST	鞍部 74.7
	11 - 24 LST	竹子湖 64.1
	3 - 9 LST	恒春 191.8
	1 - 4 LST	嘉義 23.3
	1 - 8 LST	阿里山 97
1981, 5, 28	3 - 19 LST	新竹 283.4
	8 - 15 LST	梧棲 151.6
1984, 5, 28	5 - 13 LST	台中 59.8
	6 - 8 LST	梧棲 38.6
	5 LST	澎湖 28.6
	6 - 12 LST	日月潭 141.2
	6 - 21 LST	阿里山 178.1
	5 - 10 LST	台南 53.1
	5 - 12 LST	高雄 107.5
	12 - 19 LST	恒春 91
1984, 5, 29	5 - 9 LST	鞍部 54.2
	5 - 8 LST	竹子湖 44.2
	5 - 8 LST	淡水 43.2
	9 - 17 LST	阿里山 106.9
	7 - 15 LST	台南 161.3
	5 - 6 LST	高雄 39

表 2 1984 年四組強烈降水個案資料

時間	降水的時間	降水量					
1984, 5, 16	07-08 LST	鞍部 44.1	竹子湖 28	淡水 47	台北 10.5		
1984, 6, 2-3	20-08 LST	基隆 106.7	鞍部 219.7	竹子湖 151.1	淡水 135.7	台北 248.0	
1984, 6, 10	14-16 LST	鞍部 20	竹子湖 38.2	淡水 12.2	台北 57.5		
1984, 9, 13	13-24 LST	彭佳嶼 46.5	基隆 125.5	鞍部 185.2	竹子湖 169.0	台北 178.5	

國內研究梅雨鋒豪雨之綜合簡介

戚 啟 勳

私立淡江大學

一、前 言

豪雨雖然難得發生，以其常能導致嚴重之災害，影響國計民生，故為天氣預報主要課題之一。

造成豪雨之基本因素不外乎：(1)要有旺盛之上升氣流；(2)水汽源之供應，不慮匱乏。然而要滿足這兩個因素的環境條件非常複雜，不僅受各種尺度環流系統及其相互作用所控制，而且還因季節與地域而有顯著之差異。倘以天氣系統來區分豪雨的類型，大致可以歸納為：(1)颱風豪雨；(2)梅雨鋒豪雨；(3)局地對流性熱雷雨的豪雨。

颱風豪雨兩直接與颱風預報有關，在國內已有多位專家悉心研究，其間尤以王時鼎教授等付出之心力最多，此處不予介紹。局地性熱雷雨因為範圍很小，時間短暫，且受當地地形及地面性質的影響太大，主要在雷雨預報的範圍內。以台灣地區來說，梅雨期的豪雨最易成災也最難預報，故為國內學者主要研究對象之一，截至目前已有不少具體成果

曲克恭教授曾綜合討論豪雨預報之作業程序及警報發佈，內中對綜觀尺度梅雨鋒導致豪雨之分析推介二篇論文，中尺度之分析推介十五篇論文。實際上這些論文也很難用尺度來截然劃分，所以下面綜合介紹其精要。

發生豪雨先要具備有利之綜觀系統，至於何時及何地會有豪雨，則由綜觀尺度孕育（或誘導）之中小尺度系統來決定，旺盛的對流和有利的地形更為重要。各地區之環境條件既不相同，可見主要還在於個案分析，而後累積個案加以統計和分類，作為預報指示，可見研究梅雨鋒上的豪雨預報可以歸納為三種方法：(1)天氣學分析法；(2)氣候統計法；(3)數值模擬法；(曲，1984)。

二、天氣學方法

用天氣學方法研究豪雨預報大多為個案分析。

近世除傳統之綜觀分析外，重心落在「中尺度複合對流系」(MCC)和「低層噴射氣流」(LLJ)上。

(一)1981(民國70)年27-28日台灣、桃園、新竹地區豪雨成災除了一般豪雨構成因素外，還兼具MCC和LLJ的特點，故而成為密集研究的對象。各該研究所得之結論如下：

- 1 該次豪雨範圍小而時間短，純屬局地性，由 meso- α 尺度之低壓所促成，最初鋒前 100 - 200 公里有分散之小塊對流雲，隨後擴大並集中在低壓東部，自此降下大雨。雷雨胞前方之下衝氣流與後方鋒系之相互作用實為系統發展之主要因素，此種小型低氣之垂直軸心向東傾斜，前方較冷而後方較暖。中、高層有明顯之高溫區，低層則擺動顯著；南方暖濕氣流與北方冷乾氣流之輻合實為豪雨之主要原因(丘等1982)。
- 2 該次豪雨，最大降水並不在低壓中心，而偏向鄰近之中尺度高壓。根據溫度及垂直速度之分析，獲知豪雨主要因為冷鋒加速南下，鋒前有極不穩定之暖濕氣流，且有中尺度系統參與其間，亦即台灣西部有一小脊，兩邊都有一個中尺度系統，下雨最大在脊線北部。台灣北部為正溫度場，有利於氣流輻合上升，上升區落在氣壓場之後 $\frac{\pi}{2}$ 處，亦即輻散場與氣壓場有 $\frac{1}{4}$ 波長之相位差(張等1978)。陳景森等(1984)分析1984年4月5日台灣中北部豪雨，也發現中尺度高壓及其前緣之陣雨鋒，與對流雲雨之發展有密切之關聯。
- 3 5、28之豪雨，山區雨量反而不及平地，似可推想環流因素重於地形因素，地面鋒正好移入氣流輻合區(海浪不同摩擦效應所引起)，並產生波型擺動(曲，1984)。2-3

個MCC都是對流雲系和鋒面雲系相互作用之後果，雨量多少則與各該雲系之生命階段有關。降雨中心之移行亦與雲系之移行相配合（紀、陳，1982）。

(二)其他個案分析，所得之結果如下：

1. 1981年3月17-19日發生在台灣中南部之豪雨，發現西南氣流內有明顯之速度輻合。（曲，1984）。
2. 1982年6月26日至7月5日之連續雷陣雨，與下列諸因素有關；(1)南海擾動與西南氣流提供水汽；(2)風切線；(3)西藏高原東側之低壓槽向東移出；(4)冷舌自白令海向西南一直延伸到台灣；(5)台灣附近海水溫度偏高。（俞等，1982）
3. 1977年6月6日台南至高雄之大雷雨，用氣流線圖配合雷達回波，發現在梅雨期內，台灣東南方有一中尺度氣旋，中部有一中尺度反氣旋，南部沿海為一中性流場，內中伸張軸附近氣流輻合區的雷雨胞與500mb槽前上升氣流疊置，造成該次大雷雨（王，1978）。
4. 1985年5月30-31日台灣北部海面惡劣，天氣用GMS-1紅外線雲圖、溫度及垂直速度分析等輔助傳統分析資料，發現5月31日北、中部持續大雷雨之鋒前MCC係由(1)下層鋒面輻合及暖平流，(2)強烈西南LLJ，(3)對流層中部濡濕暖平流，上部為速度輻散及分流，(4)700mb有上升氣流，500mb為正渦度（楊、郭，1984）。
5. LLJ為促成MCC豪雨主要因素之一，此種西南低層噴流使擾動容易發展，如果雲南雲系移到它上面，只要地形有利，即可產生大雷雨，從雲貴兩區一帶形成，不到24小時即可影響台灣。（徐等，1984）。
6. 若干個例研究顯示：梅雨期內的極鋒經常有LLJ，軸心在鋒面南方的850-700mb，最大頻率從彭佳嶼經台灣西海岸、澎湖南方，延伸到東沙群島，呈西北至東南走向。（陳

，1979）。

(三)用天氣學方法分析豪雨，除了採用傳統的綜觀天氣分析資料，以及雷達回波和衛星雲圖其餘對預報有幫助的圖計有：高空風時間剖面圖、垂直風切時間剖面圖、相當位溫時間剖面圖、相當位溫垂直剖面圖（林，1982）。10日平均海水溫度及其距平分佈圖、波浪分析圖、700mb垂直速度圖、500mb溫度分析圖、850mb溫度分佈及風切線圖（俞等，1982）、GMS-1觀測得之雲頂密度值分佈（紀、陳，1984）、地面流線與雷達回波綜合圖（王，1978）等。

(四)天氣學方法獲得之綜合後果，對豪雨預報很有參考價值，茲摘要介紹如下：

1. 關於綜觀尺度和中尺度系統的相互作用，根據統計所得的結果，500mb面上的短波配合地面鋒經過大多能觸發豪雨。大範圍之對流雨勢必受較大尺度外力之影響，見於對流層之不同高度，動力抬升可能為主要原因，最大輻合和輻散多在最大無雨發生之前。（曲，1984）
2. MCC常伴有東移之對流層中部微弱短波槽，由於輻合區內下層暖平流而觸發雷雨，潛熱之釋出，使對流層中部成為暖心，上部則為冷心，成熟之MCC近似熱帶對流系統，低層輻合而高層輻散，由於質量向上輸送而有大规模之降雨。（曲，1984）
3. 個例分析證知彼此產生之雨之原因並不一致包括括：(1)meso- α 低壓，(2)對流層中部(500mb)有上升氣流，200mb為強輻散，(3)對流層中部有乾燥氣團侵入，(4)對流作用使豪雨範圍日間擴展，夜晚則集中在中心附近，(5)鋒面區內溫度梯度很小，但水份梯度很大，(6)低層有濕舌侵入，中層有乾舌侵入，(7)下層暖溫平流使下層之相當位溫不斷增大（大雨前2~3小時），爆發對流性不穩定，（曲，1984）
4. 分析1931-83年發生在華南至台灣的11個MCC，發現華南MCC的平均壽命為14.8小

時，比美國的MCC要少2小時，移速平均為17kt要比美國慢。(丘，1984)

5. 影響台灣地區之LLJ大致可以歸納為三類：

(1) 南移西風—發生在冷鋒前之暖區內，隨冷空氣南下，大多從東南沿海移向台灣，屬SW噴流，導致台灣西北、西、南部近風面發生豪雨。

(2) 北移西風—一部份為中南半島和南海北部西南季風增強北上所致。有與北方梅雨鋒相伴，亦有與南海北部TD之活動有關。

(3) 東風—有兩種情況：①夏季850—700mb面上太平洋副高呈帶狀，南側有偏東風LLJ，中心風速30—40kt，颱風在其南側，從巴士海峽或呂宋島向西，豪雨在強風軸的南側，即台灣之東北部。②秋末冬初尚有颱風自巴士海峽或呂宋島向西，或自東部近海北上，且有冷鋒南下，與颱風外圍氣流相會於台灣東北部，也可有東風LLJ，因而使台灣北部及東部發生豪雨。(劉，1984)

6. 有利之地形因素對造成梅雨鋒豪雨具有下面三種功能：(1)上層不穩定雲層內降水，對下層均勻降水具有「種雲」之功能，(2)地形之抬升釋出潛在性不穩定，(3)由於地形阻擋及差異平流(受摩擦不等)而產生不穩定(曲，1984)。

三、氣候統計法

用氣候統計法研究豪雨預報，首先要對豪雨下一定義並設定界限，或作進一步之劃分，而後再從過去累積資料中尋求預報之南針，由於局地性突發豪雨難得發生，故在氣候統計中大多勻消其極端性，而只能預測較大面積之平均最大降水，茲將國內學者有關這一方面之研究成果介紹如下：

(一) 豪雨之定義目前各專家所用尚不一致。

1. 以日雨量及時雨量為準，中央氣象局規定：日時雨量超過15mm，日雨量超過50mm而可能導致災患者，稱為「大雨」。時雨量超

過15mm，日雨量超過130mm專稱「豪雨」。

2. 吳宗堯、陳泰然在「台灣地區春至初夏之局部性豪雨研究」中分析3—6月實際降雨強度及稱作災害記錄，定出以3小時雨量大於20mm或6小時雨量大於30mm作為豪雨標準(只有約1.6%災害不包括)；並建議以日雨量超過100mm作為豪雨較合理。

(二) 雨量之氣候分析

1. 時雨量—大小頻率分配近似包桑型，平均時雨量為2.7—4.6mm，但標準差自南向北增大，散度則自北向南增加，出現時雨量16mm之機率多0.5—4.1%，自東北向西南遞進。

2. 日雨量—頻率分配亦近包桑型，平均日雨量除阿里山為25mm外，其餘均在10—20mm之間，標準差也是自南向北增大，日雨量大於100mm之機率僅0.2—4.8%，亦自東北向西南遞增，但最大中心移向山區。

(三) 台灣梅雨鋒之中尺度結構(陳、紀，1978)

1. 分析1972—77年5月15日—6月15日(梅雨期)影響台灣29個鋒的中幅度結構及其降水，顯示梅雨鋒在台灣北部時，產生豪雨之最大機率在鋒前100km至鋒後200km，台灣南部則大多在鋒前200—300公里。

2. 梅雨鋒對南部大氣具有減小其潛在不穩定度之功能，但對北部大氣則有增溫及加濕作用，而並不改變其原有不穩定度，LLJ可能為促成對流之原因而非後果。

3. 散度場及溫度場之結構連同降水分佈，顯示鋒面在北部有兩個對稱(對鋒面言)之熱力性直接環流；抵達南部時則有兩個大小不等之熱力性間接環流，對流作用對這些次生環流的上升支具有增強作用，對下降者則有抑制作用，此種間接環流可能被對流作用帶動而形成。

(四) 台灣梅雨季之中尺度降水及中尺度低壓(陳、紀，1980)

1 作者以 0.5 經緯度網格分析 1972-77 年台灣梅雨期內地面中尺度低壓出現之機率，及其與 6 小時平均雨量，6 小時最大可降水量，以及不同降水強度相對機率之相關，獲得中尺度低壓在不同地區發生時之降水特徵，由此推論地形效應，大尺度環流及中尺度低壓在預估雨量時所占之地位。

2 中尺度降水分佈之特徵主要由地形效應及原先在雲帶內的對流雲簇來決定。

3 台灣北部之降水，唯有中尺度低壓發生在新竹沿海時才有影響，低壓發生在其他地區，只能修正地形及大尺度環流所決定之降水分佈及強度。

(五) 豪雨之綜觀天氣型態 (吳、陳，1983)

1 按各地降水特徵將台灣劃分為北、中、南、東及東南五區。

2 導致豪雨之綜觀天氣形勢，隨豪雨發生地區而異；而且受不止一種系統影響，所以非常複雜，43 個案中有關綜觀系統包括：西南氣流、鋒面、低壓及颱風四類，豪雨發生地區則歸納為(1)全省性，(2)北、中、南區，(3)北、中區，(4)北區，(5)中、南區，(6)中、南、東、東南區，(7)東、東南區。

(六) 氣候統計法所提供之圖表，對豪雨預報均具有參考價值，其中較重要包括：導致台灣全省豪雨之各層範式天氣圖、1960-81 年 3-6 月時雨量大於(含等於) 16mm 之降水機率分佈圖、同期日雨量大於(含等於) 100mm 之降水機率分佈圖(吳、陳 1983)、1972-77 年 5 月 15 日 - 6 月 18 日中尺度低壓出現在斜線方塊時各地 6 小時平均合計雨量分佈圖、同期大雨(6 小時大於或等於 10.1mm) 機率分佈圖(陳、紀，1980)、1968-77 年 5 月 15 日-6 月 15 日(梅雨期) 12Z 距台北、新竹、台南、高雄各間距出現 LLJ(850mb) 日數及翌日有降水日數、同期距北部及南部各間距出現 LLJ 與該區降水強度之頻率分佈(陳，1979)。

