交通部中央氣象局
委託研究計畫期末成果報告

高影響天氣的展期預報研究-全球預報模式颱風路徑
預報的動力機制研究

計畫類別：■氣象　　□海象
計畫編號：MOTC-CWB-105-M-08
執行期間： 105 年 04 月 01 日至 105 年 12 月 31 日
計畫主持人：郭鴻基
執行機構：國立臺灣大學 大氣科學系

本成果報告包括以下應繳交之附件(或附錄)：
□赴國外出差或研習心得報告 1 份
□赴大陸地區出差或研習心得報告 1 份
□出席國際學術會議心得報告及發表之論文各 1 份

中華民國 105 年 12 月 01 日

政府研究計畫期中報告摘要資料表

<table>
<tr><td>計畫中文名稱</td><td colspan="4">高影響天氣的展期預報研究-全球預報模式颱風路徑預報的動力機制研究</td></tr>
<tr><td>計畫編號</td><td colspan="4">MOTC-CWB-105-M-08</td></tr>
<tr><td>主管機關</td><td colspan="4">交通部中央氣象局</td></tr>
<tr><td>執行機構</td><td colspan="4">國立臺灣大學 大氣科學系</td></tr>
<tr><td>年度</td><td>105</td><td>執行期間</td><td colspan="2">民國 105 年 04 月 01 日至
民國 105 年 12 月 31 日止</td></tr>
<tr><td>本期經費
(單位：千元)</td><td colspan="4">650</td></tr>
<tr><td rowspan="2">執行進度</td><td>預定(%)</td><td colspan="2">實際(%)</td><td>比較(%)</td></tr>
<tr><td>100</td><td colspan="2">100</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">經費支用</td><td>預定(千元)</td><td colspan="2">實際(千元)</td><td>支用率(%)</td></tr>
<tr><td>650</td><td colspan="2">650</td><td>100</td></tr>
<tr><td rowspan="2">研究人員</td><td>計畫主持人</td><td colspan="2">協同主持人</td><td>研究助理</td></tr>
<tr><td>郭鴻基</td><td colspan="2">鄧君豪</td><td></td></tr>
<tr><td>報告頁數</td><td>26</td><td colspan="2">使用語言</td><td>中文</td></tr>
<tr><td>中英文關鍵詞</td><td colspan="4">pseudospectral penalty methods(擬譜補償法)
shallow water equations(淺水波方程)</td></tr>
<tr><td>研究目的</td><td colspan="4">本研究計畫目的是發展多域型 (multi-domain type) 全球數值天氣計算模式，以做為未來可能採用之高效率數值天氣模式的動力核 (dynamic core)。

計算方法是將球面定義域分割成多個相連而不重疊之曲邊四邊形 (a union of non-conform quadrilatron grid mesh)，在各子域四邊形中進行波方程計算並且穩定連接各子域間的數值解。我們的目標模型有二：一為純量波方程於球面的計算模式 (scalar advection equation on spherical surfaces)；二為球面上淺水波方程式的計算模式 (shallow water wave equations on spherical surfaces)。因為擬譜法 (pseudospectral methods) 有保持低數值</td></tr>
</table>

	色散誤差 (numerical dispersion error) 的特性，且多域計算 (multi-domain computational framework) 適合現代化平行運算架構，我們期待這樣的計算模式能有效地模擬計算且長時間積分球面上氣象的波動或流體現象。
研究成果	本研究計畫第一階段的工作是建構多域型球面上純量波方程的計算模式：我們採用 cubed sphere 網格生成方式將球面分割成有限個曲面四邊形子域，並設計一組通用於各子域的純量波方程擬譜補償法計算格式(pseudospectral penalty scheme)，來計算方程式中高度場受固定旋轉風場 (solid body rotation wind field) 傳輸下的情況。所設計之格式已完成電腦程式編程和除錯測試，計算結果穩定和精確，長時間積分的計算情況下累積的數值色散誤差 (numerical dispersion error) 也非常低，運用多緒 (multi-thread) 計算方式，數值模式也能達成平行計算 (parallel computation) 效率的提升。 第二階段的工作是建構多域型球面上淺水波方程的計算格式；我們依然使用 cubed sphere 網格點，並建構一組通用於各子域的淺水波方程擬譜計算格式。建構之程式碼經一系列測試，我們所得的結果與相關文獻所得計算之結果非常吻合。
具體落實應用情形	純量波方程和淺水波方程四邊形多域擬譜補償法計算模式解已完成開發測試。由於本研究所開發的計算模式已模組化，對於淺水波方程，或其它球面上大氣物理現象等各類計算模式的開發時程將可縮短。
計畫變更說明	無
落後原因	無
檢討與建議 (變更或落後之因應對策)	

一、摘要

本計畫中，我們建構一組高精確計算格式 (high-order-accurate scheme) 來運算球面上傳輸方程 (advection equation on spherical surface) 和淺水波方程 (shallow water wave equations on spherical surface)的近似解。我們的計算架構 (computational framework) 採用 cubed sphere 網格來建構多域計算格點 (multi-domain computational mesh)。在各個子域 (sub-domain) 中，我們透過擬譜法 (pseudospectral method) 和 Runge-Kutta 法建構前述微分方程的計算格式。上述所說之架構經數學分析是穩定的，並且完成電腦編程和一系列測試，所得的數值解結果非常精確，且隨網格加密收斂。

二、前言

自二十世紀中葉起，隨計算機的發展，以數值方法來計算大氣運作的模式 (Hoskins and Simmons 1975, Ritchie 1988) 成為一門新的科學領域。在發展初期，因受限於計算機的功能和執行速度，進行大氣流體運動的模擬計算是非常耗時的。由於波譜法的高精確度特性 (Kreiss and Oliger 1972) 和其傅立葉快速變換的運算方式 (fast Fourier transform)，波譜法相較於其他計算方法在成本和效能的評比上有較佳優勢，故成了主流計算方式。

這種計算模式，是將大氣運動統御方程式的解用球面調和函數 (spherical harmonic function) 作級數展開，離散原偏微分方程，並用計算機計算模擬大氣流體運動。隨著天氣預報精準度需求不斷提升，數值天氣模式也需要用高解析度的網格來進行計算。然而，波譜法在網格點數增加時，計算量會大量增加，這些工作量的增加原因有二：第一，於兩極區域網格點的間隔距離是以點數的平方縮小 (Hesthaven, Gottlieb and Gottlieb 2007)，這個特性使得可穩定計算的時間步階 (time step) 變得很小，增加了計算執行時間；第二，調和函數是由三角函數（經度方向）和 Legendre 多項式（緯度方向）組合而成。在經度方向的數值微分可透過傅立葉級數快速變換法來執行，

然而在緯度方向的數值微分，至今尚無高效率的方式來計算。因此透過矩陣直接執行 Legendre 變換，在點數增加時緯度方向數值微分的工作量是非常大的。

對於前述之困難，計算科學界於過去的二十多年已發展出較成熟的技術來克服。其原則是將計算域先透過較均勻的區域分割，將定義域分割成四邊形 (quadrilateral element) 和三角形 (triangular element) 的多域網格，之後在各子域中運用各種數值偏微分方法，如：差分法 (difference method)、有限元素法 (finite element method)、有限體積法 (finite volume method)、波譜／擬譜法 (spectral／pseudospectral method)、不連續葛勒金有限元方法 (discontinuous Galerkin finite element method)，串聯各子域邊界訊息，來計算各子域的近似解。這種計算模式已成功的運用在許多的計算科學中。此種方法不僅可以維持高精確的計算，也拜電腦的多核 (multi-core)、多緒 (multi-threads) 、分散式叢集 (distributed cluster) 等計算機架構發展所賜，可以更有效率的執行平行化計算。因此，近年這些原先在學術先導的計算方法 (Hesthaven 1998, Feng, Teng and Chen 2007, Teng et al. 2008)，也一步步被工業界採用作為實際工程開發計算。

我們依循這種計算架構，建造多域擬譜補償格式 (multi-domain pseudospectral penalty scheme) (Hesthaven 2000) 求傳輸方程和淺水波方程在球面的解。在多域網格的建構採用 cubed sphere 方法 (Nair, Thomas and Loft 2005)，即利用一立方塊的六個平面進行等距分割，再將各分割面透過特定投影方式映射到球面，如圖 1。在各個球面子域上，我們採用擬譜法將傳輸方程和淺水波方程之空間變數離散化，而各子域邊界訊息則透過補償法 (penalty method) 互相連接。此計算所得之半離散計算格式即為一系統常微分方程組。這樣的時變系統方程組我們採用高階 Runge-Kutta 計算法來進行計算。我們將提出的方法用程式編成和執行，所得之結果的確可穩定、精確的計算，且能用多緒平行計算法提升計算效能。

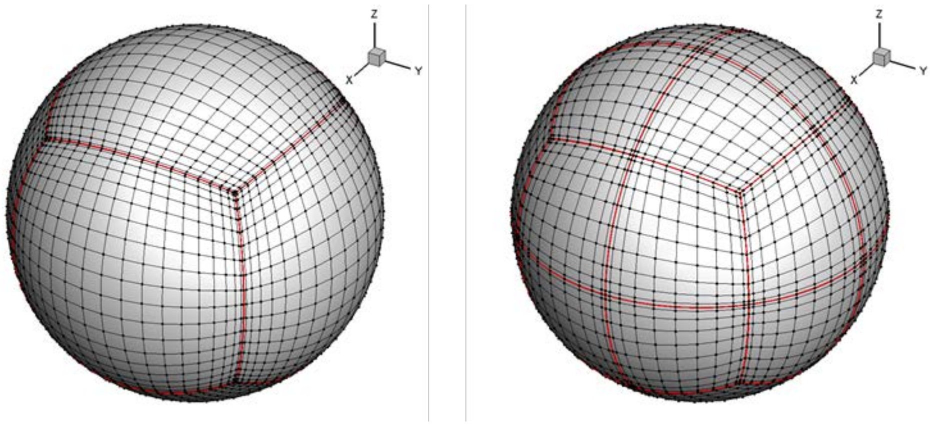

圖 1. 多域網格。左圖為球面分割成六個子域，各子域的點數為 21x21。

右圖為球面分割成 24 個子域，各子域為點數為 11x11。

本文後續內容如下：在第三節中我們將介紹多域擬譜計算方法於球面上傳輸方程和淺水波方程的解法；第四節我們將介紹運用這種新方法所得的計算結果；最後第五節為總結。

三、球面傳輸方程與淺水波方程之計算格式

(A) 球面傳輸方程之計算格式

將半徑為R之球面，記之為Ω，λ和θ代表經緯度座標，$\hat{\lambda}$和$\hat{\theta}$代表經度與緯度方向之單位向量。令$\vec{V}=(U,V)$表示球面上之一給定的風場，

$$\vec{V}=\hat{\lambda}U+\hat{\theta}V\ ,$$

U和V分別為經向與緯向的風場分量。則球面傳輸方程如下：

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla h=0,$$

$$h(\lambda,\theta,0)=h_0(\lambda,\theta)\ ,$$

其中，$h=h(\lambda,\theta,t)$為高度場；∇為球面上梯度運算子；h_0為h的初始條件 (initial condition)。風場需滿足不可壓縮 (incompressible) 之條件，即$\nabla\cdot V=0$，故傳輸方程式可用守恆律 (conservation law) 之型式表示：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\vec{V}) = 0,$$

$$h(\lambda, \theta, 0) = h_0(\lambda, \theta) \text{ 。}$$

對於上述傳輸方程的計算，我們先將球面透過 cubed sphere 方法 (Nair, Thomas and Loft 2005) 將球面分割成K個曲面四邊形 (curvilinear quadrilateral element)，稱為子域，如圖 1 所示。將每個子域標記為Ω_i, $i = 1,2,3 \ldots K$，並對每一個子域建構座標變換 (coordinate mapping)。透過這樣的變換我們可將球面上的每一個子域映射到一$(\xi^1, \xi^2) \in [-1,1]^2$的正方形。各子域傳輸方程經座標變換後的形式可表示成：

$$\frac{\partial (Jh)}{\partial t} + \frac{\partial (Ju^1 \cdot h)}{\partial \xi^1} + \frac{\partial (Ju^2 \cdot h)}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$h(\xi^1, \xi^2, 0) = h_0(\xi^1, \xi^2) \text{ 。}$$

其中，J為座標(λ, θ)映射到座標(ξ^1, ξ^2)的 Jacobi 函數，u^1和u^2為風場$\vec{V}$在ξ^1和ξ^2方向的分量。上述為守恆律形式之方程式。為了在計算上有更高的穩定性 (Hesthaven, Gottlieb and Gottlieb 2007)，我們將方程式以等價的斜對稱形式 (skew symmetric formulation) 表示：

$$\frac{\partial}{\partial t}(Jh) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi^1}(Ju^1 \cdot h) + \frac{1}{2}(Ju^1)\frac{\partial h}{\partial \xi^1} + \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \xi^1}(Ju^1))h$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi^2}(Ju^2 \cdot h) + \frac{1}{2}(Ju^2)\frac{\partial h}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \xi^2}(Ju^2))h = 0 \text{ 。}$$

在此提醒，以下格式的建構說明，是以離散化此斜對稱形式的偏微分方程呈現，而非守恆形式之偏微分方程。

令N為一正整數，對於各子域，我們可在ξ^1和ξ^2座標上配置 Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) 的點：ξ_i^1和ξ_i^2，這些點是多項式$(1-(\xi^1)^2)P_N'(\xi^1)$的根，其中，$P_N'(\xi^1)$為冪次為N的 Legendre 多項式的導函數。運用這些點，我們可建構二維的網格點 (ξ_i^1, ξ_j^2)，$0 \le i, j \le N$，並建構 Lagrange 內插多項式 (interpolation polynomial)：

$$L_{ij}(\xi_i^1,\xi_j^2)=l_i(\xi^1)l_j(\xi^2)$$

$$l_i(\xi^1)=-\frac{(1-(\xi^1)^2)P_N'(\xi^1)}{N(N+1)(\xi^1-\xi_i^1)P_N'(\xi_i^1)},$$

$$l_j(\xi^2)=-\frac{(1-(\xi^2)^2)P_N'(\xi^2)}{N(N+1)(\xi^2-\xi_j^2)P_N'(\xi_j^2)} \text{ 。}$$

在這些二維的網格點(ξ_i^1,ξ_j^2)，函數J,u^1和u^2之數值可表示成J_{ij},u_{ij}^1和u_{ij}^2。我們尋求數值解的形式為：

$$I_N[h]=h(\xi^1,\xi^2,t)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}L_{ij}(\xi^1,\xi^2)h_{ij}(t)$$

並要求滿足配置方程 (collocation equations)：

$$J_{ij}\frac{dh_{ij}(t)}{dt}+[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi^1}(I_N[Ju^1\cdot h])]_{ij}+\frac{1}{2}(I_N[Ju^1])_{ij}[\frac{\partial h}{\partial\xi^1}]_{ij}+\frac{1}{2}([\frac{\partial}{\partial\xi^1}(I_N[Ju^1])]_{ij})h_{ij}$$

$$+[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi^2}(I_N[Ju^2\cdot h])]_{ij}+\frac{1}{2}(I_N[Ju^2])_{ij}[\frac{\partial h}{\partial\xi^2}]_{ij}+\frac{1}{2}([\frac{\partial}{\partial\xi^2}(I_N[Ju^2])]_{ij})h_{ij}$$

$$=-\frac{N(N+1)}{2}J_{Nj}\delta_{Nj}\frac{|u_{Nj}^1|-u_{Nj}^1}{2}(h_{Nj}-h_{Nj}^+)$$

$$-\frac{N(N+1)}{2}J_{0j}\delta_{0j}\frac{|u_{0j}^1|-u_{0j}^1}{2}(h_{0j}-h_{0j}^+)$$

$$-\frac{N(N+1)}{2}J_{iN}\delta_{iN}\frac{|u_{iN}^2|-u_{iN}^2}{2}(h_{iN}-h_{iN}^+)$$

$$-\frac{N(N+1)}{2}J_{i0}\delta_{i0}\frac{|u_{i0}^2|-u_{i0}^2}{2}(h_{i0}-h_{i0}^+) \text{ 。}$$