四、數值模擬法

此法國內學者尚無論文發表。

五、資料依據

(一) 綜觀尺度梅雨系統之分析

① 劉昭民(1984)：低層噴射氣流與台灣地區豪雨之關係，氣象預報與分析，99 期，43~51，另見天氣分析與預報研討會論文彙編(1984)，85~93。

② 陳泰然，紀水上(1978)：梅雨期台灣地區中範圍天氣分析與預報，大氣科學 5 卷 1 期，35~47(鋒面距台灣遠近與大雨發生之統計)。

③ 陳正改(1979)：梅雨鋒面所伴隨之低層噴射氣流和台灣地區豪雨之關係，大氣科學 6 卷 1 期，29~37。

④ 吳宗堯、陳泰然(1983)：台灣地區春末至夏初之局部性豪雨研究，中央氣象局研究報告 077 號(綜觀尺度分析)。

⑤ 紀水上，陳泰然(1980)：台灣梅雨期華南及鄰近地區之鋒面頻率分布及其移動速度分析，第二屆全國大氣科學研討會論文彙編，67~77。

⑥ 陳正改(1980)：台灣北部地區梅雨期之環流型與降水特性，第二屆全國大氣科學研討會論文彙編，78~86。

(二) 中尺度梅雨系統之分析

① 王崇岳(1978)：梅雨期台灣地區中範圍天氣分析與預報，大氣科學 5 卷 1 期，15~25(詳圖分析)。

② 陳泰然，紀水上(1980)：台灣梅雨季中幅度降水與中幅度低壓研究，大氣科學 7 期，39~48(詳圖分析)。

③ 廖學鎰(1978)：近年來國外梅雨研究之評介，台灣地區災變天氣研討會論文彙編，108~149。

④ 林銓(1982)：梅雨鋒面通過中正國

際機場之個案研究，第三屆全國大氣科學
研討會論文集編，258～265。

- ⑤ 俞川心、徐天佑、呂國財(1982)：春
末夏初台灣特殊天氣個案探討，同上，
279～287。
- ⑥ 丘台光、廖學鎰、洪理強(1982)：民
國70年5月28日之豪雨個案研究，中範
圍天氣系統研討會論文集編，233～
247。
- ⑦ 張儀峯、林沛鍊、徐天佑、劉廣英(1982
)：局部暴雨特性之分析研究，同上，
317～328。
- ⑧ 曲克恭(1984)：豪雨診斷分析之評介
，天氣分析與預報研討會論文集編，1～
17。
- ⑨ 紀水上、陳泰然(1984)：1981年5
月27～28日華南及台灣地區中尺度對流
複合系統之初步分析，95～115。
- ⑩ 丘台光、廖學鎰(1984)：華南及鄰近
地區中尺度對流系統之研究同上，397～
411。
童茂祥(1984)：民航局氣象中心雷雨
預報方法之評估，航空氣象與飛安研討會
論文集編，21～26(熱力指數可做參
考)。
- ⑪ 丘台光(1984)：華南地區中尺度對流
複合系統對飛航之影響，同上，27～36。
- ⑫ 徐天佑、易成安、呂芬川(1984)：台
灣北部冬末春初低層強風與劇烈天氣之關
係，同上，37～44。
- ⑬ 楊正治、郭忠暉(1984)：中尺度對流
系統與飛行天氣之個案研究，同上，345
～352。
- ⑭ 陳景森、丘台光、林沛鍊(1984)：中
尺度高壓與地面天氣的變化，同上，409
～420(可做詳圖分析之參考)。
- ⑮ 陳泰然、紀水上(1978)：梅雨鋒上之
中幅度結構，大氣科學5卷1期。



最佳內插法及其他客觀分析法的比較研究(一)

曾忠一

中央研究院

1. 前言

從事東亞地區的數值天氣預報與分析時，最感到困擾的是西太平洋海域、東南亞地區以及孟加拉灣等地，測站稀少、資料缺乏，用一般的客觀分析法無法得到可靠的分析場。這個問題尤其在本局數值預報即將進入作業化的時候顯得更為嚴重，在最短期間內非完全解決不可。要解決這個問題，必須採用下面四個方法：

(一)在測站稀少地區先由熟練的分析員進行天氣分析的工作，然後再將分析結果輸入電腦，以便得到較佳的客觀分析場。這就是在資料缺乏地區加上假資料的方法。這個方法必須借助分析員的熟練分析技術，並須充分運用衛星雲圖。這個方法本局及民航局正在進行試驗中。

(二)利用衛星風改進資料缺乏地區的分析場。在兩張連續時間的地球同步衛星雲圖上，追蹤一面移動一面變形的雲塊，以便決定高空風向和風速的方法，在有些國家已納入例行的作業中(曾氏，1984)。這種衛星風的資訊對資料缺乏地區的分析顯得相當珍貴，本局應該一面設法接收衛星風的電碼，一面對衛星風的求取進行研究。現在國內有蘇氏(1984)曾做過這方面的研究。

(三)利用由衛星資料求取的氣溫垂直分布來改進資料缺乏地區的分析場。關於這方面的研究，本局已獲得初步結果。今後應該繼續改進，以便納入例行的分析與預報工作中。

(四)改進現有的客觀分析法。Gandin(1963, 1964)提出的最佳內插法，根據他自己以及其他許多人多年來的研究，的確有獨特的優點。本局的數值天氣預報計畫中，初期的客觀分析法採用逐次訂正法，以後全球分析將改用最佳內插法(Mon-

terey Atmospheric Sciences Laboratory, 1984)。現在國內有王氏(1985)曾做過最佳內插法的研究。

最佳內插法主要是Gandin在1960年代發展出來的方法。在這個方法中，首先利用大量的統計資料求得氣象場的統計結構，例如測站間以及測站和網格點間的自相關函數，然後求出最佳權重，再將測站上的天氣資料內插到網格點上。最佳內插法最主要的特點是選擇最佳權重，使均方內插誤差在統計的意義上說是極小的。現在國外兩個最著名的數值天氣預報機構如歐洲的ECMWF(European Centre for Medium-Range Weather Forecasts)和北美的NMC(National Meteorological Center)都採用最佳內插法以便進行客觀分析。

2. 氣象場的統計結構

2.1 相關函數和協方差函數

在最佳內插法中，我們需用到氣象場的統計結構。所謂氣象場的統計結構就是在統計意義上說氣象場所必須遵循的定律。換句話說，就是大量的氣象資料所顯示出來的規律性。對氣象場統計結構所做的任何結論，都取決於如何求取平均值，也就是對哪些個案求取平均。顯然的，我們所選取的個案之間，一定有多多少少的不同，否則就不需求取平均值了。這個要求通常會滿足的，因為在自然界中沒有完全相同的個案存在。在另一方面，個案之間必定有某些共通性，這樣所得到的統計結構才不會太普遍而又模糊，或是限制太大，以致於不能實際應用。例如在研究風的統計結構時，最好不要把對流層下部和平流層上部的資料相提並論，因為這兩種情形下的風場統計結構有相當大的不同。

另外，樣品數量的多寡也有很大的影響。理論上而言，必須有無限多個樣品才能得到有意義的結論，可是只要有足夠多的樣品就能得到合理的結果。再多的樣品可能對結果沒有什麼影響。

描述氣象統計結構的最重要的統計量是協方差函數和相關函數。令 f 為二維空間上某一點的氣象變數值，而 \bar{f} 為 f 的平均值，這個平均值是統計意義上的平均，稱為氣候值。 f 和 \bar{f} 之間的差值稱為偏差 f' ，即

$$f' = f - \bar{f}$$

根據定義，偏差的平均值等於零，

$$\overline{f'} = 0$$

現在定義 k 處的 f 變數和 m 處的 g 變數之間的交協方差函數 $C_{km}(f, g)$ 為

$$C_{km}(f, g) = \overline{f'_k g'_m} \quad (1)$$

k 和 m 表示空間上的兩點。當 $f = g$ 時，則

$$C_{km} = \overline{f'_k f'_m} \quad (2)$$

這個函數就是 k 處和 m 處的 f 變數的自協方差函數。另外，當 $k = m$ 時， C_{kk} 就是 f 函數在 k 點的方差 $k^2(f)$ ，即

$$\sigma_k^2(f) = C_{kk} = \overline{(f'_k)^2} \quad (3)$$

交相關函數 $\rho_{km}(f, g)$ 的定義為

$$\rho_{km}(f, g) = \frac{C_{km}(f, g)}{\sigma_k(f) \sigma_m(g)} \quad (4)$$

而自相關函數 ρ_{km} 的定義為

$$\rho_{km} = \frac{C_{km}}{\sigma_k(f) \sigma_m(f)} \quad (5)$$

根據定義，我們有

$$\rho_{kk} = 1$$

協方差函數和相關函數必須用統計意義去解釋。譬如說 500 mb 氣壓層上台北和迪化的高度相關函數是負的，這表示平均說來台北若為高氣壓則迪

化為低氣壓，台北若為低氣壓則迪化為高氣壓。假如兩個地點的 500 mb 高度相關是正值，那麼平均說來這兩個地點就同時為高氣壓或低氣壓。顯然的，兩個地點距離很近，則自相關函數為正值，而且其值較大；距離變長時，其值逐漸變小，甚至變為負值。不過交相關函數並沒有這個特性。

接著我們要討論協方差函數和相關函數的均質性和各向同性。設一函數 Q 是兩個地點位置的函數，即

$$Q = Q(x_k, y_k, x_m, y_m)$$

其中 x_k, y_k 為 k 點的坐標， x_m, y_m 是 m 點的坐標。令

$$x_m = x_k + r \cos \theta$$

$$y_m = y_k + r \sin \theta$$

此處 r 是 k 和 m 點間距， θ 為 k, m 兩點連線和 x 軸間的夾角。因此， Q 是 x_k, y_k, r, θ 的函數，即（圖 1）

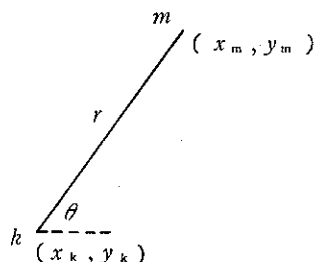


圖 1 二維空間上任意兩點 k, m 的相對位置

$$Q = Q(x_k, y_k, r, \theta) \quad (6)$$

當我們固定 x_k, y_k 和 r ，而令 θ 變動時，若(6)式中的 Q 值不變，則在 k 點上 Q 是各向同性的，因為此時在這點上 Q 和 θ 無關。當我們固定 r 和 θ ，而令 x_k 和 y_k 變動時，若 Q 值不變則 Q 稱為均質的，因為此時 Q 只和 k, m 的相對位置有關。當這兩種特性都滿足時，那麼 Q 不因 k, m 線段的位移和轉動而不同，它只取決於這線段的長度 r ，此時 Q 稱為均質且各向同性的。也就是說，當 Q 是均質且各

向同性時，

$$Q = Q(r)$$

許多關於氣象場的大尺度結構的研究顯示，在數百公里的範圍內，自協方差函數在水平方向或在等壓面上的確可假設為均質且各向同性的。可是均勻性和各向同性成立的數百公里的距離，對客觀分析而言，尤其在測站稀少地區，還是不夠長的。此外，若這個假設成立，則方差 C_{kk} 也必須是均質的。可是事實上並不如此，它是隨地點變動的。因為在熱帶地區除了颱風外天氣擾動相當少，而在溫帶地區溫帶氣旋相當活躍，故等壓面上的高度場的方差通常從低緯度到高緯度以規則方式增加。因此，對自協方差函數所做的均質性和各向同性假設並不合理。

爲了避免這種複雜性，最好假設自相關函數是均質且各向同性的。因爲

$$\rho_{kk} = 1$$

故 ρ_{kk} 一定是均質的。此外這個假設可適用於 2000 到 3000 km 的範圍內。這一點可由圖 2 獲得證實。這張圖是德國 Hannover 城和周圍測站間各定壓層高度的等相關線。也就是說，我們計算 ρ_{km} ，其中 k 爲 Hannover，而令 m 變動，表示附

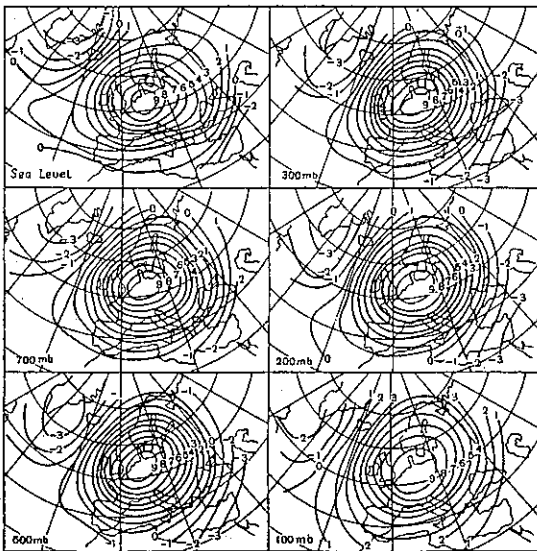


圖 2 德國 Hannover 城和周圍測站間各氣壓層高度及海平面氣壓的相關函數，單位爲 0.1 (Betroni and Lund, 1963)。

近各測站。我們可以發現，直到 2000 km 的距離，等相關線相當接近於圓形。當距離 r 接近於地球半徑時，均質性和各向同性的假設就不成立了。使用自相關函數而不用自協方差函數有另一個優點。大部分的氣象場，不但它的方差在空間上不是均質的，而且它本身在一年中變動很大。因此不同季節的自協方差函數是不同的。可是自相關函數在許多情形下在一年中都可視為相同的。

由於風資料的準確性較低，變動性較大，而且風是向量，研究風的自相關函數相當困難。圖 3 表示北美密蘇里 Columbia 城和周圍測站間高度及風速分量 (h, u, v) 的相關。由圖中可知， $u-u$ 和 $v-v$ 的自相關是不能假設為各向同性的。風場的自相關函數還有兩個特性值得一提：

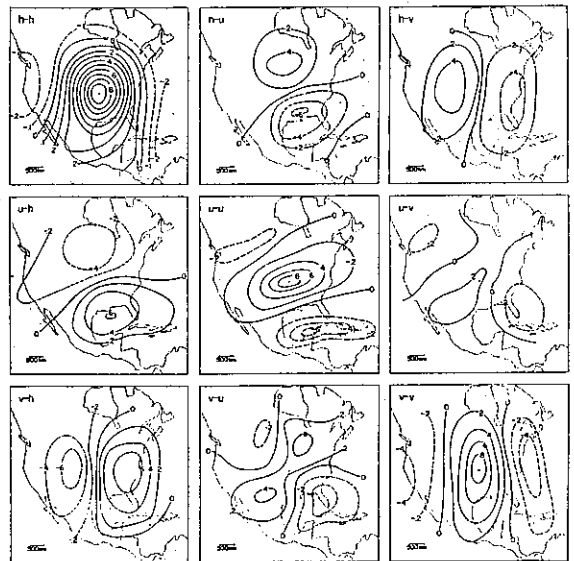


圖 3 Buell (1959) 使用北美地區五年的探空資料所得到的以 Columbia 城爲中心的等相關線， h 是高度， u 和 v 分別爲東西和南北風速分量。

(一)風場的自相關函數並不是各向同性的，而是沿風速分量的方向伸長。換句話說， u 的等相關線會在東西方向伸長，而在南北方向受到壓縮。這表示 u 的相關在東西方向較大。

(二) $u - u$ 等相關線的相關半徑在東西方向和高度場的相關半徑大致一樣，但在南北方向只有高度場的一半。所謂相關半徑就是從中心到零相關線間的距離。

由圖 3 可知，交相關函數，即 $h - u$, $h - v$, $u - h$, $u - v$, $v - h$, $v - u$ 等相關都不能假設為各向同性的。

圖 4 是使用台灣附近七年冬季資料所得到的以台北為中心的 500mb 高度等相關線。圖 4 和圖 3 具有類似的型態。

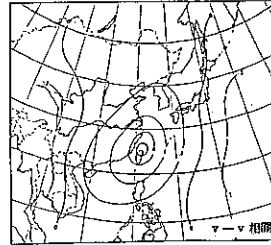
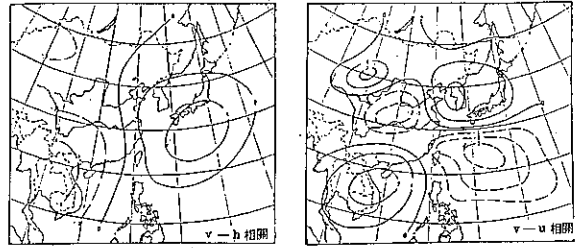
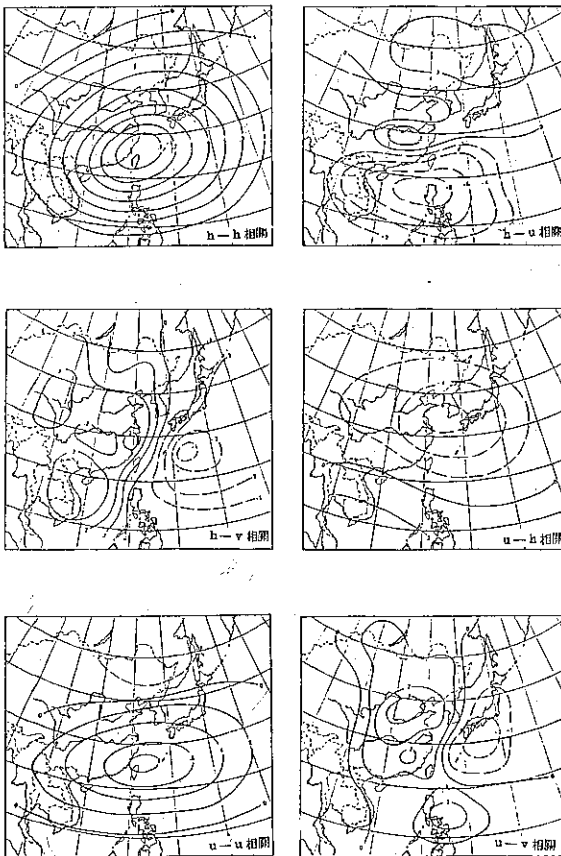


圖 4 使用台灣附近七年冬季資料所得到的以台北為中心的 500mb 高度的等相關線 (王氏, 1985)。



2.2 相關函數和協方差函數的性質

在第 2.1 節中我們已定義了自相關函數 ρ_{km} 。將許多自相關函數排列起來，可寫為矩陣形式：

$$\rho = \{ \rho_{km} \} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

這個矩陣稱為自相關矩陣，其中 N 表示空間點的總數。在自相關矩陣中，對角元素是 1，非對角元素就是兩地點間某氣象變數的自相關。自協方差矩陣可用類似的方法定義，但其對角元素表示各測站上某氣象變數的方差，而非對角元素就是兩測站間某氣象變數的協方差。

自相關矩陣和自協方差矩陣有下面幾個重要性質：

(一)自相關矩陣和自協方差矩陣是對稱的，即

$$\rho_{km} = \rho_{mk}, \quad C_{km} = C_{mk}$$

這個性質可由它們的定義(5)式和(2)式得到。

(二)自相關矩陣和自協方差矩陣是正定的。也就是說，對元素不全為零的 $N \times 1$ 單行矩陣 β 而言，二次形 $\beta^* \rho \beta$ 和 $\beta^* \mathbf{C} \beta$ 都大於零，即

$$\beta^* \rho \beta > 0, \beta^* \mathbf{C} \beta > 0$$

其中星號表示轉置。這個性質可用下面的方法證明。設 F 為各個地點氣象變數 f_1, f_2, \dots, f_N 的線性組合，即

$$F = \sum_{k=1}^N \beta_k f_k$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ 為單行矩陣 β 的元素。 F 的方差為

$$\begin{aligned} \text{Var}(F) &= \overline{(F')^2} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \beta_k C_{kl} \beta_l \\ &= \beta^* \mathbf{C} \beta \end{aligned}$$

因為方差一定大於零，故

$$\beta^* \mathbf{C} \beta > 0 \quad (7)$$

我們也可以用類似的方法證明自相關矩陣是正定的。

(三)自相關函數的絕對值一定小於或等於1。這個性質可由(7)式得到。令 β 的元素中除了 β_k 和 β_m 外，其他都等於零，由(7)式我們有

$$\beta_k^2 C_{kk} + 2\beta_k \beta_m C_{km} + \beta_m^2 C_{mm} > 0$$

不論 β_k 和 β_m 選取任何數(只要不同時為零)，若要上式成立，則必須

$$C_{kk} C_{mm} > C_{km}^2$$

即

$$|\rho_{km}| < 1$$

只有在 $k=m$ 時， ρ_{km} 才等於1。

(四)對稱矩陣 ρ 和 \mathbf{C} 的固有值一定為實數，同時我們可以找到 N 個互相正交的固有向量 \mathbf{u} ，其元素都是實數。又因為 ρ 和 \mathbf{C} 是正定的，故其固有值一定是正數。協方差矩陣 \mathbf{C} 的固有向量 \mathbf{u} 稱為經驗正交函數，在氣象場的統計分析中相當有用(馬氏，1985 a；馬氏，1985 b)。

(五)當自相關函數 ρ_{km} 是均質且各向同性時，即

$$\rho_{km} = \rho(r)$$

則其波譜 $S(\kappa)$ 是正的，即

$$S(\kappa) = \int_0^\infty \rho(r) J_0(\kappa r) r dr > 0$$

其中 J_0 表示第一類零階Bessel函數， κ 為波數。

上面說過，自相關矩陣和協方差矩陣是對稱正定方陣。我們計算出來的這兩種矩陣自然會滿足這條件。可是我們若隨便寫出一個矩陣，當然不一定是正定矩陣。另外，假如我們對計算出來的自相關或協方差矩陣加以處理，例如修勻或用光滑曲線來配合，得到的矩陣就不一定是正定的。

2.3 隨機誤差的影響

天氣資料中的隨機誤差會在統計結構的特性中導致系統差的產生。氣象變數的觀測值 \tilde{f} 可視為真值 f_k 和觀測誤差 ϵ_k 之和：

$$\tilde{f}_k = f_k + \epsilon_k$$

觀測誤差是無法確知的，只知道它們的統計性質。通常我們假設觀測誤差是隨機的，也就是假設它具有下面三個性質：

(一)觀測誤差的平均值等於零，即

$$\overline{\epsilon_k} = 0$$

(二)不同地點的觀測誤差是不相關的，即

$$\overline{\epsilon_k \epsilon_m} = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \sigma_k^2 & m = k \end{cases}$$

其中 σ_k^2 為測站 k 上觀測誤差的方差。

(三)觀測誤差和真值是不相關的，即

$$\overline{f_k' \epsilon_m} = 0$$

根據第一個假設，真值的平均等於觀測值的平均，即

$$\overline{f_k} = \overline{\tilde{f}_k}$$

故

$$\tilde{f}_k' = f_k' + \epsilon_k$$

因此觀測值的協方差矩陣為

$$\tilde{C}_{km} = \overline{f_k' f_m'} + \overline{f_k' \varepsilon_m + \varepsilon_k f_m'} + \overline{\varepsilon_k \varepsilon_m}$$

然後再利用第二和第三個假設，我們有

$$\tilde{C}_{km} = C_{km} + \sigma_k^2 \delta_{km} \quad (8)$$

其中 δ_{km} 是 Kronecker delta, σ_k 為根均方觀測誤差，

$$\sigma_k = (\overline{\varepsilon_k \varepsilon_k})^{1/2}$$

由(8)式可知，觀測值和真值的方差之間有下面的關係：

$$\tilde{C}_{kk} = C_{kk} + \sigma_k^2$$

這個結果可用來間接的估計天氣資料中隨機誤差的方差(圖5)。對某個特定測站 k 而言，可以求出 $\tilde{C}_{km}, m=1, 2, \dots, N$ ，其中 N 是我們所考慮的測站總數。假設 \tilde{C}_{km} 是各向同性的，我們就可以在 $r - \tilde{C}_{km}$ 圖上點出 $\tilde{C}_{km}(r)$ 的位置，然後用一條

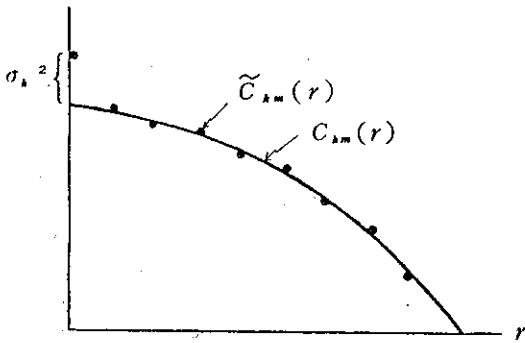


圖5 觀測誤差 σ_k^2 的推定。

光滑曲線配合 $C_{km}(r)$ ，這條光滑曲線就是 $C_{km}(r)$ 。

將 $C_{km}(r)$ 外延到 $r=0$ 的地方，就可以得到 $C_{kk}(0)$ ，於是測站 k 上觀測誤差的方差就是

$$\sigma_k^2 = \tilde{C}_{kk} - C_{kk}$$

我們已經說過，協方差矩陣一定是正定的。

$\tilde{C}_{km}(r)$ 毫無問題是正定的，因為這是由實際資料求得的。可是若隨使用一條光滑曲線來配合 \tilde{C}_{km} ， C_{km} 就不一定是正定的了。能滿足正定條件的最簡單的協方差函數是常態分布曲線，即令

$$C(r) = ae^{-br^2}$$

兩邊取對數，則

$$\ln C = \ln a - br^2$$

其中 a 和 b 可用最小平方法求得。當然在上述步驟中，我們只假設在某一點 k 處的 C_{kk} 是各向同性的，並沒有假設它是均質的，因為觀測誤差的方差以及觀測值的方差是隨測站而有所不同。

2.4 協方差函數和相關函數的推定

我們若要決定大尺度氣象場的協方差函數和相關函數，就要處理大量的天氣資料。選用天氣資料時，必須注意資料的均質性、獨立性、以及代表性。下列幾點可供參考：

(一)為了資料的均質性，必須選用一個季節或一個月中的資料。

(二)因為相鄰時間的天氣資料相關很大，所以必須選用相隔兩三天的資料才行。

(三)為了得到具有代表性的結果，至少使用 60 個天氣狀況的資料，每個狀況至少使用 60 個測站。

協方差函數和相關函數需要用大量的統計資料來推定。自相關函數都假設為均質而且各向同性的，並且是足夠的光滑。其推定步驟如下：

(一)選擇任意兩個測站 k 和 m ，計算其協方差

$$\tilde{C}_{km} = \overline{\tilde{f}_k' \tilde{f}_m'}$$

然後計算自相關

$$\tilde{\rho}(r) = \frac{\tilde{C}_{km}}{(\tilde{C}_{kk} \tilde{C}_{mm})^{1/2}}$$

(二)計算其他任何兩測站間的自相關函數。若使用 N 個測站的資料，那麼就有 $N(N-1)/2$ 個自相關。然後繪出 $\tilde{\rho}(r)$ 的圖形，在圖上共有 $N(N-1)/2$ 個點，如圖 6 所示。

(三)找出一條可以配合所有點的光滑曲線，這條

曲線就是 $\rho(r)$ 。自相關矩陣是正定的，能滿足正定條件最簡單的曲線是常態分布曲線，因此可令

$$\rho(r) = ae^{-br^2}$$

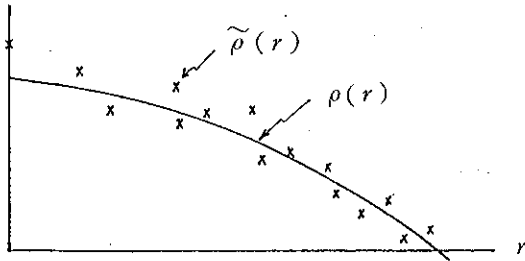


圖 6 從觀測資料決定自相關函數的方法。

將上式取對數，則

$$\ln \rho = \ln a - br^2$$

現在我們有大量的 $(\tilde{\rho}, r)$ 就可用最小平方法決定 a 和 b 的值。圖 7 是使用台灣附近七年冬季資料得到的 500mb 高度場相關曲線隨距離的變化，這條曲線的 a 和 b 值分別為 $a = 0.86074$, $b = 0.29317$ 。

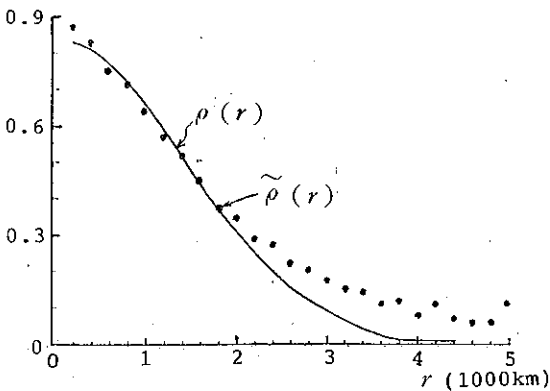


圖 7 台灣附近的相關曲線 (王氏, 1985)

2.5 垂直方向的統計結構

垂直方向的統計結構也可用同樣的方法計算。表 1 列出芬蘭的一個測站 Jokionen 上十年期間各定壓層重力位高度間的協方差矩陣，這是由十年期間冬季的探空資料得到的，平均值用氣候值。

表 2 給出了 850 mb, 700 mb, 500 mb, 300 mb, 200 mb 等氣壓層間高度的相關 (Gandin and Kuznetsova, 1965)。對角線項表示方差，對角線以上各項表示協方差，兩者的單位都是 $10^{-4} m^2$ 。對角線以下各項表示相關。各氣壓層間氣溫的方差、協方差以及相關列在表 3 (Boltenkov, 1966)，方差和協方差的單位為 deg^2 。由表 3 可知，溫度間的相關依賴於對流層頂的位置。若對流層頂位於考慮的兩氣層之間，則其相關是負的。

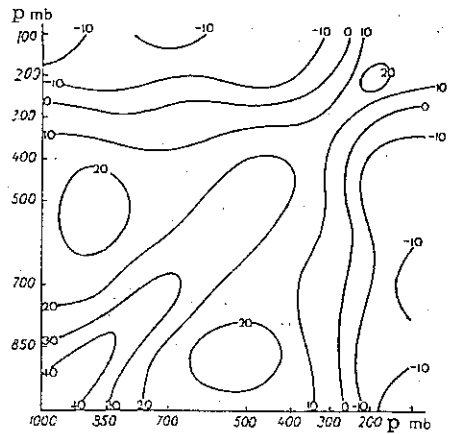


圖 8 冬季各定壓層間氣溫的等協方差線。

圖 8 是根據 Boltenkov (1966) 的資料所得到的冬季氣溫的等協方差線，此圖就是用表 3 的協方差所繪出的圖形。假如協方差是均質的，那麼圖 8 的等協方差線應該平行於兩坐標軸間的等分線。可是由圖中可知，並不是這樣的。垂直方向的協方差和相關函數不是均質的 (因為垂直方向只是一維空間，故無所謂各向同性)。表 4 和表 5 為台北各定壓層間高度和溫度的協方差矩陣。使用的資料是台北 1970 年 12 月到 1971 年 2 月每天兩次的探空資料。

表 4 和表 5 分別為台北各定壓層高度和溫度的協方差矩陣。

表1 芬蘭 Jokionen 測站上各定壓層間重力位高度的協方差，使用十年期間的冬季資料，單位為 10 m^2 。

氣壓層	1000	850	700	500	400	300	250	200	150	100
1000	122.7									
850	116.5	116.8								
700	117.2	123.2	140.0							
500	125.4	140.2	172.2	233.1						
400	132.8	153.1	191.7	268.8	317.6					
300	138.1	150.9	207.6	298.4	353.7	403.4				
250	134.3	158.4	204.6	295.2	351.0	402.2	406.8			
200	120.8	142.7	186.3	269.7	320.3	369.6	375.1	356.8		
150	105.0	122.7	162.8	235.0	276.0	323.2	329.7	326.7	322.4	
100	92.3	110.3	145.1	211.1	251.6	293.3	306.8	315.9	332.0	379.0

表2 定壓層高度間的相關。對角線元素表示方差，對角線以上的元素表示協方差，單位都是 10 m^2 。對角線以下的元素表示相關 (Gandin and Kuznetsova, 1965)。

氣壓層 (mb)	850	700	500	300	200
850	99	102	124	144	131
700	0.93	124	146	182	162
500	0.84	0.92	207	258	240
300	0.76	0.87	0.95	360	300
200	0.72	0.81	0.92	0.95	333

表3 定壓層高度間的相關。對角線元素表示方差，對角線以上的元素表示協方差，單位都是 deg^2 。對角線以下的元表示相關 (Boltenkov, 1966)。

氣壓層 (mb)	1000	850	700	500	300	200	100
1000	49.0	31.7	14.3	15.7	8.5	- 10.0	- 4.2
850	0.67	45.5	18.0	22.1	7.0	- 16.6	- 13.0
700	0.36	0.47	32.1	12.9	5.7	- 9.5	- 7.0
500	0.47	0.68	0.48	23.0	8.9	- 14.7	- 12.5
300	0.34	0.29	0.28	0.53	17.7	- 0.4	- 7.0
200	- 0.27	- 0.45	- 0.31	- 0.56	- 0.02	30.4	12.1
100	- 0.14	- 0.45	- 0.29	- 0.61	- 0.46	0.51	18.4

表4 台北各定壓層間高度的協方差矩陣。1到10分別代表1000,850,700,500,400,300,250,200,150,100mb等氣壓層。使用資料為台北1970年12月和1971年1月2月,每天兩次的探空資料。單位為 m^2 。

氣壓層	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	851.6									
2	414.4	318.7								
3	40.4	213.2	422.6							
4	-128.8	227.4	564.4	1356.4						
5	-96.1	270.8	616.2	1666.9	2405.1					
6	10.1	322.3	636.4	1634.4	2515.4	2999.9				
7	76.3	362.8	667.0	1608.7	2474.4	3118.7	3397.2			
8	134.4	401.1	705.7	1566.5	2411.1	3226.3	3664.1	4174.3		
9	202.8	444.4	727.3	1517.9	2321.3	3294.4	3907.5	4668.2	5626.1	
10	170.1	478.3	837.4	1516.7	2188.2	3276.9	4055.8	5068.1	6366.0	8135.0

表5 同表4,但為溫度,單位為 deg^2 。

氣壓層	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10.5									
2	10.6	14.8								
3	4.8	6.4	5.8							
4	1.3	1.9	0.6	11.9						
5	-0.2	-0.8	-1.2	4.9	8.7					
6	-1.0	-1.6	-0.3	-1.8	1.3	5.9				
7	-0.6	-1.1	-0.1	-1.6	0.7	4.9	5.8			
8	-1.0	-1.3	-0.2	-1.7	0.8	4.5	5.1	6.5		
9	-0.7	-0.9	0.3	-1.7	0.1	3.6	3.9	4.9	6.9	
10	0.9	1.6	1.2	-2.3	-1.6	0.6	1.5	2.7	3.8	10.5