上述格式中δ_{ij}為 Kronecker delta 函數，若$i\neq j$，則$\delta_{ij}=0$；若$i=j$，則$\delta_{ij}=1$，h_{ij}^+表示該子域邊界上相鄰子域上的h值，等式右邊的項稱為邊界條件補償項 (boundary penalty terms)。

對於上述之半離散格式，取ω_{ij}為 LGL 之積分權數，我們可透過數值積分得數值解的能量：

$$E=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\omega_{ij}\cdot J_{ij}\cdot(h_{ij}(t))^2$$

此能量對於時間的變化率小於等於零，代表數值解的能量在任何時刻滿足以下估計：

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\omega_{ij}\cdot J_{ij}\cdot(h_{ij}(t))^2\le\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\omega_{ij}\cdot J_{ij}\cdot(h_{ij}(0))^2$$

代表計算格式是穩定的。有關格式穩定性之證明，因細節繁瑣不在此處說明。下一節中我們直接以數值結果呈現格式為穩定。

(B) 淺水波方程之計算格式

現在考慮球面上淺水方程：

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-\nabla\cdot(hV)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-\eta k\times V-\nabla(K+g(h+h_s)),$$

$$K=\frac{(V\cdot V)}{2},\eta=f+k\cdot\nabla\times V$$

其中h和h_s分別是高度場和球面地形高度場，V為球面上風場向量，K為流場動能，f為科氏力，k為球面向外的單位向量。

對於上述淺水波方程若將球面依 cubed sphere 網格分割，經座標變換則在各子域上淺水波方程式可表示成：

$$\frac{\partial}{\partial t}(Jh)+\frac{\partial(Jhu^1)}{\partial\xi^1}+\xi_2'\frac{\partial(Jhu^2)}{\partial\xi^2}=0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial\xi^1}=Ju^2(f+\zeta)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial\xi^2}=-Ju^1(f+\zeta)$$

$$E = g(h + h_s) + \frac{u^1 u_1 + u^2 u_2}{2}, \qquad \zeta = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi^1} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi^2}\right)$$

其中J為座標變換 Jacobi 函數，$-1 \leq \xi^1, \xi^2 \leq 1$為個子域上之第一和第二方向座標，$u_1$, u_2為風場向量於ξ^1, ξ^2座標系之協變向量 (covariant vector)，而u^1和u^2為對應之抗變向量 (contravariant vector)。

我們在各子域中布置 LGL 網格點，並令數值解為：

$$h(\xi^1, \xi^2, t) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} L_{ij}(\xi^1, \xi^2)\, h_{ij}(t),$$

$$u_1(\xi^1, \xi^2, t) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} L_{ij}(\xi^1, \xi^2)\, u_{1,ij}(t),$$

$$u_2(\xi^1, \xi^2, t) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} L_{ij}(\xi^1, \xi^2)\, u_{2,ij}(t),$$

滿足以下格式：

$$\frac{d}{dt}\left(J_{ij} h_{ij}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi^1}(Jhu^1)_{ij} + \frac{\partial}{\partial \xi^2}(Jhu^2)_{ij} = P_{ij}^{+\xi^1} + P_{ij}^{-\xi^1} + P_{ij}^{+\xi^2} + P_{ij}^{-\xi^2},$$

$$\frac{d}{dt}(u_1)_{ij} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial \xi^1} = (Ju^2)_{ij} \cdot (f + \zeta)_{ij} + Q_{ij}^{+\xi^1} + Q_{ij}^{-\xi^1},$$

$$\frac{d}{dt}(u_2)_{ij} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial \xi^2} = -(Ju^2)_{ij} \cdot (f + \zeta)_{ij} + R_{ij}^{+\xi^2} + R_{ij}^{-\xi^2},$$

P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}等是依據 Lax-Friedrichs 數值通量 (numerical flux) 所推導之內點式補償邊界條件 (interior penalty boundary condition) 。透過這種方式各子域相鄰四周的訊息進行穩定交換，並饋入個子域中進行補償修正。P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}形式如下：

P_{ij}的部分：

$$P_{ij}^{+\xi_1} = r_i^+ \frac{[Jhu^1 - \alpha_1(Jh)]_{Nj} - [Jhu^1 - \alpha_1(Jh)]_{0j}^-}{2},$$

$$P_{ij}^{-\xi_1} = -r_i^- \frac{[Jhu^1 - \alpha_1(Jh)]_{0j} - [Jhu^1 - \alpha_1(Jh)]_{Nj}^-}{2},$$

$$P_{ij}^{+\xi_2} = r_j^+ \frac{[Jhu^2 - \alpha_2(Jh)]_{iN} - [Jhu^2 - \alpha_2(Jh)]_{i0}^-}{2},$$

$$P_{ij}^{-\xi_2} = -r_j^- \frac{[Jhu^2 - \alpha_2(Jh)]_{i0} - [Jhu^2 - \alpha_2(Jh)]_{iN}^-}{2},$$

Q_{ij}的部分：

$$Q_{ij}^{+\xi_1} = r_i^+ \frac{[E - \alpha_1 u_1]_{Nj} - [E - \alpha_1 u_1]_{0j}^-}{2}, \qquad Q_{ij}^{-\xi_1} = -r_i^- \frac{[E + \alpha_1 u_1]_{0j} - [E + \alpha_1 u_1]_{Nj}^-}{2},$$

$$Q_{ij}^{+\xi_2} = r_j^+ \frac{[-\alpha_2 u_2]_{Nj} - [-\alpha_2 u_2]_{0j}^-}{2}, \qquad Q_{ij}^{-\xi_2} = -r_j^- \frac{[\alpha_2 u_2]_{0j} - [\alpha_2 u_2]_{Nj}^-}{2},$$

R_{ij}的部分：

$$R_{ij}^{+\xi_1} = r_i^+ \frac{[-\alpha_1 u_2]_{Nj} - [-\alpha_1 u_2]_{0j}^-}{2}, \qquad R_{ij}^{-\xi_1} = -r_i^- \frac{[\alpha_1 u_2]_{0j} - [\alpha_1 u_2]_{Nj}^-}{2},$$

$$R_{ij}^{+\xi_2} = r_j^+ \frac{[E - \alpha_2 u_2]_{Nj} - [E - \alpha_2 u_2]_{0j}^-}{2}, \qquad R_{ij}^{-\xi_2} = -r_j^- \frac{[E + \alpha_2 u_2]_{0j} - [E + \alpha_2 u_2]_{Nj}^-}{2},$$

其中$\alpha_1 = max\left(|u_1| + \sqrt{ghG^{11}}\right), \alpha_2 = max\left(|u_2| + \sqrt{ghG^{22}}\right)$，而$G^{11}$和$G^{22}$為座標變換之計算張量 (metric tensor) 逆矩陣的對角元素，而

$$r_i^+ = \frac{P'_{N+1}(\xi_i) + P'_N(\xi_i)}{2}, \qquad r_i^- = (-1)^N \frac{P'_{N+1}(\xi_i) - P'_N(\xi_i)}{2} 。$$

P'_N為冪次為N的 Legendre 多項式之導函數，在P, Q, R邊界條件項以中括號和上標$^-$標記之項是由鄰域而來的對應邊界量。

以上經由半離散化所得之系統常微分方程組，我們用三階精確的 total variation diminishing Runge-Kutta (3^{rd} order TVD-RK) 來進行時間上的積分運算。選用 TVD-RK 是因該方法針對非線性偏微分方程式的計算有較佳之穩定性條件。