2.6 大尺度氣象場的相關函數

底下我們講述一些大尺度氣象場的相關函數。等壓面上高度的自相關函數以及不同等壓面高度間的交相關函數，直到 2100 ~ 2700 公里的距離都是正的。相關半徑的極小值大約在 400 mb 處，由這一層往上或往下都是增加的。在相關半徑以外，相關函數一直到 4500 公里左右是負的，假如我們可以設為均質而且各向同性的。負值並不大，不會超過 -0.2。

因為相關半徑變化很小，所以所有的相關函數都可用同樣的距離的函數表示：

$$\rho(p_k, p_m, r) = \rho(p_k, p_m, 0) e^{-0.195r^{1.5}} J_0(1.065r)$$

其中 r 是以 10^3 公里為單位的距離， $\rho(p_k, p_m, 0)$ 的值已在表 2 和表 3 中給出。

通常不同定壓層溫度的相關函數，和高度的相關函數具有相同的形態，但在短距離處下降很快。相關半徑隨著高度的增加而增加。交相關函數的特性依賴於對流層頂。若對流層頂位於我們所考慮的兩個層之間，那麼交相關函數在距離很小的地方是負的，在距離較大的地方是正的。這個性質如表 3 所示。在進行最佳內插法時，可用高度的相關函數當做溫度的相關函數，不致引起太大的誤差。

露點溫度的相關函數，至少在一年中的冷季，有點不同於高度和溫度的相關函數。這些函數幾乎沒有負值，因此可以用單調減少的函數，如指數，來描述它們。尤其是在 850 mb 面上，露點的相關函數具有簡單的近似式：

$$\rho(r) = e^{-1.03r}$$

在對流層下部其他各層的相關函數大致是相同的。在地表和 850 mb 處露點的方差大致是 33 deg^2 ，在 700 mb 處大致是 42 deg^2 。

圖 9 中繪出四個函數：兩個自相關函數，一為 500 mb 高度，另一為 850 mb 露點溫度；以及兩個交相關函數，一為 1000 mb - 500 mb 厚度和地表溫度的相關，另一為 500 mb 和 200 mb 兩層

溫度的相關。由圖中可知，自相關可能有也可能沒

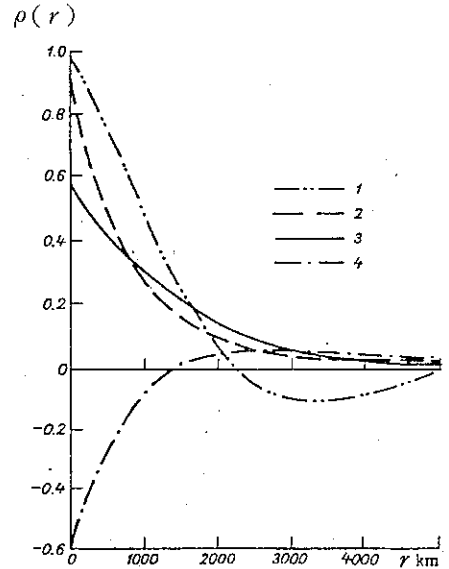


圖 9 四種相關函數對距離的函數關係。曲線 1 是 500 mb 高度的自相關函數。曲線 2 是 850 露點溫度的自相關函數。曲線 3 是 1000 - 500 mb 厚度和地表溫度的交相關函數，曲線 4 是 500 mb 和 200 mb 兩層溫度的交相關函數 (Boltenkov, 1966)。

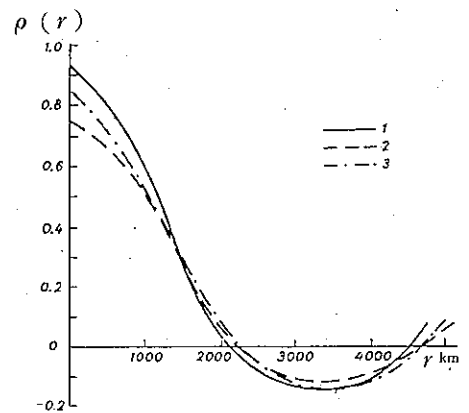


圖 10 三種高度的相關。曲線 1 為 300 mb 高度的自相關函數，曲線 2 和 3 分別為 500 mb - 200 mb 和 500 mb - 300 的交相關函數 (Gandin and Kuznetsova, 1965)。

有負值的區域，而且交相關函數也不一定通過零點。

圖 10 繪出三種高度場的相關函數，一為 300 mb 高度場的自相關函數，一為 500 mb 和 200 mb 層高度間的交相關函數，另一為 500 mb 和 300 mb 層高度的交相關函數。

必須注意，在分析大尺度場時，通常把兩定壓層的气象變數當做兩個不同的變數看待，因此我們把 500 mb 和 200 mb 高度間的相關叫做交相關。上面提到的幾個交相關函數都設為均質且各向同性的，這個假設只有在特別的情形下才成立。

3. 最佳內插法

3.1 基本原理及特性

最佳內插法是 Gandin (1963) 為氣象資料分析而發展出來的統計客觀分析法。根據 Gandin 的說法，某一地點的气象變數值並不是未知的，我們至少知道其氣候值，持續值或數值預報值。在本局客觀分析和數值預報完全進入作業化以前，利用持續值或數值預報值來進行最佳內插法的客觀分析是不切實際的，因此在這裡只用氣候值來說明。在一般的客觀分析法中，一網格點的气象變數偏差值 \hat{f}_o' 都是用附近測站上偏差值 $f_{k'}$ 來內插，即

$$\frac{\hat{f}_o'}{C_{oo}^{1/2}} = \sum_{k=1}^M \alpha_k \frac{f_{k'}}{C_{kk}^{1/2}} \quad (9)$$

其中下標零代表網格點，而下標 k (以及 m) 代表測站， C_{oo} 和 C_{kk} 分別為網格點 o 和測站 k 處的气象變數的方差。 M 是該網格點周圍測站的個數。必須特別指出的是，只要用到周圍七八個測站的資料就夠了。又 α_k 稱為內插權重。

設 f_o' 為該網格點真正的偏差值，那麼相對內插誤差就是

$$E = \frac{(\hat{f}_o' - f_o')^2}{C_{oo}} \quad (10)$$

將(9)代入(10)式我們得到

$$E = \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M \rho_{km} \alpha_k \alpha_m - 2 \sum_{k=1}^M \rho_{ko} \alpha_k + 1 \quad (11)$$

最佳內插法最主要的特徵是選擇一個最佳權重 α_k ，使得相對內插誤差為極小。將(11)式對 α_k 微分，並令其結果為零，我們得到下面的式子：

$$\sum_{k=1}^M \rho_{km} \alpha_k = \rho_{mo} \quad m=1, 2, \dots, M \quad (12)$$

其中 ρ_{mo} 為測站 m 和網格點 o 間的自相關函數。(12) 式是一個線性方程組，因為 M 大致等於 8，故相當容易求出最佳權重 α_k ， α_k 求出以後代回(9)式就可得到網格點上的偏差 \hat{f}_o' ，這個偏差加上氣候平均值 \bar{f}_o ，就可得到網格點上的客觀分析值了。將(12)式代入(11)式我們得到

$$E = 1 - \sum_{k=1}^M \rho_{ko} \alpha_k \quad (13)$$

因為 $E \geq 0$ ，故可用上式校驗我們求得的 α_k 是否正確。

用上述的方法進行客觀分析，需要先求出 C_{oo} ， C_{kk} ， ρ_{km} ， ρ_{mo} 以及網格點上的氣候平均值 \bar{f}_o ，這些都和大氣的統計結構有關。只要有東亞地區各測站上過去十年廿年的天氣資料， C_{kk} 和 ρ_{km} 是不難求出的，最大的問題在於 C_{oo} ， ρ_{mo} 和氣候平均值 \bar{f}_o ，因為網格點上過去的天氣資料本來就不曉得，而客觀分析的目的就是要求出網格點上的气象變數值。因為氣候值和方差的場大致只隨緯度變化，可由測站上的值用簡易客觀分析法求得。當然在本局數值天氣預報完全進入作業化以後，網格點上的氣候值和方差的場就很容易建立了。至於 ρ_{mo} 就較不易求出，因為我們本來就不知道網格點上的 f ，故無從計算 ρ_{mo} 。假如我們對自相關函數做均質性和各向同性的假設，就可以利用 ρ_{km} 配合一條合理的自相關函數隨距離變化的曲線，以便解決我們的問題。

假如我們計及觀測誤差，則由 2.3 節的結果我們有

$$\tilde{C}_{km} = C_{km} + \epsilon_k \epsilon_m, \quad \tilde{C}_{ko} = C_{ko}$$

上式兩邊除以 $(C_{kk} C_{mm})^{1/2}$ ，則

$$\tilde{\rho}_{km} = \rho_{km} + d_{km}, \quad \tilde{\rho}_{ko} = \rho_{ko}$$

其中

$$d_{km} = \frac{\varepsilon_k \varepsilon_m}{(C_{kk} C_{mm})^{1/2}}$$

此時(2)式變為

$$\sum_{k=1}^M (\rho_{km} + d_{km}) \alpha_k = \rho_m \quad (14)$$

$$m = 1, 2, \dots, M$$

相對內插誤差仍為(3)式。假如觀測誤差之間並不相關，令 σ_k 為觀測誤差的方差，那麼

$$d_{km} = \eta_k \eta_m \delta_{km}$$

其中

$$\eta_k = \sigma_k C_{kk}^{-1/2} \quad (15)$$

是相對觀測誤差。將(15)式代入(14)式我們有

$$\sum_{k=1}^M (\rho_{km} + \eta_k^2 \delta_{km}) \alpha_k = \rho_m$$

一般說來，觀測精度在不同的測站都是相同的，因此 ε_k^2 和 k 無關。從這裡還不能說所有的 η_k 都是相同的，因為在不同的測站方差 C_{kk} 是不同的。可是，對大部分氣象變數而言，觀測誤差和它們的變動性比起來相當小，因此 η_k 和 ρ_{kk} 比起來很小。於是我們可以假設 η_k 和 k 無關，即

$$\eta_k = \eta$$

這樣並不會造成太大的誤差。事實上在客觀分析中，我們都做這個假設。對等壓面的高度而言，通常取 $\eta = 0.02$ ，這相當於觀測誤差為高度變動的14%。在對流層內，隨著高度的增加，其變動性和觀測誤差也同時增加，所以 η 可視為常數。

引進 η 除了可以允許觀測誤差存在之外，也有其他的作用。可以證明，隨著 η 的增加，不同測站上資料權重 α_k 會較光滑。換句話說，權重的平方和 $\sum_{k=1}^M \alpha_k^2$ 減小了。這表示 η 愈大，則資料中的不準確性愈不會影響相關函數。這種情形在測站密集區域顯得特別重要。在測站密集區域中，自相關矩陣的非對角項 ρ_{km} ($k \neq m$) 很接近於對角項

$\rho_{kk} = 1$ ，因此聯立方程(2)式是不適定的。換句話說，自相關矩陣的行列式其值很小。(2)式右邊變動一點，求出來的權重就會變動很大了。引進 η 可以減少這種危險性，因為對角線項的值增加了。

必須注意，在 $\eta = 0$ 的假設下計算出來的權重，其中有些可能是負的，這也許是由於測站和網格點間奇特的配置而產生的。我們不應該懷疑這種可能性。負權重的出現也經常是由於資料不準確的緣故。在資料中允許隨機的觀測誤差存在可以減少這種不準確性的影響，因此會使負權重的個數和絕對值減小。

由(3)式可知，因為自相關函數是正定的，所以

$$0 \leq E \leq 1$$

顯然的，當 $E = 1$ 時， $\alpha_k = 0$ ，即 $\hat{f}_k' = 0$ 。換句話說，網格點上的氣象變數值 f 。就是它的氣候值 \bar{f}_k ，於是內插誤差就是 C_{kk} 。由此可見，最佳內插法比氣候內插更準確，所謂氣候內插就是使用氣候平均值當作網格點上的氣象變數值。在一些特別的情形下，內插誤差的平方可能比方差還大，因為(3)式只說均方內插誤差比方差小而已。可是由於(3)式的限制，最佳內插法比其他氣象變數的客觀分析法對測站的減少比較不敏感。

假如兩個測站距離很近，它們的資料間相關很大，因此這兩個測站資料的權重應該較小，而另外

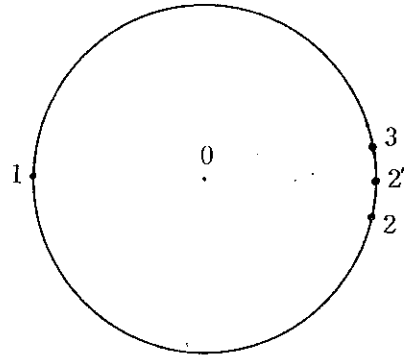


圖 11 測站資料的權重在 1 處較大

一個和網格點等距離的測站上，其資料的權重應該較大。這點在一些客觀分析法中必須加以特別處理。我們可以證明出，最佳內插法已計及這個事實。

考慮圖 11 所示的情形。因為測站 1, 2, 3 和網格點 0 的距離都相等，故

$$\rho_{10} = \rho_{20} = \rho_{30}$$

雖然很明顯的，測站 1 應有較大的權重，可是在逐訂正法中這些測站資料的權重都相等了。至於最佳內插法，因為

$$\rho_{12} = \rho_{13}$$

$$\alpha_2 = \alpha_3$$

故(12)式變為

$$\alpha_1 + 2\rho_{12}\alpha_2 = \rho_{10}$$

$$\rho_{12}\alpha_1 + (1 + \rho_{23})\alpha_2 = \rho_{10}$$

由上二式解出 α_1 , α_2 得到

$$\alpha_1 = \frac{\rho_{10}(1 + \rho_{23} - 2\rho_{12})}{1 + \rho_{23} - 2\rho_{12}^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\rho_{10}(1 - \rho_{12})}{1 + \rho_{23} - 2\rho_{12}^2} = \alpha_3$$

在這情形下，

$$\rho_{12} < \rho_{23} < 1$$

故

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\rho_{10}(\rho_{23} - \rho_{12})}{1 + \rho_{23} - 2\rho_{12}^2} > 0$$

換句話說 α_1 要比 α_2 或 α_3 大。當 2 和 3 點趨近於 2' 時， ρ_{23} 趨近於 1，因此

$$\alpha_1 = \frac{\rho_{10}}{1 + \rho_{12}'}$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2} \frac{\rho_{10}}{1 + \rho_{12}'} = \frac{1}{2} \alpha_1$$

根據上面所說的性質，只要用網格點周圍大致平均分布的五六個測站就夠了，即 $M=5$ 或 6 。在測站稀疏地區可用 $M=7$ 或 8 ，但不必更多。Gandin (1963) 指出，多用一個測站的資料，即 M 增

加 1，則(13)式的 E 會減小。可是當我們使用 6 到 8 個測站時，這種減小就很慢了。因此對一個網格點而言，並不需使用很多的測站資料 (圖 12)。圖 13 顯示相對內插誤差和使用測站個數的關係。很

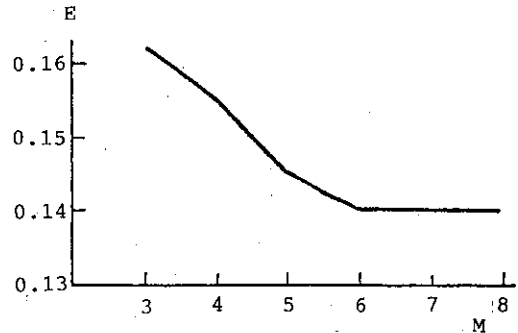


圖 12 相對均方內插誤差 E 和使用的測站個數間的關係。

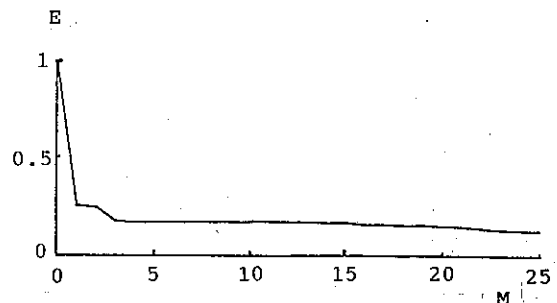


圖 13 相對內插誤差隨使用測站個數的關係。這張圖是使用台灣附近七年冬季 500 mb 高度得到的 (王氏, 1985)。

明顯可以看出，相對內插誤差隨使用測站的個數 M 降低很快，但 M 大於 7 或 8 以後，對精度並沒有什麼改進。因此，只要用網格點周圍七八個測站資料來內插就夠了。也就是說，我們只要解出七八個聯立方程以便求得最佳權重 α_i 。

圖 14 (a) 和 (b) 分別為使用 8 個和 20 個測站所具有的相對內插誤差。由圖中可知相對內插誤差較小的區域在考察範圍的中央，而較大的區域在西太平洋區。比較這兩張圖我們發現，使用 20 個測站

得到的精度並不比使用8個好了多少。

通常並不需要先把權重 α_k 全部求出來備用。這是因為有時測站資料會漏失，另外所有網格點所需用的 α_k 很多，全部存起來會浪費計算機記憶。因此，我們通常在進行內插時才求出某一網格點的 α_k 。

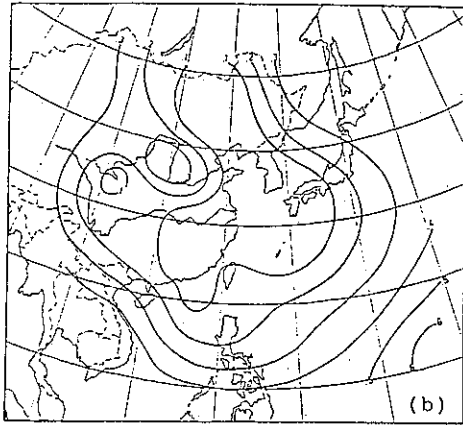
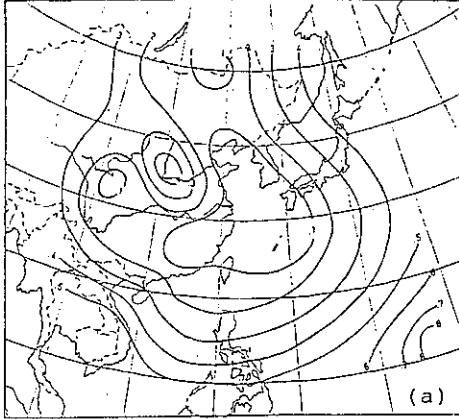


圖 14 使用 8 個(a)和 20 個(b)測站資料所產生的相對內插誤差。

3.2 隨機觀測誤差對權重的影響

3.1 節中我們提到，隨著相對觀測誤差 η^2 的增加，不同測站上的權重 α_k 會較光滑，關於這一點本節將加以證明。考慮如下求取權重 α_k 的方程

$$\sum_{k=1}^M (\rho_{km} + \eta^2 \delta_{km}) \alpha_k = \rho_m \quad (16)$$

$$m = 1, 2, \dots, M$$

(16)式可用矩陣形式表示：

$$(\rho + \eta^2 \mathbf{I}) \alpha = \rho_0 \quad (17)$$

其中 \mathbf{I} 為 $M \times M$ 單位矩陣， ρ_0 為 $M \times 1$ 單行矩陣

$$\rho_0 = [\rho_{10} \rho_{20} \dots \rho_{M0}]^*$$

α 為 $M \times 1$ 單行矩陣，

$$\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_M]^*$$

而 ρ 為 $M \times M$ 相關矩陣。為了比較起見，我們用 $\bar{\alpha}$ 代表(17)式在 $\eta^2 = 0$ 時的解，即

$$\rho \bar{\alpha} = \rho_0 \quad (18)$$

設 ρ 的 M 個固有值為 λ_k ， $k = 1, 2, \dots, M$ ，對應的標準化正交固有向量為 \mathbf{u}_k ， $k = 1, 2, \dots, M$ ，即

$$\rho \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \quad (19)$$

將 α 和 $\bar{\alpha}$ 按固有向量族 \mathbf{u}_k 展開，展開係數各為 c_k 和 \bar{c}_k ，即

$$\alpha = \sum_{k=1}^M c_k \mathbf{u}_k \quad (20)$$

$$\bar{\alpha} = \sum_{k=1}^M \bar{c}_k \mathbf{u}_k \quad (21)$$

利用(19)式，我們分別得到

$$(\rho + \eta^2 \mathbf{I}) \alpha = \sum_{k=1}^M c_k (\lambda_k + \eta^2) \mathbf{u}_k \quad (22)$$

$$\rho \bar{\alpha} = \sum_{k=1}^M \bar{c}_k \lambda_k \mathbf{u}_k \quad (23)$$

因為(22)和(23)式都等於 ρ_0 ，故有

$$\sum_{k=1}^M [c_k (\lambda_k + \eta^2) - \bar{c}_k \lambda_k] \mathbf{u}_k = 0$$

上式兩邊前乘以 \mathbf{u}_m^* ，因為這些固有向量都是正交的，所以我們有

$$c_m (\lambda_m + \eta^2) - \bar{c}_m \lambda_m = 0$$

即

$$c_m = \frac{\bar{c}_m}{1 + \eta^2 / \lambda_m}, m=1, 2, \dots, M \quad (24)$$

對具體問題來說，因為 ρ 是正定對稱方陣，其固有值全為正數。為方便起見，設

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M > 0$$

則因有向量 \mathbf{u}_k 將隨 k 的增加而節點增多，對應於較大 k 的 \mathbf{u}_k 就是急遽的振動著的。如果一向量沿它的投影就會做正負相間的急遽變化，也就是非常不光滑。由(24)式可知，因為 $\eta^2 / \lambda_m > 0$ ，故

$$c_m < \bar{c}_m$$

但是當 λ_m 較大時，量 η^2 / λ_m 很小，故 c_m 和 \bar{c}_m 相差很小；而當 λ_m 很小時， c_m 就遠小於 \bar{c}_m ，而且 c_m 接近於零。由(20)和(21)式可知，當 k 較大時， \mathbf{u}_k 較不光滑，可是在這情形下， c_k 的值比 \bar{c}_k 小，所以 α 確比 $\bar{\alpha}$ 光滑。 η^2 愈大，則 α 愈光滑（曾氏，1983）。

接著我們要計算這兩組權重的平方和。利用(20)式和(24)式，有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \alpha_k^2 &= \alpha^* \alpha = \sum_{k=1}^M c_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^M \frac{c_k^2}{(1 + \eta^2 / \lambda_m)^2} \end{aligned}$$

此外由(21)式我們得到

$$\sum_{k=1}^M \bar{\alpha}_k^2 = \bar{\alpha}^* \bar{\alpha} = \sum_{k=1}^M \bar{c}_k^2$$

因為 $\eta^2 / \lambda_m > 0$ ，故

$$\sum_{k=1}^M \alpha_k^2 < \sum_{k=1}^M \bar{\alpha}_k^2$$

換句話說，隨著 η^2 的增加，各測站權重的平方和會減小，也就是權重變得更光滑了。

4. 其他客觀分析法

其他客觀分析法，如逐次訂正法，在過去十多年來，我國已有許多人做過這方面的研究。現在本局使用的逐次訂正法屬於 Barnes 的程式，一部分

已納入例行的天氣分析作業。關於逐次訂正法的測試，現仍在繼續進行中，民航局氣象中心也準備將逐次訂正法納入天氣分析作業。由於逐次訂正法已為人所熟知，本局並已實際應用，故不在這裡再敘述。

5. 結語

最佳內插法最主要的特點在於選用的權重是最佳的。現在歐洲的 ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) 和北美的 NMC (National Meteorological Center) 採用最佳內插法分析氣象場，這兩個機構是世界上數值預報作業方面最著名的地方。本局的數值預報作業以後也可能採用最佳內插法進行客觀分析。我國在這方面的研究尚在起步階段（王氏，1985）。今後必須加強最佳內插法及台灣附近氣象場統計結構的研究，以便了解這兩方面的特性。

本計畫研究春季台灣附近的大氣統計結構，並用於最佳內插法客觀分析，並與其他客觀分析法的結果互相比較。本計畫執行半年來（自73年11月至74年5月），已經了解最佳內插法的理論部分，測試完成所有的電腦程式，並已收集十年來春季的500mb高度資料。另外準備再收集三個氣壓層的高度資料，以便能求出春季的大氣統計結構，並對最佳內插法做大規模的試驗。上面所說的電腦程式，包括 Cressman 客觀分析程式，Barnes 客觀分析程式，經驗正交展開分析程式、相關函數和協方差函數計算程式，最佳內插法程式、求解聯立方程組的程式以及其他需要用到的程式。只要資料收集完全，就可進行計算工作。

最佳內插法—氣象場的統計結構(二)

曾忠一 林淑卿

中央研究院

1. 前言

所謂客觀分析就是以數值方法，將分佈不規則測站上的氣象觀測資料內插到規則分佈的網格點上。本文僅提出最佳內插客觀分析法之研究從事東亞地區的數值天氣預報與客觀分析時，最感困擾的是西太平洋海域，東南亞地區以及孟加拉灣等地，測站稀少，資料缺乏，用一般的客觀分析方法無法得到可靠的分析場，要解決此問題有下列四種方法：

- (一)在資料缺乏地區加上假資料 (Bogus data) 的方法。這方法必須藉助分析員的熟練分析技術。
- (二)利用衛星風場資料改進資料缺乏地區的分析場 (曾氏, 1984)。這種衛星風的資訊對資料缺乏地區的分析顯得相當珍貴。
- (三)利用由衛星資料求取的氣溫垂直分佈來改進資料缺乏地區的分析場。
- (四)改進現有的客觀分析法。Gandin (1963, 1964) 提出最佳內插法從事客觀分析並繼續發展，因為它具有相當多的優點。本局的數值天氣預報大計劃中，全球分析將採用最佳內插法 (Monterey Atmospheric Sciences Library, 1984) 本研究之最佳內插法，目前國內有王氏 (1985) 曾做過最佳內插法的研究，國外有兩個最著名的數值天氣預報機構，歐洲的ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) 和北美的NMC (National Meteorological Center) 都採用最佳內插法進行客觀分析。

2. 最佳內插法之基本理論

最佳內插法 (Optimum interpolation method, 簡稱O. I.)，又稱為統計內插法 (Statistical interpolation method)，基本上和逐次修正法 (Successive correction method) 相似，先在網格點上設定一初始場，然後利用觀測值來修正。所不同的是在逐次修正法 (Cressman, 1959, Inman, 1970, Barnes, 1973) 中的權重函數僅和測站及網格點之間的距離有關，是人為所設定的，而且對每一個網格點而言該函數是保持不變的。但在最佳內插法中，測站對於網格點的權重係數是在某種條件之下利用統計迴歸法 (Statistical regression) 在網格點上的觀測值 (即將某一測站當網格點來處理)，那麼所要求的條件就是在網格點上內插值和觀測值 (真正值) 之間的誤差經多次的平均要達到最小值。

2.1 基本統計概念

在討論最佳內插法的理論之前，我們先討論幾個基本的統計量。假設 f 為二維空間上某一點的氣象變數值，而 \bar{f} 為 f 的平均值，這個平均值是統計意義上的平均，稱為氣候值。 f 和 \bar{f} 之間的差值稱為偏差 f' (deviation) 即

$$f' = f - \bar{f}$$

根據定義，偏差的平均值等於零，

$$\bar{f}' = 0$$

如果只考慮一個氣象變數；這個氣象變數在空間上 (k 處與 m 處) 的變化，可以自協方差 (auto-covariance) 來表示

$$C_{km} = \overline{f'_k f'_m}$$

其中橫線代表空間的平均，當空間上二點相同時，

自協方差變成異方差 (Variance)。

$$\sigma_k^2 = C_{kk} = \overline{(f_k')^2}$$

若涉及兩個氣象變數 (g 與 f) 時，它們在空間上的變化可用交協方差 (Cross - corariance) 來描述

$$C_{km}(f, g) = \overline{f_k' g_m'}$$

前述之自協方差與交協方差均是代表氣象變數在空間上的絕對變化。如將互協方差中的各變化量除以它們本身的標準偏差 (Standand deviation) 便可得到相對變化，亦即相關數 (Correlation)。因此，由自協方差可得到自相關數 (auto - correlation)

$$\rho_{k..m} = \frac{C_{km}}{\sigma_k(f) \sigma_m(f)}$$

由交協方差可得交相關數 (cross - correlation)

$$\rho_{k..m}(f, g) = \frac{C_{k..m}(f, g)}{\sigma_k(f) \sigma_m(g)}$$

由上二式可知當 $k = m$ 時 $\rho_{k..m} = 1$ ，但

$$\rho_{m..m}(f, g) \leq 1$$

因

$$\overline{(f' g')^2} \leq \overline{f'^2} \overline{g'^2}$$

2.2 基本理論：

一氣象變數 (f) 在某一網格點上的值 (f_0) 通常可以該網格點附近測站上的觀測值 (f_k) 的線性組合來估計，即

$$\hat{f}_0 = \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k \quad (2.2.1)$$

其中 N 為所使用之測站數目， f_0 為在網格點上之估計值 (內插值)， α_k 為第 k 個測站對網格點的權重係數。若以 f_0 表示在網格點上的真正值，則 $\hat{f}_0 - f_0$ 表示內插值和真正值之間的差值，在此稱為分析誤差 (analysis error)。前已提過權重係數是在要式平均分析誤差為極小值的條件下所推算出來的，也就是說先決條件是

$$E = \overline{(\hat{f}_0 - f_0)^2} = \text{極小} \quad (2.2.2)$$

將 (2.2.1) 代入 (2.2.2)，再加 E 為極小值之條件，則可得

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \overline{f_k f_m} = \overline{f_k f_0} \quad (2.2.3)$$

由 (2.2.3) 可求得所要的權重係數 α_k ，但問題是我們並不完全知道在網格點上的真正值 f_0 ，為避免此困擾，我們可利用前節所討論之統計量將 (2.2.1) ~ (2.2.3) 重寫。

$$\hat{f}_0' = \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k'$$

$$\hat{f}_0 = \bar{f}_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k (f_k - \bar{f}_k)$$

$$(2.2.4)$$

$$E = \overline{(\hat{f}_0 - f_0)^2} = \overline{(\hat{f}_0' - f_0')^2}$$

$$= \text{極小} \quad (2.2.5)$$

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k C_{km} = C_{k0} \quad (2.2.6)$$

將 (2.2.6) 代入 (2.2.5) 則我們可得到最佳內插法的分析誤差

$$E = C_{00} - \sum_{k=1}^N \alpha_k C_{k0} \quad (2.2.7)$$

就理論而言 (2.2.4)，(2.2.6) 與

(2.2.7) 為最佳內插法的三個基本方程式。大氣統計結構的研究結果顯示，若以協方差函數討論大氣水平向性及均質性等兩特性所涵蓋之範圍也不過是數百公里而已，這就客觀分析的應用而言，並不太有用。而若以自相關數代替自協方差，交相關數來代替交協方差，來探討大氣水平向性與均質性，由 Bertoni 及 Lund (1963) 的研究結果顯示，對相關數而言，這兩特性可以適用到 2000 ~ 3000 公里的範圍。除此之外，以相關數來代替協方差還有一好處，就時間上而言，通常大部份氣象變數的協方差隨季節之不同而有所變化，但相關數却可認為是保持不變的。均向性及均質性在垂直方向並不能適用 (Belousov et al, 1968)。

2.3 最佳內插法的特性

目前討論可知，若要將大氣中均向及均質的特性應用於最佳內插法時，必須以相關函數來代替協方差函數。因此(2.2.4)中的變化量應除以本身的均方根 (root-mean-square)

$$\frac{\hat{f}_o'}{\sqrt{f_o'^2}} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \frac{f_k'}{\sqrt{f_k'^2}} \quad (2.3.1)$$

$$E = \frac{(\hat{f}_o' - f_o')^2}{C_{oo}} \quad (2.3.2)$$

將(2.3.1)代入(2.3.2)

$$E = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \rho_{km} \alpha_k \alpha_m - 2 \sum_{k=1}^N \rho_{ko} \alpha_k + 1 \quad (2.3.3)$$

在要求 E 為極小值，亦即 $\partial E / \partial \alpha_k = 0$ 的條件下我們可得

$$\sum_{m=1}^M \rho_{km} \alpha_m = \rho_{ko} \quad (k=1, 2, 3, \dots, M) \quad (2.3.4)$$

將(2.3.4)代入(2.3.3)，可得最佳內插法的分析誤差

$$E = 1 - \sum_{k=1}^M \alpha_k \rho_{ko} \quad (2.3.5)$$

到此(2.3.1)，(2.3.4)與(2.3.5)可算是實際應用上我們所要使用的方程式，只要能夠知道測站和測站之間及測站和網格點之間氣象變數的相關函數，權重係數 α_k 便可由(2.3.4)得到。再利用(2.3.1)便可將測站上的觀測值內插到網格點上，再加上平均值 \bar{f}_o ，就可得到網格點上的客觀分析值。

在此最佳內插法中所用之平均值並不一定要用氣候平均值，亦可用預報值，或是氣候平均值和預報值的權重平均，或甚至用持續值 (Persistence) 來代替。然而在本局客觀分析和數值預報完全進入作業化以前，利用持續值或數值預報值來進行最佳內插法的客觀分析是不切實際的，因此在這裡，乃用氣候值。

3. 資料來源

目前國內王氏(1985)做了西元1977年至1983年每年冬季三個月(12, 1, 2月)的500 mb、12 GMT 高度場風場資料之統計，本計劃擬做春季(3, 4, 5月)垂直方面分850 mb, 700 mb, 500 mb 與 300 mb, 00 GMT 高度場，風場資料之統計，求取大氣統計之結構性持為了不使資料間相關性太大，個案與個案間相隔五天，Buell (1972)。