四、球面傳輸方程與淺水波方程之計算結果與討論

(A) 球面傳輸方程之計算結果與討論

我們給定一初始高度場h_0，經一給定風場U、V傳輸繞球面運行，來驗證計算格式和電腦編程的正確性。第一個測試問題的風場和h_0場分別為：

$$U = (\cos\alpha_0 \cos\theta + \sin\alpha_0 \cos\lambda \sin\theta)$$

$$V = -\sin\alpha_0 \sin\lambda$$

$$h_0(\lambda, \theta) = exp(\frac{(X-R)^2 + Y^2 + Z^2}{\gamma^2}),$$

$$X = R\cos\theta\cos\lambda, \qquad Y = R\cos\theta\sin\lambda, \qquad Z = R\sin\theta \;,$$

其中λ、θ分別為經緯度， $\alpha_0 = \pi/4$為風場旋轉軸與極軸的夾角。在此風場的傳輸下，h的場形將會由初始位置以風場旋轉軸為中心，進行逆時鐘繞行，在$t = \pi$時經過北極，至$t = 2\pi$時回到初始位置。在此風場下，h的場形在傳輸過程不會形變，故在$t = 2\pi$時（回到初始位置時），我們的計算結果可與初始場進行比較，瞭解模擬結果的收斂性。圖 2 中我們繪出$t = n \cdot \pi/8, n = 0,1,2, \dots 8$時的$h$場，計算結果顯示$h$場在此風場的傳輸下，成功繞球面一周回到初始位置，且無形變。

在我們的計算測試中，我們並未用到任何的濾波方式 (Hesthaven, Gottlieb and Gottlieb 2007, Gelb and Gleeson 2001)、人工黏滯法 (Gustafsson, Kreiss, and Oliger 1995) 或斜率限制器 (Hesthaven and Warburton 2008) 等人為的穩定機制，這代表本報告所提出的計算架構是非常穩定的，這對於長時間計算相當重要。因為任何人為的穩定機制，某種程度上皆會以犧牲數值解的精確度來換取計算格式的穩定性。因此若要進行長時間高精確計算，則網格點數需再增加，代表計算時間將增長。這也說明本文介紹的計算方法在這方面有相當的優勢。

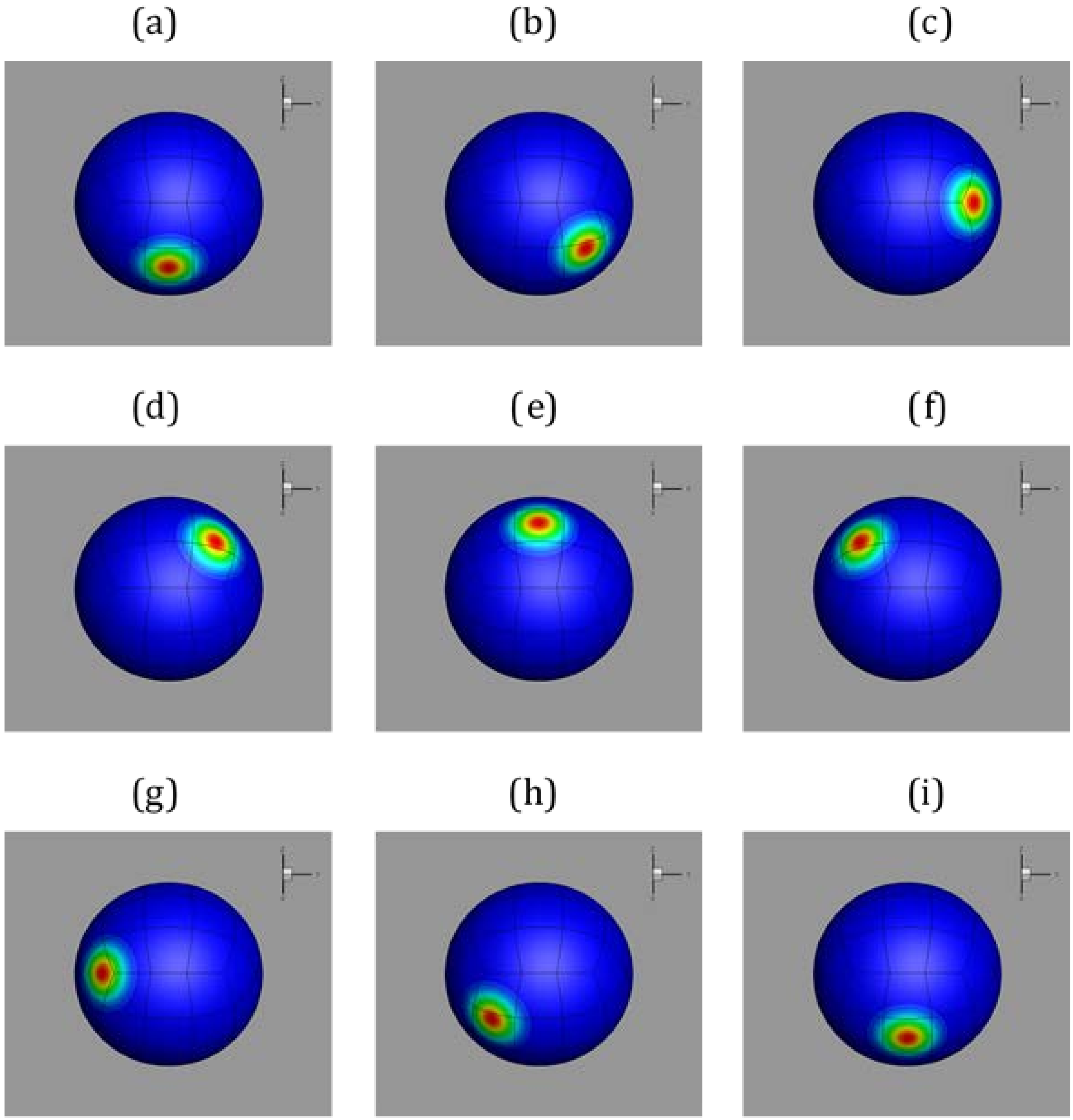

圖 2. 高度場h在不同時間之分布圖 (a) $t = 0$; (b) $t = \pi/4$; (c) $t = \pi/2$; (d) $t = 3\pi/4$; (e) $t = \pi$; (f) $t = 5\pi/4$; (g) $t = 6\pi/4$; (h) $t = 7\pi/4$; (i) $t = 2\pi$

為定量瞭解計算模擬格式的精確度，我們採用不同的計算網格進行模擬並量測$t = 2\pi$時的數值解誤差，並將結果繪製成圖。我們將每一種多域網格的子域點數增加，由圖 3 上顯示誤差的確隨網格加密而遞減。當誤差隨網格加密而遞減時，誤差遞減曲線斜率的絕對值代表格式收斂的階數。