在從事最佳內插法客觀分析之前，資料之收集為最主要之工作，由於人力之有限，不可能從天氣圖上——讀取資料，首次試圖由作業系統 (GA, General Automation) 利用磁帶直接由存檔磁帶錄取所需資料，利用作業空檔時間，已錄了1978年~1984年春季(3, 4, 5月)的500 mb, 00 GMT 高度場及風場資料，每隔五天一個個案約100個個案，測站區域有30, 31, 32, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 91, 98等19個測站區域，並且順利地在VAX-750讀取所需資料。

我們所讀取之資料為經本局GA系統解碼過後之氣象資料，然而據柳氏(1985)提出本局之解碼程式可能有誤，原始資料與解過碼之資料不配合。

4. 結語

關於可讀取之資料正確性，據資訊測站同仁所提供意見，認為解碼錯誤是發生在地面資料，而高空資料850 mb, 700 mb, 500 mb, 300 mb 應無誤，此問題需進一步驗證。萬一不幸，解過碼的資料有問題時，不得已必須利用人力從歷年的天氣圖上，讀取所需資料以從事氣象統計工作。關於氣象統計研究的工作相當重要，尤其從民國67年本局從事自動解碼至今，這些存放在磁帶上的資料相當珍貴，必須充分利用它，以達經濟效益。

參考文獻

- 柳再明, 1985: 豪雨個案的客觀分析。國立中央大學大氣物理研究所碩士論文, 100頁。
- 曾忠一, 1984: 氣象場的客觀分析。台大大氣科學系講義, 418頁。
- 王光弘, 1985: 台灣附近氣象場統計結構及其在客觀分析上的應用。中國文化大學地學研究所碩士論文。
- 馬汝安, 1985a: 經驗正交展開的原理和應用。氣象預報與分析第102期, 54-60。
- 馬汝安, 1985b: 利用經驗正交函數分析亞洲區域冬季500 mb 高度場空間分布之研究。台大大氣科學研究所碩士論文, 98頁。
- 曾忠一, 1984: 雲塊追蹤法決定高空風資訊的原理和發展。航空氣象與飛航安全研討會論文彙編, 交通部民航局。
- 蘇良石, 1984: 利用模擬數位化衛星雲圖自動分析雲速。大氣科學第11期, 45-56。
- Barnes, S. L., 1973: Mesoscale objective map analysis using weighted time series observation. NOAA Tech. Memo. ERL NSSL-62, 60pp.
- Betroni, E. A. and I. A. Lund, 1963: Space correlation of height of constant pressure surfaces. J. Appl. Meteor., 2, 539-545.
- Boltemkov, V. P., 1966: Some characteristics of the three-dimensional macrostructure of atmospheric temperature. Trudy Glavnoi Geofizicheskoi Observatorii (GGO), Imeni A. I. Voeikova, Leningrad, No. 191, 47-57.
- Buell, C. E., 1959: An application of turbulence theory to the synoptic scale phenomena of the atmosphere. Report No. KND 96-59-16 (FR), Karman Sciences Corporation, Colorado Springs, Colorado, North America.
- Gandin, L. S., 1963: Objective Analysis of Meteorological Fields, Gidrometeorologicheskoe Izdatelstvo, Leningrad. Translated from Russian, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Israel, 1965, 242PP.
- Gandin, L. S., 1964: On the optimal interpolation of vector fields. Trudy Glavnoi Geofizicheskoi Observatorii (GOO), Imeni A. I. Voeikova, Leningrad, No. 165, 47-69.
- Gandin, L. S. and T. I. Kuznetsova, 1965: On the three dimensional statistical structure of the geopotential field. Trudy Glavnoi Geofizicheskoi Observatorii (GOO), Imeni A. T. Voeikova, Leningrad, No. 168, 84-93.
- Inman, R. L., 1970: Papers on operational objective analysis schemes at NSSF. NOAA Tech. Memo. ERL NSSL-51, 91pp. Monterey Atmospheric Science Laboratory, 1984: Meteorological Design of the Numerical Weather Prediction Forecast Systems, Central Weather Bureau, Republic of China. Monterey Atmospheric Science Laboratory, Monterey, California, North America.

應用日本預測圖從事台灣寒潮預報之成效評估

蔡 清 彥

國立台灣大學大氣科學系

摘 要

本文將日本分析與預測圖製成距平圖，然後分析日本區域模式對寒潮天氣系統之預測能力。從實際地面距平圖的分析，我們發現台灣地區之寒潮與移動性高氣壓系統有密切的關係。從冷鋒通過台灣北部地區前48小時開始，移動性高壓系統從貝加爾湖西方往東南移動，到冷鋒過境當時，此高壓系統已籠罩整個中國大陸，然後台灣北部地區之氣溫才開始下降。我們定義台北日最低氣溫連續下降兩天共達 6°C 以上者為強寒潮個案。強寒潮個案在冷鋒通過台灣北部當時，籠罩整個中國大陸之移動性高壓中心位於 $100^{\circ}-110^{\circ}\text{E}$ ， 40°N 附近，中心氣壓在距平圖上達10mb以上。

在分析台北日最低氣溫持續下降6天的寒潮個案時，我們發現持續性之氣溫下降乃是由於第二波移動性高壓系統在相隔一天半到兩天之間後迅速南下所造成。

分析預測圖所製成之地面距平圖後，我們發現日本區域模式在48小時前能預測移動性高壓南下籠罩中國大陸之現象，但是高壓之位置、強度及範圍則與實際情形有出入，而且預測圖在 $90^{\circ}-105^{\circ}\text{E}$ ， $30^{\circ}-40^{\circ}\text{N}$ 地區會有不合理的低壓系統存在。對於持續性寒潮則能在第一波移動性高壓籠罩中國大陸時預測第二波移動性高壓之再度南下。

1. 前 言

數值天氣預報之系統性誤差可定義為「由於不完善的物理與數學所造成數值模式中會重覆發生的誤差」（參考Wash, 1985）。系統性誤差之研究可分成兩類。一類研究低氣壓、高氣壓、槽脊等特性天氣系統之預報誤差（如Leary, 1971; Colucci and Bosact, 1979; Silberberg and Bosart, 1981等）。另一類分析模式平均資料場與觀測平均資料場之差異。本文採取第一類方式，擬分析日本區域模式對寒潮天氣系統之系統性誤差。

蔡清彥（1984）曾分析台灣寒潮前後數日之地面及850mb亞洲地區天氣圖，並分析700mb, 500mb及300mb北半球天氣圖。他們發現亞洲冬季天氣系

統可分為滯留性與移動性兩類。滯留性系統包括蒙古高氣壓及亞洲東岸槽線。此滯留性系統的存在乃是台灣冬季吹東北季風的主因。但是台灣地區寒潮的發生却是移動性系統所造成。最主要的移動性系統是從裏海東北方往東或東南移入中國大陸，且範圍及強度均逐漸增大的移動性高壓系統。此移動性高壓系統的強度較滯留性系統為弱，故必須分析距平圖才容易辨認。

本文將日本分析與預測圖製成距平圖，然後分析日本數值天氣預報對寒潮移動性高氣壓系統之預測能力。

2. 資 料

我們採用日本氣象廳所發佈之天氣圖由於72小

時以內之預測圖均為區域模式所作之亞洲區域天氣圖，而影響台灣寒潮之移動性高壓系統在 500 mb 均在該圖所發佈亞洲天氣圖範圍之外，故我們只討論地面預測圖之成效。另外利用地面距平圖也較 500 mb 距平圖容易辨認寒潮高壓系統的移動與發展（參考蔡清彥，1984）。

在 1983 年 12 月至 1984 年 2 月以及 1984 年 12 月至 1985 年 2 月兩個冬季中，我們僅能找到四個傳真圖資料比較完整的寒潮個案，其個案時間如表 1 所示。根據任立渝及蔡清彥（1981）的定義，個案 1 台北日最低氣溫兩天下降 3.4°C ，接近但未達中寒潮標準，個案 2 在 2 月 5 日至 7 日之間日最低氣溫下降 7.6°C 為強寒潮，個案 4 在 2 月 25 日至 26 日之間日最低氣溫下降 6.0°C 亦為強寒潮。另外，個案 4 之日最低氣溫持續下降 6 天之久（共 9.1°C ）較一般寒潮氣溫下降 2 天較長甚多。

冷鋒通過台灣北部地區附近之天氣圖時間在個案 1 為 1984 年 1 月 18 日 12 Z，個案 2 為 1984 年 2 月 5 日 12 Z，個案 3 為 1984 年 2 月 17 日 00 Z。個案 4 則為 1984 年 2 月 25 日 12 Z。我們將討論冷鋒過境前 72 小時至當時的天氣圖變化情形，以及冷鋒過境當時天氣圖之預報情形。

3. 個案分析

圖 1 為 1967 年 12 月至 1977 年 2 月共十個冬季之平均地面天氣圖。冬季平均地面天氣圖的特徵是高氣壓籠罩中國大陸及西伯利亞南部，其中心位於蒙古高原（ $90^{\circ}-100^{\circ}\text{E}$ ， $45^{\circ}-52^{\circ}\text{N}$ ）一帶，稱為蒙古高氣壓。此高壓明顯的出現在冬季平均圖中，故稱之為滯留性高氣壓。此滯留性蒙古高氣壓乃造成台灣地區之東北季風。

蔡清彥（1984）曾分析 21 個強寒潮合成天氣圖以及合成圖減去十年平均圖所得之合成距平圖。圖 2a, 2b, 2c 及 2d 即分別為冷鋒通過台灣北部地區前 72 小時，前 48 小時，前 24 小時及當時之地面合成距平圖。由這些距平圖，我們發現移動性高壓系統在台灣寒潮爆發前 72 小時從裏海東北方（ $70^{\circ}-80^{\circ}\text{E}$ ， $50^{\circ}-60^{\circ}\text{N}$ ）一帶先往東再往東南移動，而且在移動

過程中不斷擴大範圍並增加強度。最後在冷鋒通過台灣北部地區當時，此移動性高壓系統已籠罩整個中國大陸，其中心則位於 $100^{\circ}-110^{\circ}\text{E}$ ， $40^{\circ}-50^{\circ}\text{N}$ 地區，其強度達 13mb。

3.1 個案 1

此個案為弱寒潮個案，冷鋒通過台灣北部地區附近之天氣圖時間為 1984 年 1 月 18 日 12 Z，台北日最低氣溫由 18 日開始連續下降兩天，共下降 3.4°C 。圖 3a, 3b, 3c 及 3d 分別為冷鋒通過台灣北部前 72，48，24 及當時之地面距平圖。我們發現寒潮移動高氣壓從 3 月 16 日 12 Z 開始由貝加爾湖西方往東南移動，到 18 日 12 Z 已籠罩大部中國大陸地區了。因此台北日最低氣溫從 19 日開始下降。但此時高壓系統強度仍然不強，位於 $100^{\circ}-110^{\circ}\text{E}$ ， $40^{\circ}-45^{\circ}\text{N}$ 之高壓中心僅達 5mb 左右，故為弱寒潮個案。

圖 4a 是以 1 月 15 日 12 Z 為初始資料時間，日本區域模式所作之 72 小時預測圖；圖 4b 是以 1 月 16 日 12 Z 為初始資料時間所作之 48 小時預測圖；圖 4c 則是以 1 月 17 日 12 Z 為初始時間所作之 24 小時預測圖。此三張圖的預測對象均為 1 月 18 日 12 Z。在 1 月 18 日 12 Z 之實際距平圖（圖 3d）中，移動性高氣壓已籠罩整個中國大陸。但在圖 4a 及 4b 中，移動性高氣壓仍位於貝加爾湖西方，沒有南下。由此可見，日本區域性模式仍無法在 72 小時及 48 小時前對此弱寒潮系統之南下作有效的預測。而在 24 小時預測圖（圖 4c）中，移動性高氣壓則已南下籠罩中國大陸，但強度及範圍則稍嫌太小。

3.2 個案 2

此個案為強寒潮個案，冷鋒通過台灣北部地區附近之天氣圖時間為 1984 年 2 月 5 日 12 Z，台北日最低氣溫由 5 日開始連續下降兩天，共下降 7.6°C 。圖 5a, 5b, 5c 及 5d 分別為冷鋒通過台灣北部前 72，48, 24 小時及當時之地面距平圖。我們亦發現寒潮移動性高氣壓從 2 月 3 日 12 Z 開始由貝加爾湖西方往東南移動，到 5 日 12 Z 已籠罩整個中國大陸地區了，因此台北日最低氣溫從 6 日開始下降。而 5 日 12

Z位於 $100^{\circ}-110^{\circ}\text{E}$ ， 40°N 附近之高氣壓中心已達 13mb ，故為強寒潮個案。

圖6a是以2月2日12Z為初始時間所作之72小時預測圖，圖6b是以2月3日12Z為初始時間所作之48小時預測圖，圖6c則是以2月4日12Z為初始時間所作24小時預測圖。三張圖的預測對象均為2月5日12Z。而在實際2月5日12Z之距平圖(圖5d)中，移動性高氣壓已籠罩整個中國大陸。在圖6a中，主要移動性高氣壓仍位於貝加爾湖西方沒有南下，但已有微弱小型高壓南下跡象。圖6b及6c則有明顯移動性高氣壓籠罩中國大陸，但此高壓之位置，範圍及強度均與圖5d者不一致，而且預測圖中有一不合理的低壓存在於 $90^{\circ}-105^{\circ}\text{E}$ ， $30^{\circ}-40^{\circ}\text{N}$ 地區。由此可知，日本區域模式似能在48小時前預測此寒潮高壓系統之南下籠罩中國大陸，但是預測高壓之位置，範圍及強度均與實際情形頗有出入。

3.3 個案3

此個案亦為強寒潮個案，冷鋒通過台灣北部地區之天氣圖時間為1984年2月17日00Z，台北日最低氣溫由16日開始連續下降兩天，共下降了 6.1°C 。圖7a, 7b, 7c及7d分別為冷鋒通過台灣北部前72, 48, 24小時及當時之地面距平圖。我們發現移動性高氣壓在2月15日00Z仍位於貝加爾湖西方，2月16日00Z稍往東南移動，然後迅速南移，在2月17日00Z已籠罩整個中國大陸地區。而在2月17日00Z位於 $100^{\circ}-110^{\circ}\text{E}$ ， 40°N 之高壓中心已達 13mb 左右，故亦為強寒潮個案。

圖8a是以2月14日00Z為初始時間所作之72小時預測圖，圖8b是以2月15日00Z為初始時間所作之48小時預測圖，圖8c則是以2月16日00Z為初始時間所作之24小時預測圖。三張圖的預測對象均為2月17日00Z，在當時實際地面距平圖(圖7d)上移動性高壓已南下籠罩整個中國大陸。在圖8a中，移動性高壓系統雖已南下達華北、華中地區，但未籠罩整個中國大陸；另外在預測圖上有一不合理的低壓位於 $90^{\circ}-105^{\circ}\text{E}$ ， $30^{\circ}-40^{\circ}\text{N}$ 地區。在圖8b及8c中，除了不合理的低壓仍位於 $90^{\circ}-105^{\circ}\text{E}$ ， $30^{\circ}-$

40°N 地區外，整個中國大陸似乎已在移動性高壓的籠罩下。因此，日本區域模式對此個案之預報成效與對個案2者相近似，模式似能在48小時前預測寒潮高壓系統之南下籠罩中國大陸，但預測高壓之位置，範圍及強度均與實際情形有出入，最嚴重的錯誤是預測圖上存在不合理的低壓系統位於 $90^{\circ}-105^{\circ}\text{E}$ ， $30^{\circ}-40^{\circ}\text{N}$ 地區。

3.4 個案4

此強寒潮個案，冷鋒通過台灣北部地區之天氣圖時間為1984年2月25日12Z台北日最低氣溫由25日之 17.1°C 降至27日之 11.1°C 兩天共下降 6.0°C ，達到強寒潮標準。此外，日最低氣溫由27日之 11.1°C 仍繼續下降至3月2日之 8.0°C 。台北日最低氣溫前後連續下降6天共達 9.1°C ，其連續下降的天數較一般寒潮之兩或三天長甚多。圖9a至9h為2月22日至29日之12Z地面距平圖。由圖9a至9d得知，寒潮移動性高壓系統從2月23日12Z開始由貝加爾湖西方往東南移動，到25日12Z已籠罩中國大陸地區了。故台北日最低氣溫從26日開始下降。而25日12Z位於 $100^{\circ}-110^{\circ}\text{E}$ ， 40°N 附近之高壓中心已達 10mb ，故為強寒潮個案。

另外，在2月26日12Z的地面距平圖(圖9e)發現，籠罩中國大陸之移動性高氣壓系統已減弱，但第二波移動性高氣壓系統又已移到貝加爾湖西方。此第二波移動性高壓系統亦往東南移動，到2月28日12Z又已籠罩了整個中國大陸(圖9f及9g)。由於前後兩個移動性高壓連續侵襲中國大陸，因此台北日最低氣溫持續下降6天之久。