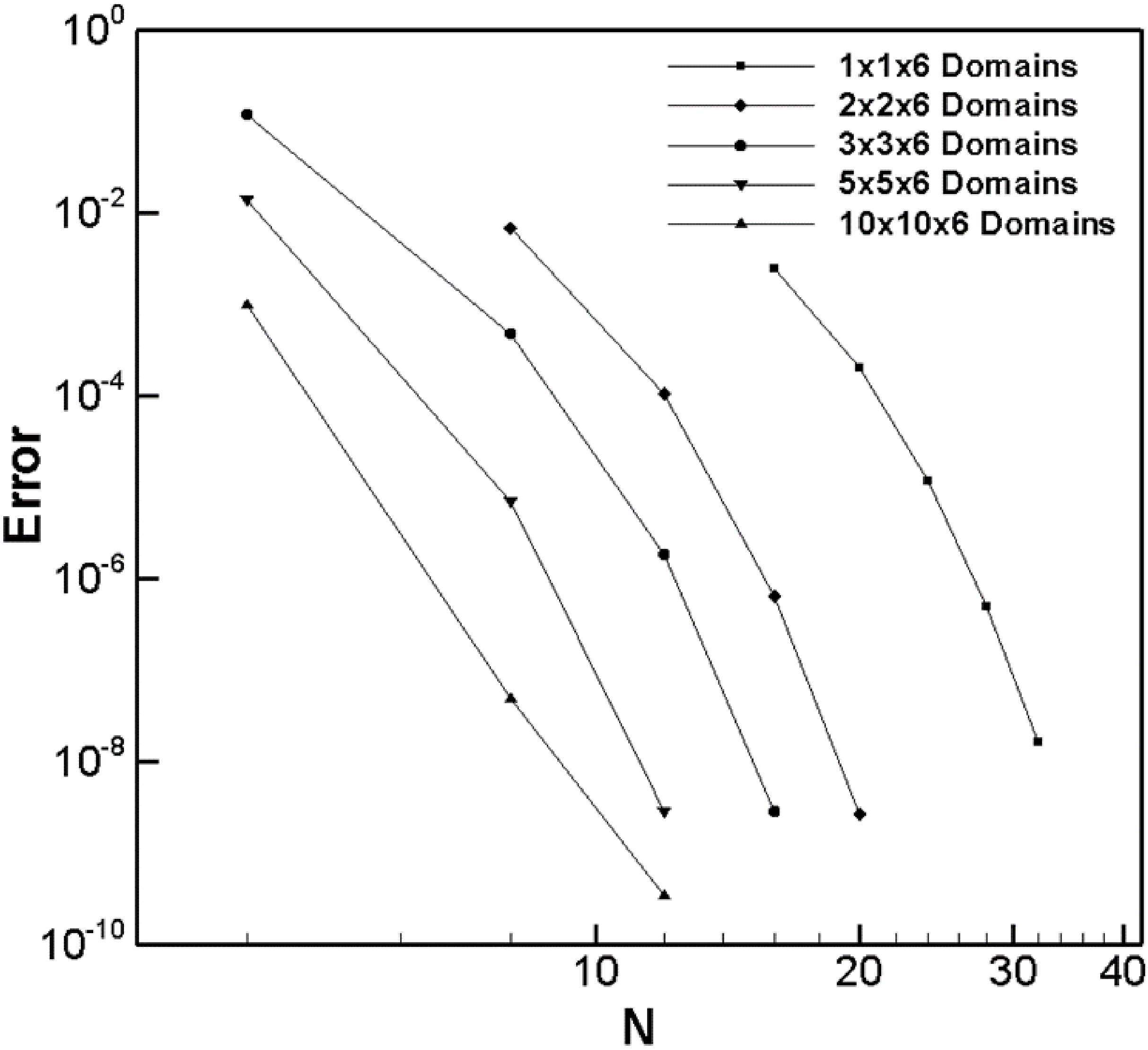

圖 3. 數值解在各種計算網格下，隨點數增加收斂的情形。

在本例中除了由 600 個子域網格所得的誤差遞減呈直線外，其餘的誤差遞減皆是曲線，且隨N值愈大曲線斜率越大，表示計算誤差是以指數收斂 (exponential convergence)，並且代表計算的主要誤差來自於空間的離散誤差。相對的，由 600 個子域網格的誤差遞減是近乎直線的情況，顯示誤差是以固定階數收斂 (fix order convergence)，亦表示空間離散的誤差遠小於時間離散的誤差，所以計算結果的收斂階數即是 Runge-Kutta 時間積分方法的收斂階數。

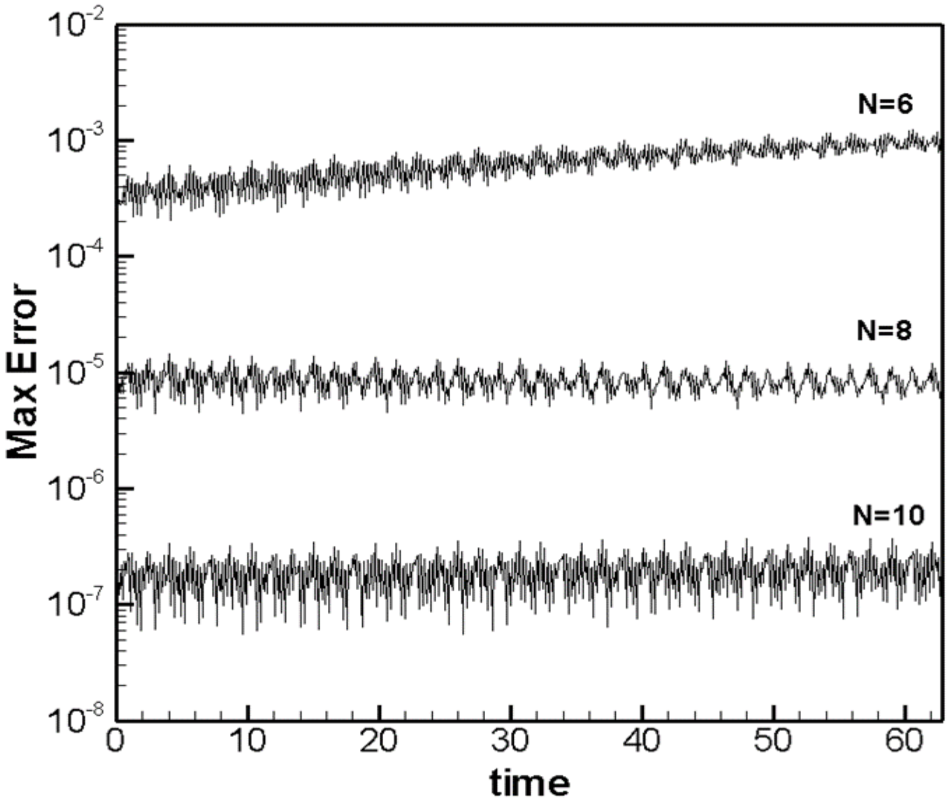

圖 4. 計算高度場h隨水平風場傳輸之誤差隨時間演變情形。計算時間總共 20 個週期。計算網格由 150 個子域構成，各子域的點數為。

第二個測試案例是用相同的初始h_0場，計算只有經向風場的傳輸：

$$U = u_0 \cos\theta,\ \ V = 0 \ \ 。$$

u_0為一常數。本測試因風場的特性，初始條件$h(\lambda,\theta,0) = h_0(\lambda,\theta)$即可用來求得$h$的解析解是：

$$h = h_0(\lambda - \frac{u \cdot t}{R}, \theta)$$

因此，我們可運用這個案例來了解計算過程中，任一時刻的數值解是否精確。我們以一個 150 個子域的網格來進行實驗，計算結果清楚呈現誤差皆很小，且隨網格點加密而下降 (圖 4)。

(B)淺水波方程之計算結果與討論

對於以上之計算格式，我們選用了 Williamson, Drake, Jakob and et al. 1992 (W92) 文獻中所提供的測試問題來驗證本研究的計算方法。

(i)第一測試案例:

球面上淺水波方程的穩態解為：

$$U = u_0(cos\alpha_0 \, cos\theta + sin\alpha_0 \, cos\lambda \, sin\theta),$$

$$V = -u_0 sin\alpha_0 sin\lambda,$$

$$gh = gh_0 - \frac{u_0}{2}(2\alpha\omega + u_0)(sin\theta \, cos\alpha_0 - cos\lambda \, cos\theta \, sin\alpha_0)^2 \text{。}$$

相關的參數可見於文獻 W92 和文獻 Nair, Thomas and Loft, 2005 中。針對這個問題我們做了一系列測試計算並將結果繪成圖。

我們運用不同的網格，計算解在 5 天時的場形並量測數值解的誤差。誤差收斂圖呈現於圖 5。由圖中可見對於任何網格，當各子域的點數$(N+1)\times(N+1)$增加時，誤差隨點數增加下降。呈現計算結果收斂的情形。另外我們也選用 150 個子域的網格取用不同的點數$N = 6, 8, 10$進行計算，並記錄高度場h，水平風場U和垂直風場V的誤差。圖 6 所呈現的即是計算的三個場之誤差-時間圖。由圖中可見於各誤差與時間關係皆隨點數增加下降。而誤差隨時間演變雖有增長，但僅是隨時間呈線性成長，仍是符合時間穩定條件 (time stable solution error at most grows linearly in time)。由以上的測試結果可確認計算格式的穩定性而程式碼的正確性。為完備起見我們提供計算得之 5 天的高度場提供參考(見圖 7)。

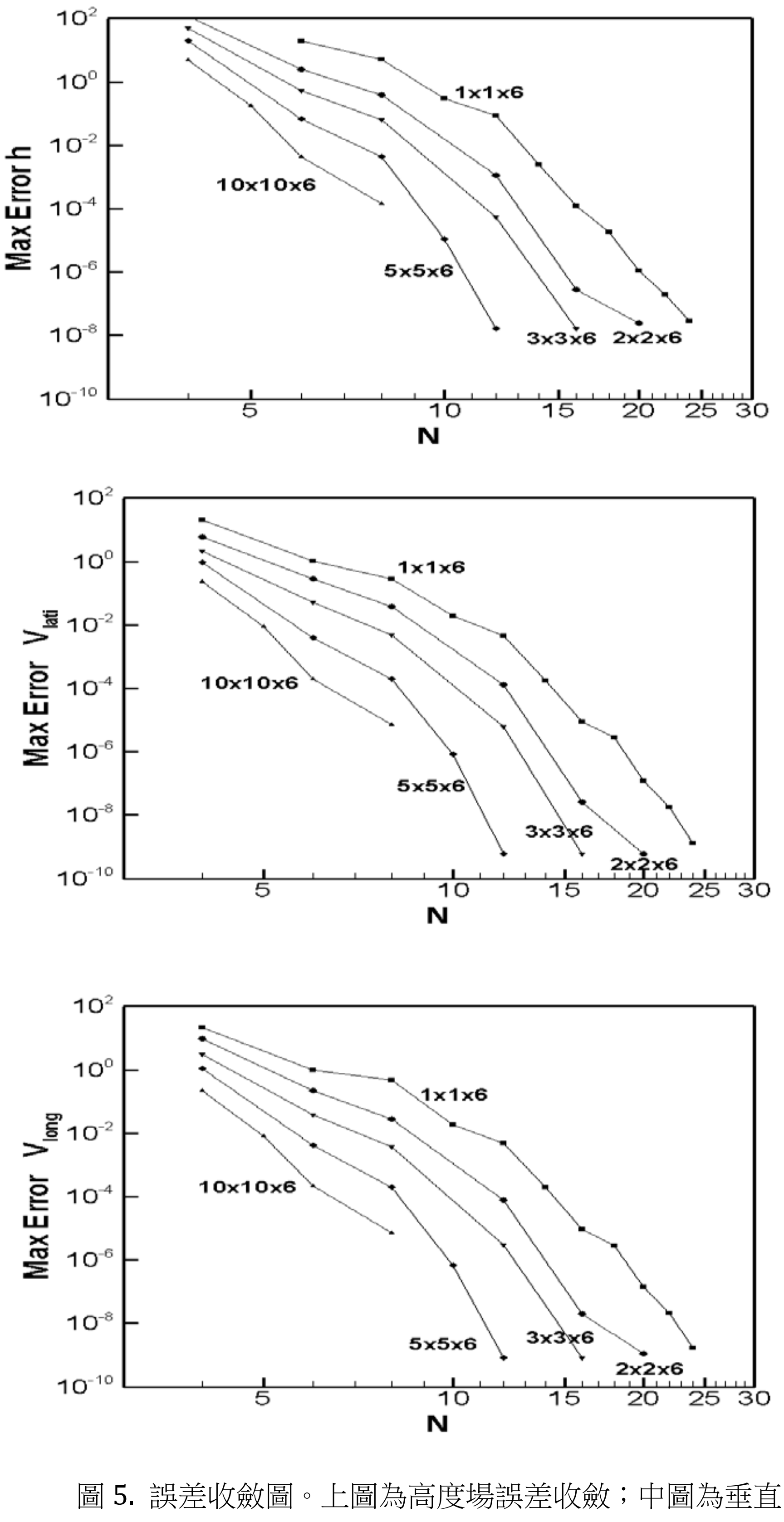

圖 5. 誤差收斂圖。上圖為高度場誤差收斂；中圖為垂直風場誤差收斂；下圖為水平風場上誤差收斂。

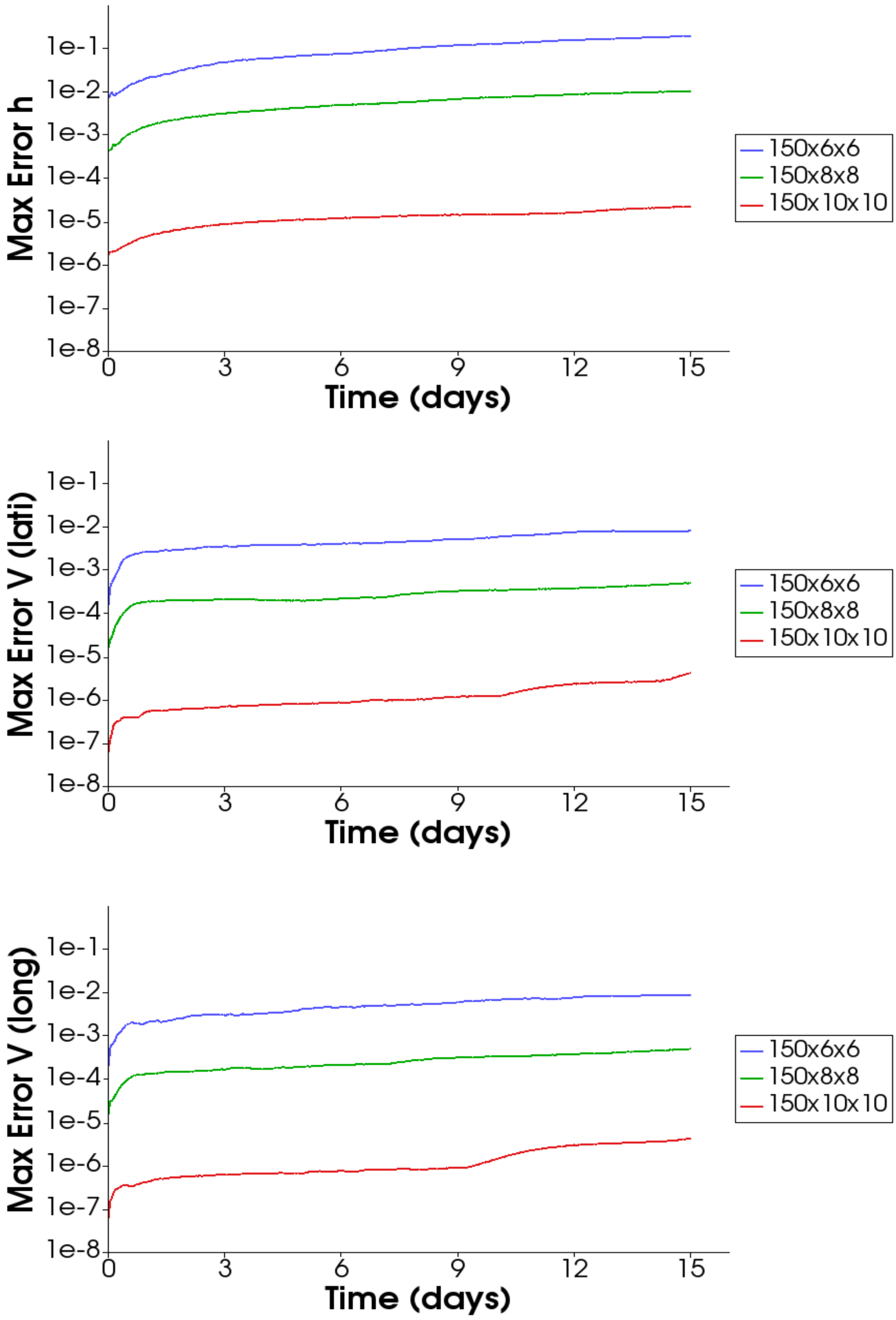

圖 6. 誤差-時間圖。上圖為高度場誤差時間關係；中圖為垂直風場上誤差時間關係；下圖為水平風場上誤差時間關係。

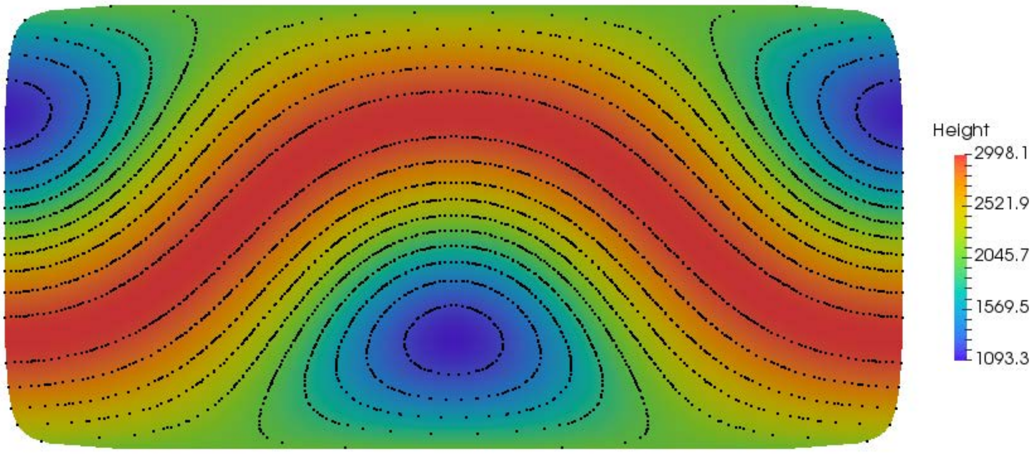

圖 7. 第 5 天計算所得之高度場

(ii)第二測試案例:

我們第二個測試案例為 W92 中一初始水平風場吹襲一孤立山之問題，相關測試參數可見於文獻 W92 和文獻 Nair, Thomas and Loft, 2005 中。

本案例雖無解析解可進行精確的誤差量測。但有許多相關文獻的計算結果可供比較。我們將高度場於 0 天、5 天和 15 天結果繪於圖 8(a)。可以發現計算結果於文獻 Nair, Thomas and Loft, 2005 和文獻 Gelb and Gleeson, 2001 所得結果是吻合的(見圖 8(b))。這也顯示了程式碼的正確性。

(iii)第三測試案例:

第三測試案例是文獻 W92 中的 Rossby-Haurwitz 波 (R.H.波) 的傳輸測試問題。

本案一如前一案例並無解析解可進行精確的誤差量測。但亦有相關文獻的計算結果可進行比較所是由本演算格式所得之結果。我們一樣發現所得結果(見圖 9(a))與文獻 Nair, Thomas and Loft, 2005 (DG 法) 或文獻 Gelb and Gleeson, 2001 傳統球面調和函數波譜法所得結果皆高度吻合(見圖 9(b))。這也再次顯示本程式有高度正確性。