圖10a, 10b及10c分別為2月25日12Z前72小時，前48小時及前24小時所作之預測圖。由圖10a及10b得知，72小時及48小時以前日本區域性模式已能預測此個案移動性高壓系統之南移至中國大陸。但是預測高壓位置、範圍及強度均與實際情形頗有出入。而且在預測圖上有一不合理的低壓存在於 $90^{\circ}-105^{\circ}\text{E}$ ， $30^{\circ}-40^{\circ}\text{N}$ 地區。但在24小時前之預測圖(圖10c)，並沒有此不合理之低壓，而且預測籠罩中國大陸之高壓系統與實際情形者十分接近。

圖 11a 及 11b 分別為以 2 月 26 日 12 Z 為初始時間所作之 24 小時及 48 小時預測圖。圖 11a 及 11b 分別與圖 9f 及 9g 相接近，此即日本區域性模式大致能夠預測第二波寒潮移動性高壓的迅速南下，造成台灣地區之持續性氣溫下降。但是預報圖上移動性高壓之位置、強度及範圍仍與實際情形有出入。而且 48 小時預測圖產生與前述幾個個案類似的無理低壓系統在 $90^{\circ}-100^{\circ}\text{E}$ ， $30^{\circ}-40^{\circ}\text{N}$ 區域。

4. 結論與建議

本文將日本分析與預測圖製成距平圖，然後分析日本區域模式對寒潮天氣系統之預測能力。從實際地面距平圖的分析，我們發現台灣地區之寒潮乃由於移動性高壓從貝加爾湖西方南下籠罩中國大陸所造成。一般造成台灣日最低氣溫連續下降 2 至 3 天，氣溫持續下降 6 天的個案則由於第二波移動性高壓接連南下所造成。

日本區域模式似能在 48 小時前預測移動性高壓南下籠罩中國大陸的現象。對於持續性寒潮，並能在第一波寒潮發生時預測第二波寒潮的即將接踵而至。但預測高壓的位置，強度及範圍均與實際情形有出入，而且預測圖在 $90^{\circ}-105^{\circ}\text{E}$ ， $30^{\circ}-40^{\circ}\text{N}$ 地區會有不合理的低壓存在。Wash (1985) 曾分析美國海軍全球模式 (Navy Operational Global Atmospheric Prediction System, 簡稱 NOGAPS) 對於東亞地區高壓系統之預報誤差，他發現 NOGAPS 所預測高壓之南下速度似乎太慢。而前述日本區域模式對寒潮天氣系統之預測誤差似乎不相同。

由本文討論得知地面距平圖較能表示寒潮天氣系統之移動與發展，因此繪製分析圖之距平圖以及日本預測圖之距平圖將有助於冬季寒潮之預報。Williams (1985) 曾討論背風旋生 (lee cyclogenesis) 之理論問題。他發現地形會造成滯留性之山上高壓及背風低壓，由於疊加 (superposition) 的效果會造成移動性低壓經過山上高壓時不顯著，而經過背風低壓時產生脊風旋生效果。滯留性系統與移動性系統之疊加效應遠較兩者之交互作用重要。由他的研究顯示脊風旋生在距平圖上可以看見移動性低壓系統。此含意與本文結論似有相同

之處。

5. 後 記

本研究是在多人協助之下始能完成，其中日本氣象廳之分析與預測距平圖是由陳進文與李育棋先生共同繪製的，氣候平均圖是由余進義先生利用電腦機計算繪製的，所有本文採用之定稿圖表則由陳重功負責繪製。在研究進行中，我們也曾利用客觀分析繪製 1984 年 12 月至 1985 年 2 月之距平圖，此工作是由王忠山與李尚武先生負責上機的。但由於此期間沒有明顯之寒潮個案，故沒有被本文採用。在研究進行中，謝信良與任立渝先生曾多次參與討論。借此向他們表示至誠的謝意。

6. 參考文獻

- 任立渝、蔡清彥，1981：台灣地區寒潮合成天氣型式之研究，大氣科學，8，67-79。
- 蔡清彥，1984：大尺度擾動與寒潮爆發，大氣科學，11，71-84。
- Colucci, S.J. and L.F. Bosart, 1979：Surface anticyclone behavior in NMC prediction models. Mon. Wea. Rev., 97, 670-682.
- Leary, C., 1971：Systematic errors in operational National Meteorological Center primitive equation surface prognoses. Mon. Wea. Rev., 99, 409-413.
- Silberg, S.R. and L.F. Bosart, 1982：An analysis of systematic Cyclone errors in NMC LFM-II model during the 1978-1979 cool season. Mon. Wea. Rev., 110, 254-271.
- Wash, C., 1985：Synoptic forecasting with numerical weather prediction models. Lecture Notes from NWP short course, April 24-May 4, 1985, sponsored by the Central

Weather Bureau, Republic of China, 98 pp.

Williams, R.T., 1985 : Lee cyclogenesis, Lecture notes from NWP short course, April 24-May 4, 1985, sponsored by the Central Weather Bureau, Republic of China, 100 pp.

表 1 每個個案之台北日最低氣溫 (Tmin) 變化情形

(a)個案 1 (1984 年 1 月 15 日~23 日)

日 期	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Tmin (°C)	15.9	13.2	14.0	15.2	11.9	11.8	10.9	9.9	11.5

(b)個案 2 (1984 年 2 月 2 日至 2 月 8 日)

日 期	2	3	4	5	6	7	8
Tmin (°C)	13.4	11.8	13.0	14.5	7.7	6.9	8.1

(c)個案 3 (1984 年 2 月 13 日至 2 月 19 日)

日 期	13	14	15	16	17	18	19
Tmin (°C)	15.9	15.3	14.2	16.4	11.2	10.3	11.1

(d)個案 4 (1984 年 2 月 22 日至 3 月 3 日)

日 期	22	23	24	25	26	27	28	29	1	2	3
Tmin (°C)	15.1	17.4	16.0	17.1	13.1	11.1	10.3	9.0	8.2	8.0	10.0

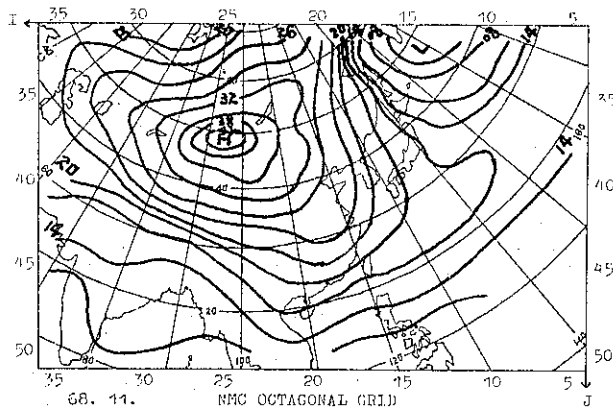
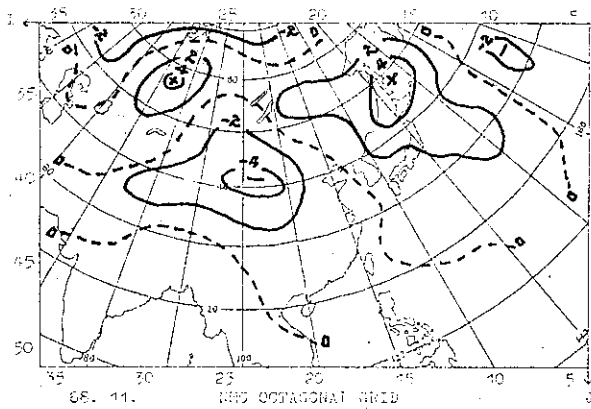
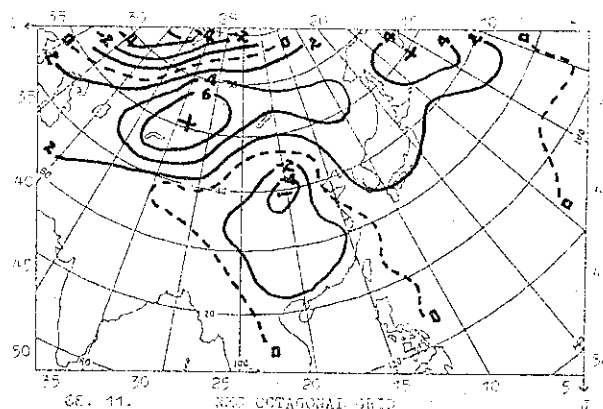


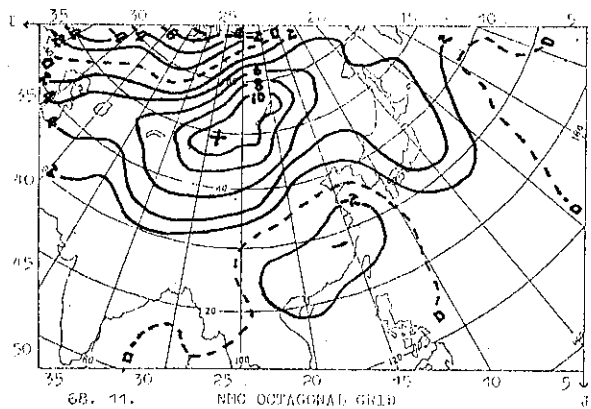
圖 1. 1967 年 12 月至 1977 年 2 月共十個冬季之平均地面天氣圖



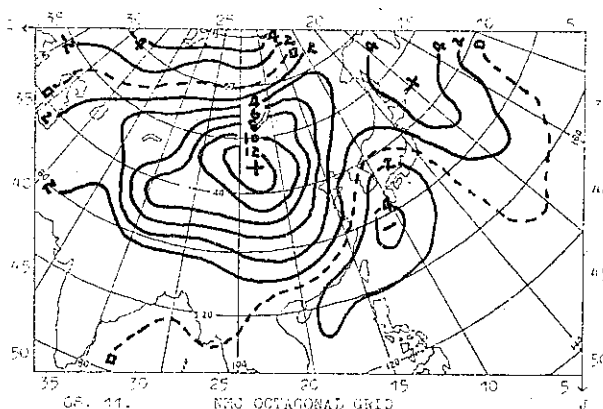
a. 冷鋒通過台灣北部前 72 小時



b. 冷鋒通過台灣北部前 48 小時

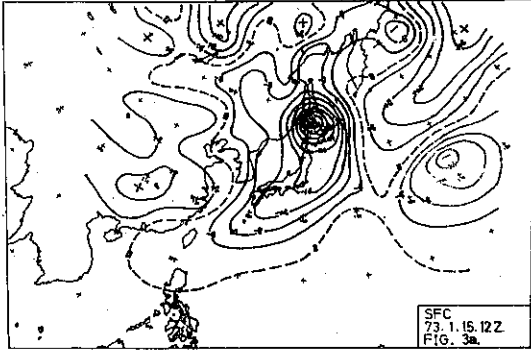


c. 冷鋒通過台灣北部前 24 小時

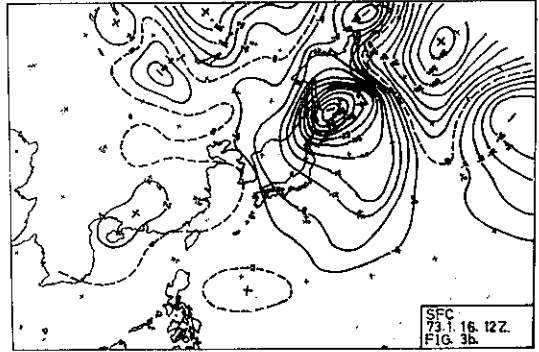


d. 冷鋒通過台灣北部當時

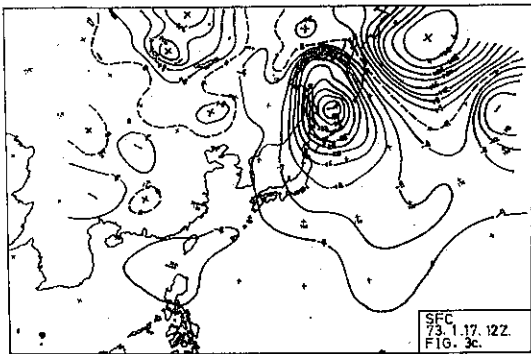
圖 2. 寒潮個案合成距平圖



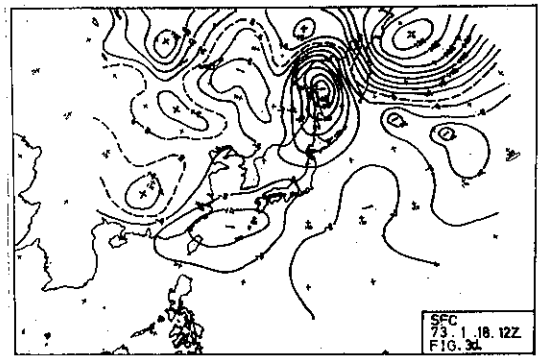
a. 1月15日12Z



b. 1月16日12Z

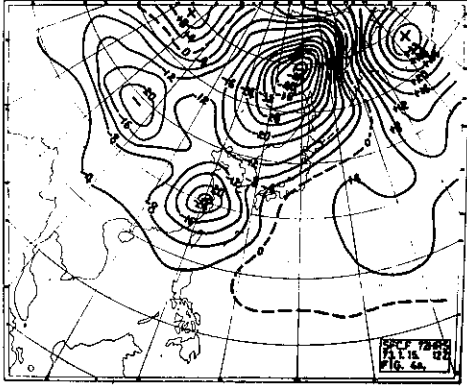


c. 1月17日12Z

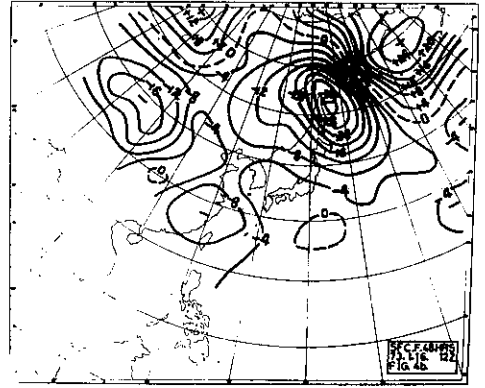


d. 1月18日12Z

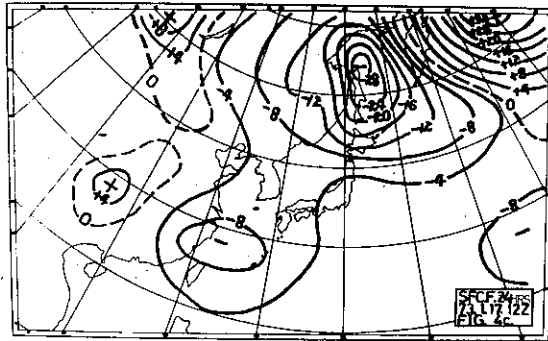
圖3.個案1 (冷鋒通過台灣北部時間為1984年1月18日12Z)
之實際地面距平圖(等值線單位為mb)



a. 72 小時預測圖

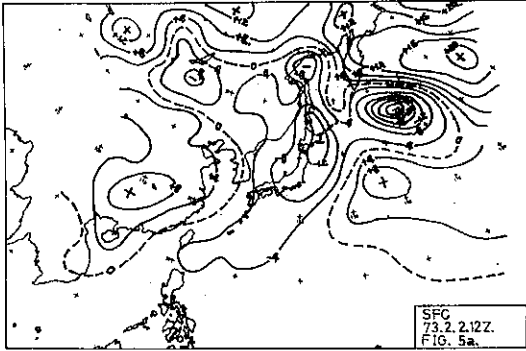


b. 48 小時預測圖

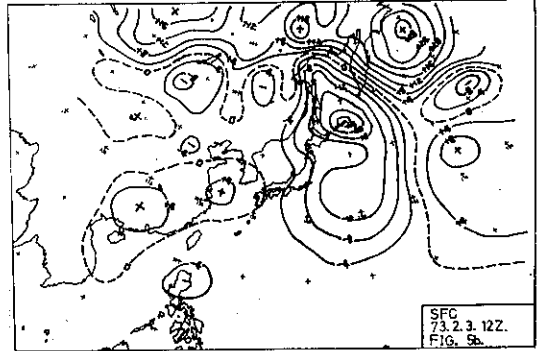


c. 24 小時預測圖

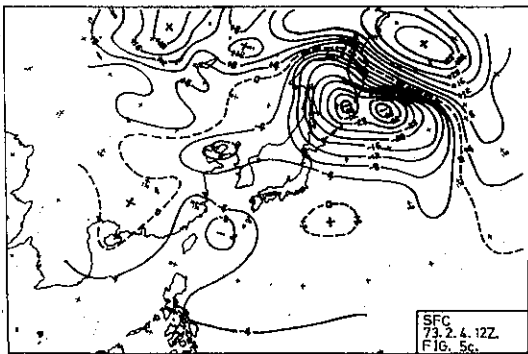
圖 4. 個案 1 之預測地面距平圖 (等值線單位為 mb)
 , 預測對象為 1 月 18 日 12Z