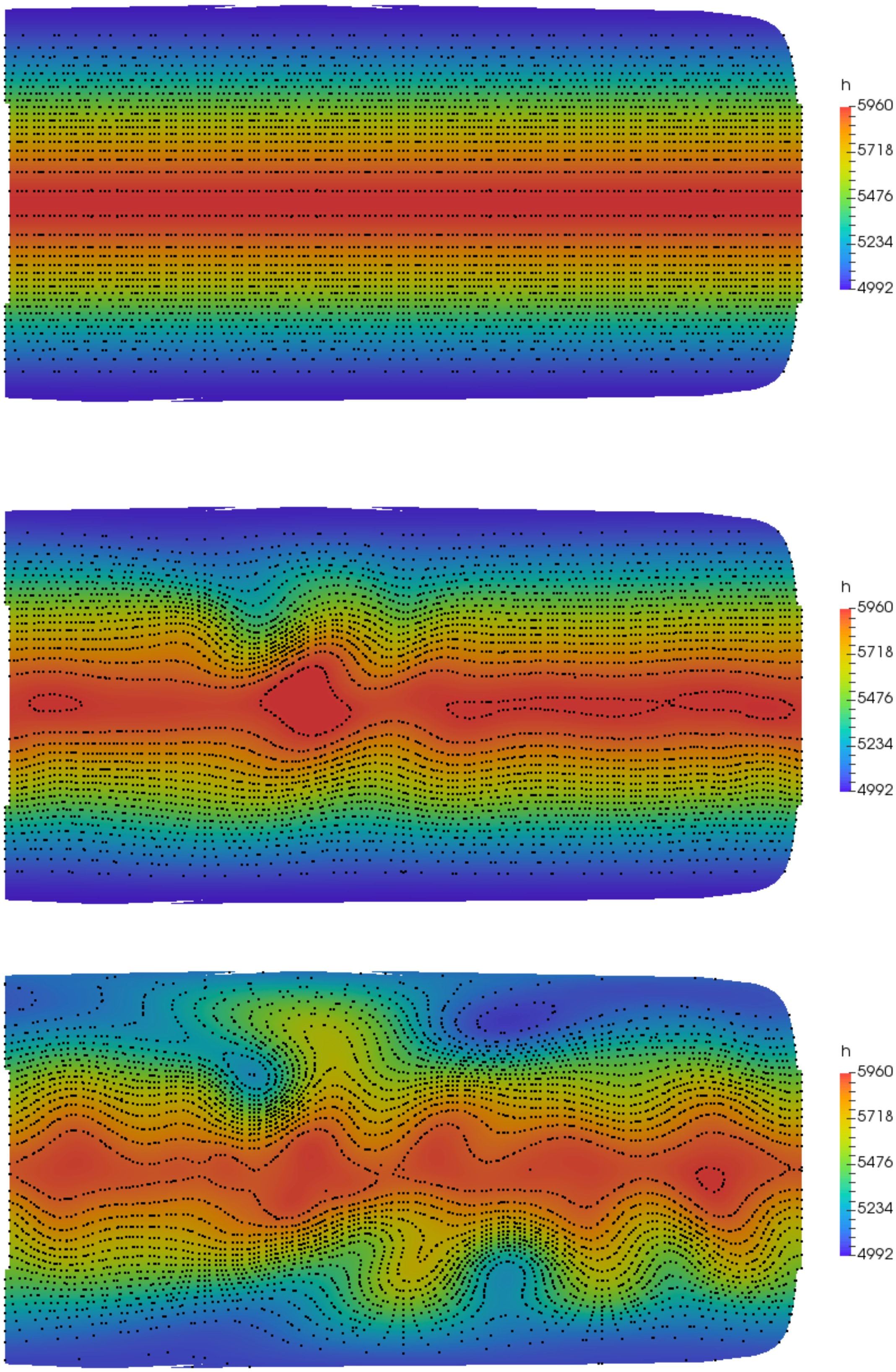

圖 8(a). 孤立山脈與氣流實驗。高度場於 0 天、5 天和 15 天結果。
上圖為 0 天之結果；中圖為 5 天結果；下圖為 15 天結果。

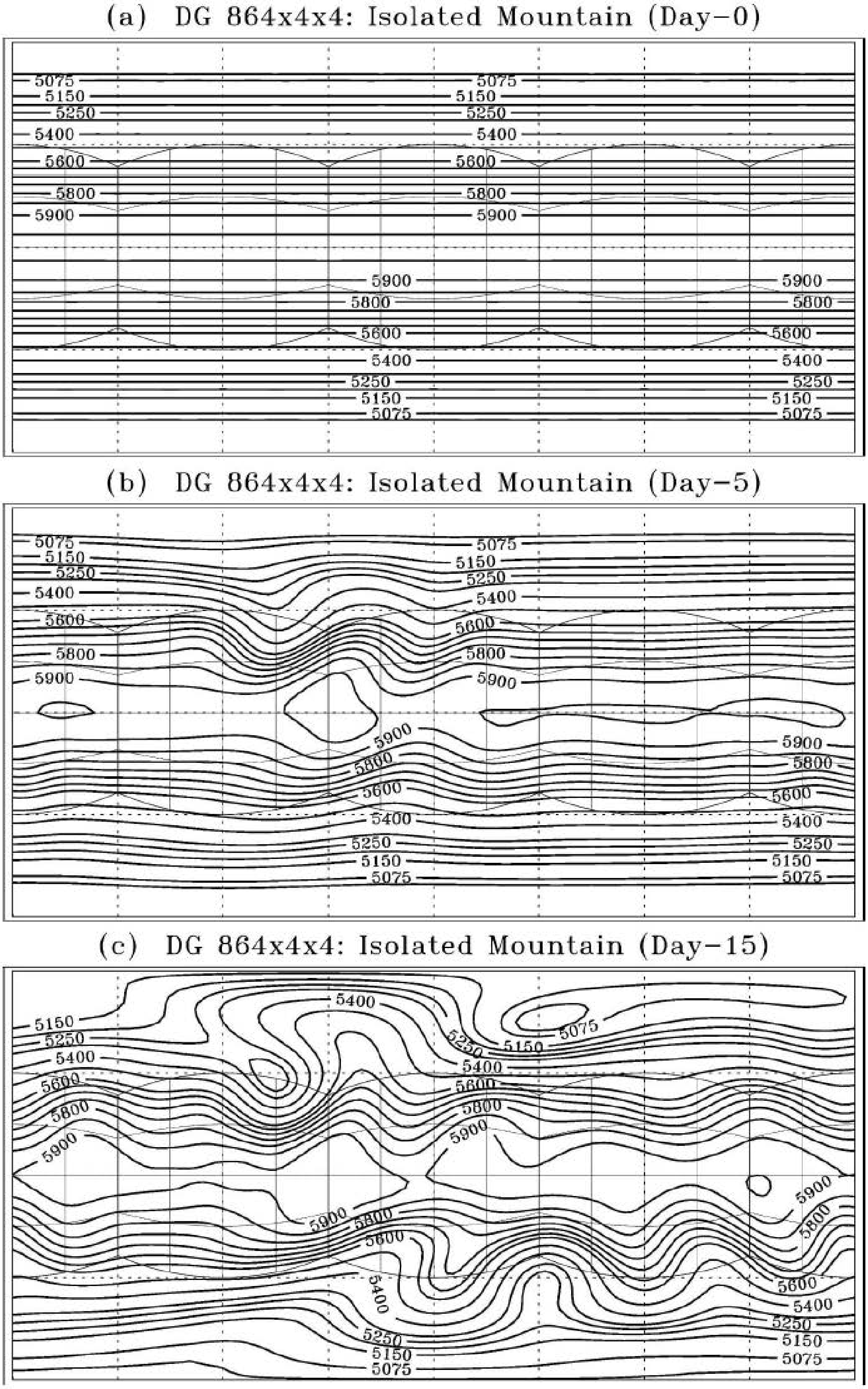

FIG. 4. Numerical solution of SW test case 5, zonal flow impinging a mountain, on an 864 × 4 × 4 grid. (a) The initial height and the