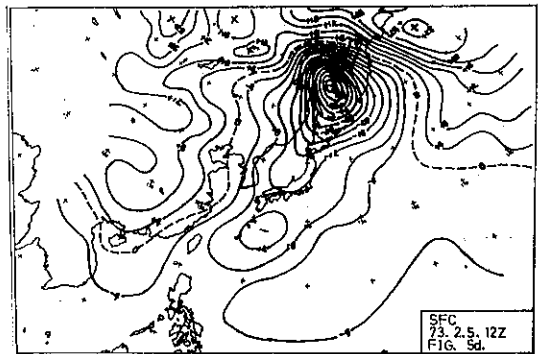
a. 2月2日 12Z



b. 2月3日 12Z

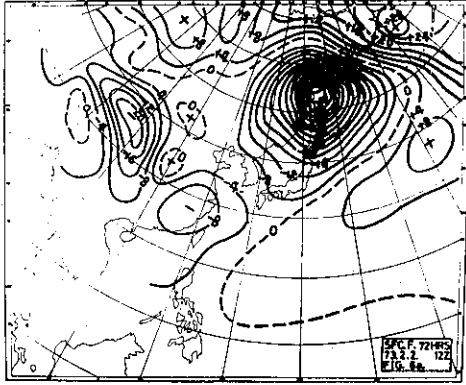


c. 2月4日 12Z

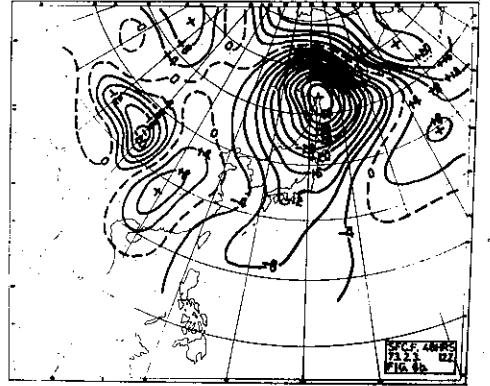


d. 2月5日 12Z

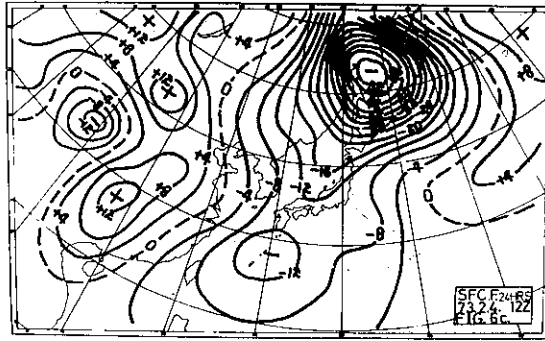
圖 5. 個案 2 (冷鋒面通過台灣北部時間為 1984 年 2 月 5 日 12Z)
之實際地面距平圖 (等值線單位為 mb)



a. 72 小時預測圖

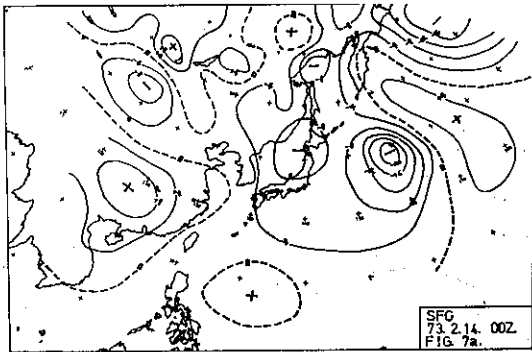


b. 48 小時預測圖

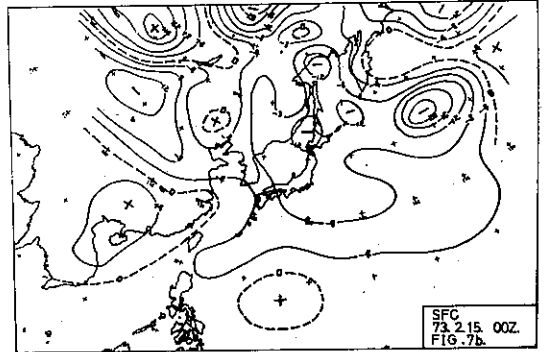


c. 24 小時預測圖

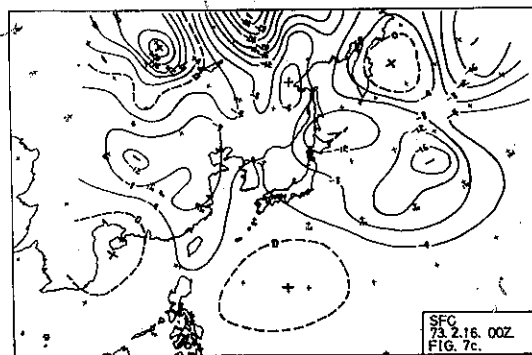
圖 6. 個案 2 之預測地面距平圖 (等值線單位為 mb)
 , 預測對象為 2 月 5 日 12Z



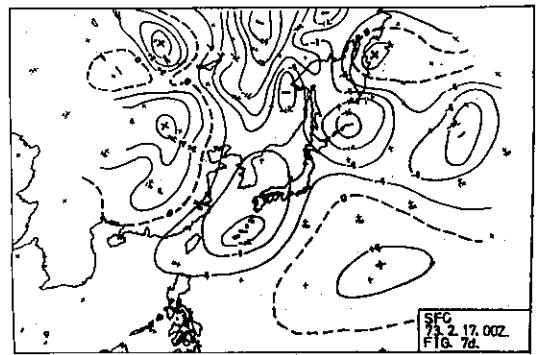
a. 2月14日00Z



b. 2月15日00Z

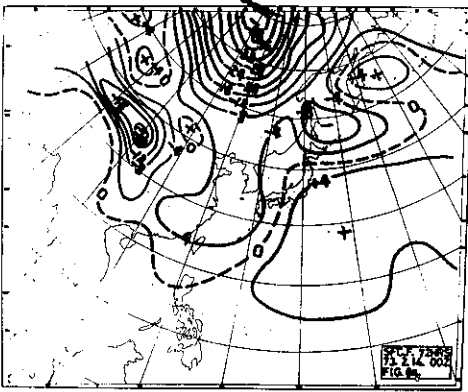


c. 2月16日00Z

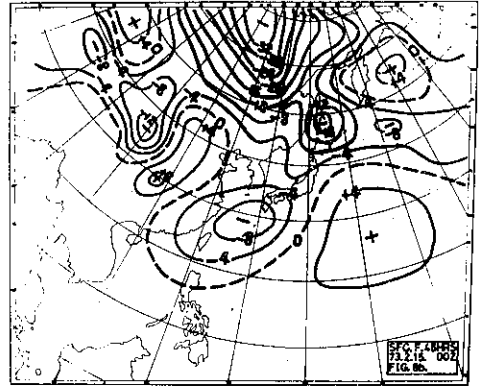


d. 2月17日00Z

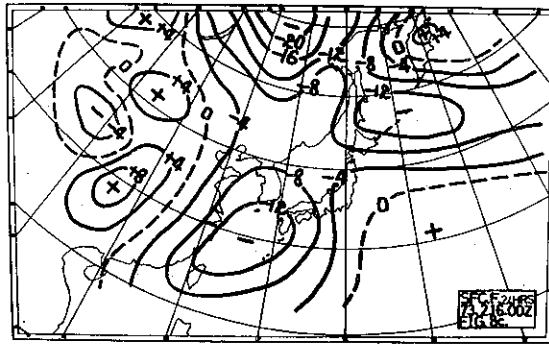
圖7.個案3 (冷鋒通過台灣北部時間為1984年2月17日00Z)
之實際地面距平圖 (等值線單位為mb)



a. 72 小時預測圖



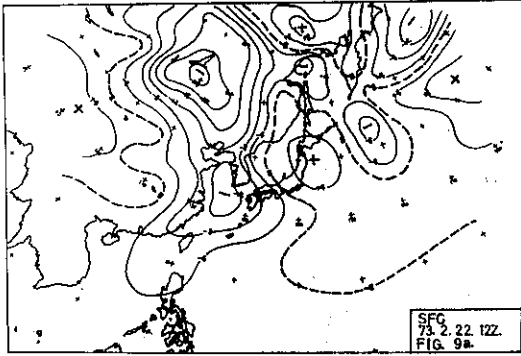
b. 48 小時預測圖



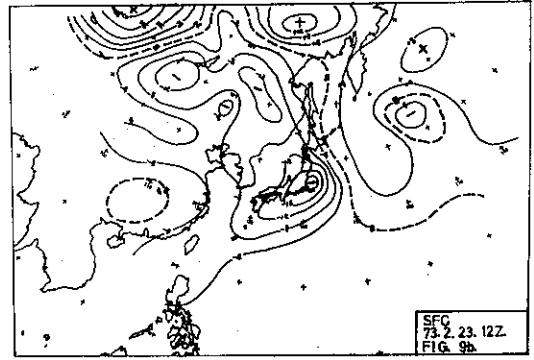
c. 24 小時預測圖

圖 8. 個案 3 之預測地面距平圖 (等值線單位為 mb)

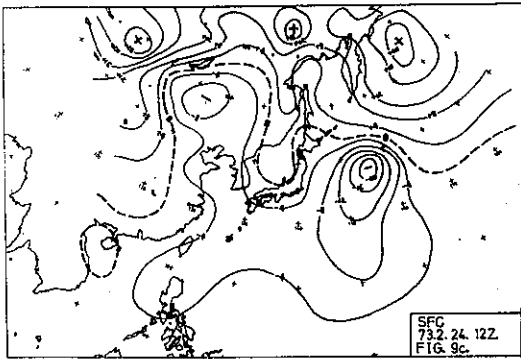
• 預測對象為 2 月 17 日 00Z



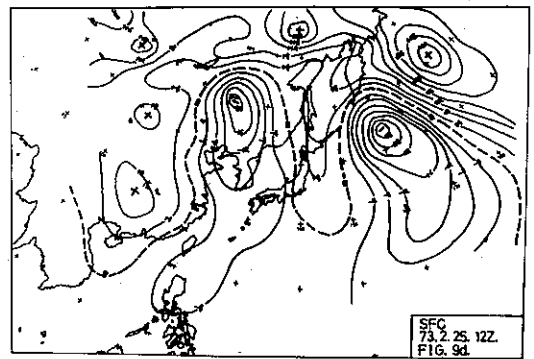
a. 2月22日 12Z



b. 2月23日 12Z

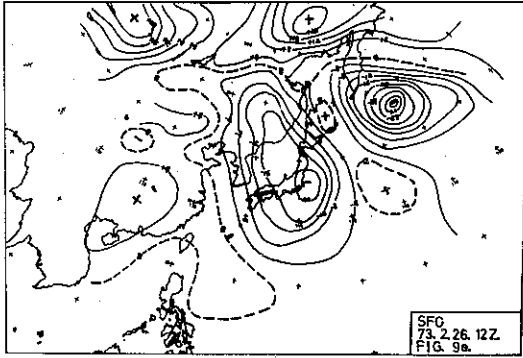


c. 2月24日 12Z

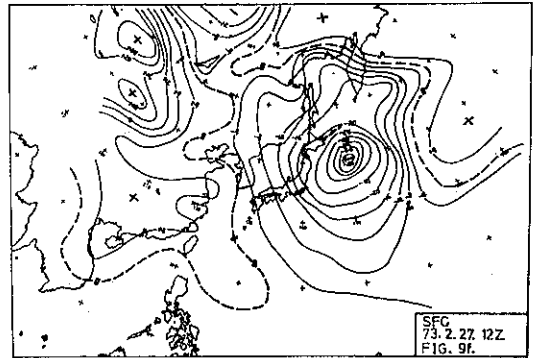


d. 2月25日 12Z

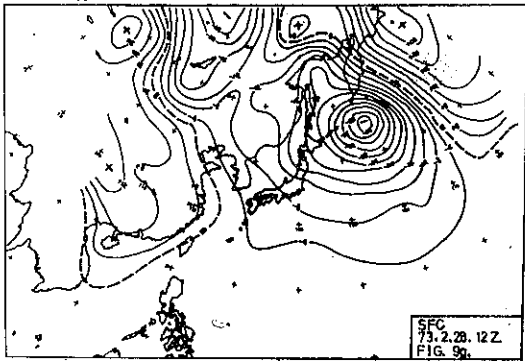
圖 9.個案 4 (冷鋒通過台灣北部時間為 1984 年 2 月 25 日 12Z)
之實際地面距平圖 (等值線單位為 mb)



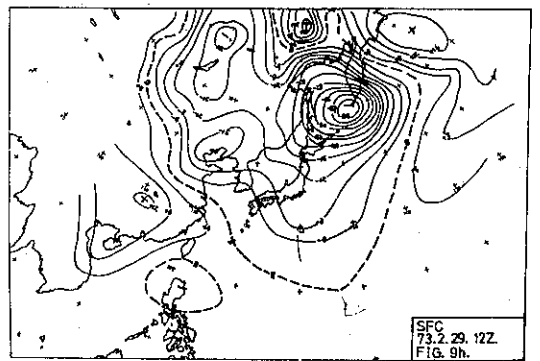
e. 2月26日 12Z



f. 2月27日 12Z

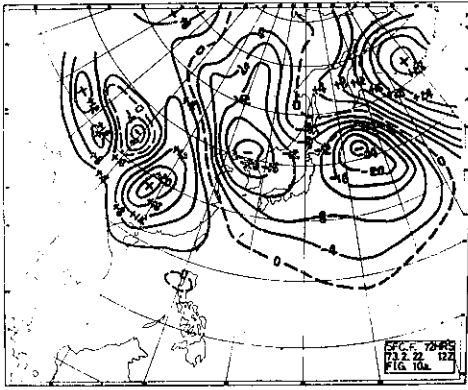


g. 2月28日 12Z

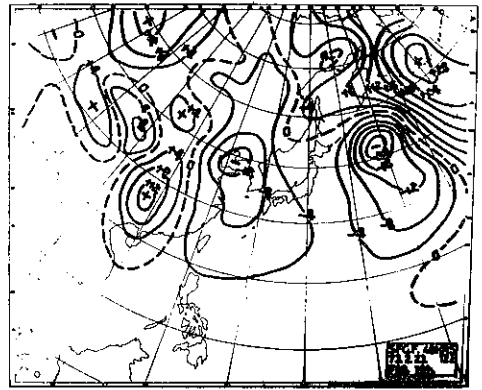


h. 2月29日 12Z

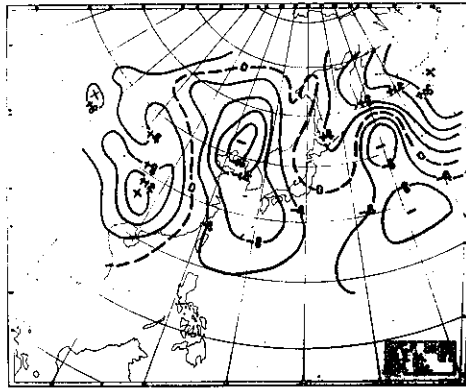
圖 9. 個案 4 (冷鋒通過台灣北部時間為 1984 年 2 月 25 日 12Z)
之實際地面距平圖 (等值線單位為 mb)



a. 72 小時預測圖

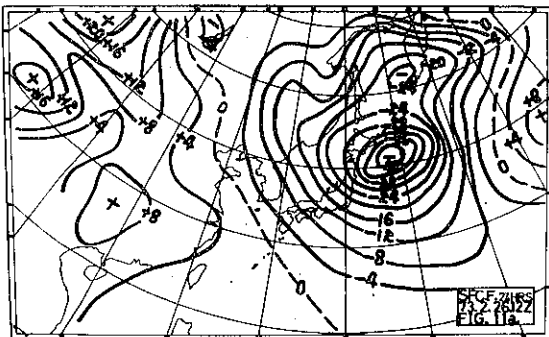


b. 48 小時預測圖

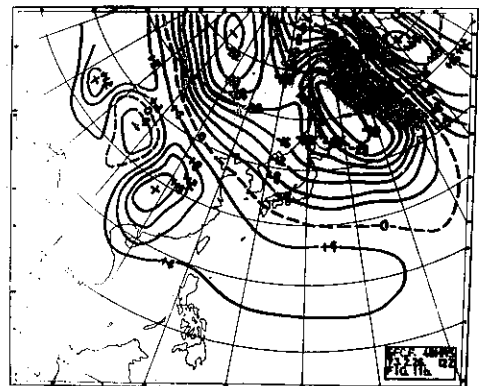


c. 24 小時預測圖

圖10.個案 4 之預測地面距平面 (等值線單位為 mb)，預測對象為 2 月 25 日 12Z



a. 24 小時預測圖



b. 48 小時預測圖

圖11.個案 4 之預測地面距平面 (等值線單位為 mb)，初始資料時間為 2 月 26 日 12Z