numerical solution (height) after (b) 5 and (c) 15 days of integration.

圖 8(b). 孤立山脈與氣流實驗（Nair, Thomas and Loft, 2005）結果。高度場於 0 天、5 天和 15 天結果。上圖為 0 天之結果；中圖為 5 天結果；下圖為 15 天結果。

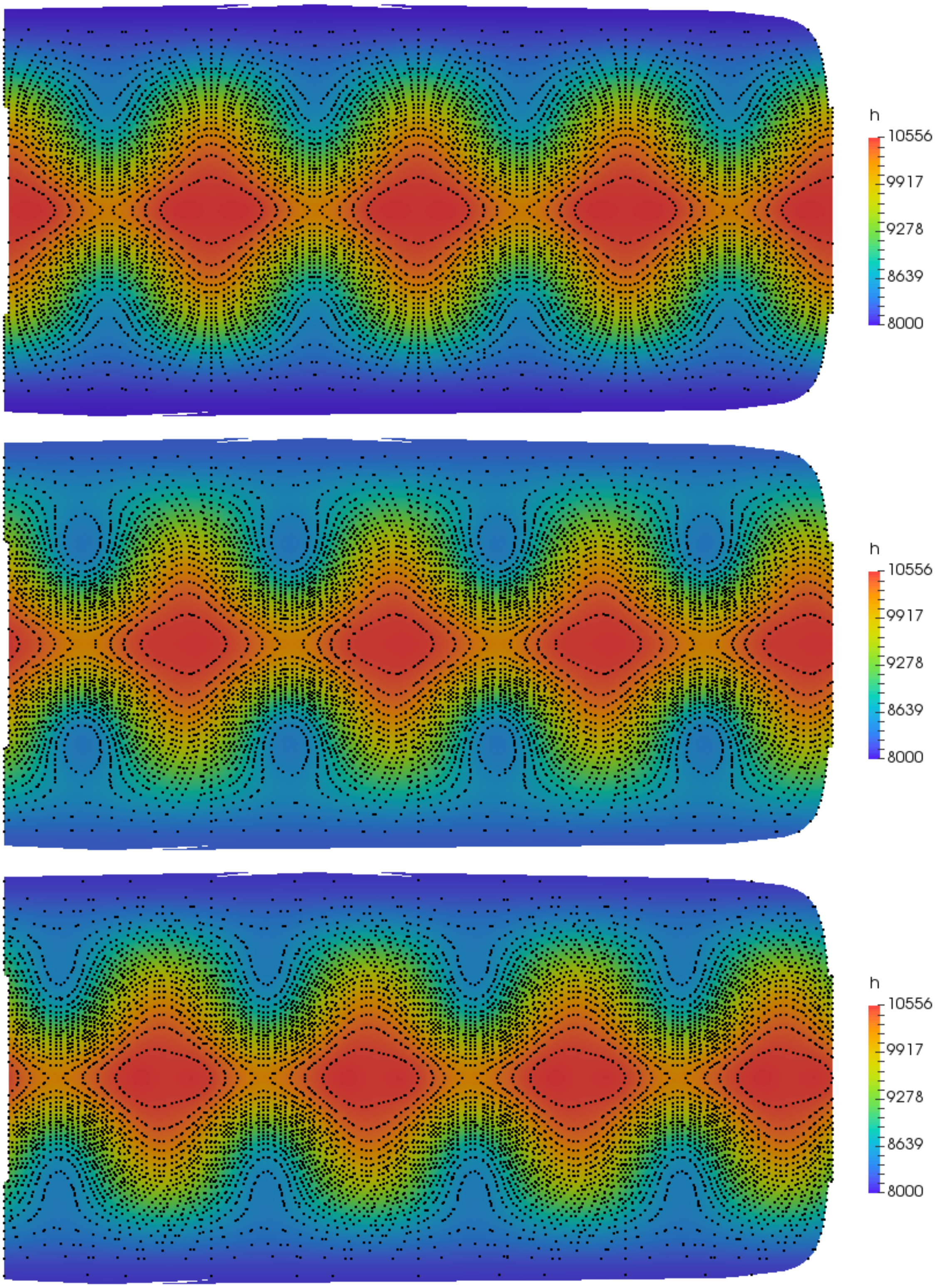

圖 9(a). R.H 波測試。高度場於 0 天、7 天和 14 天結果。上圖為 0 天之結果；中圖為 4 天結果；下圖為 14 天結果。

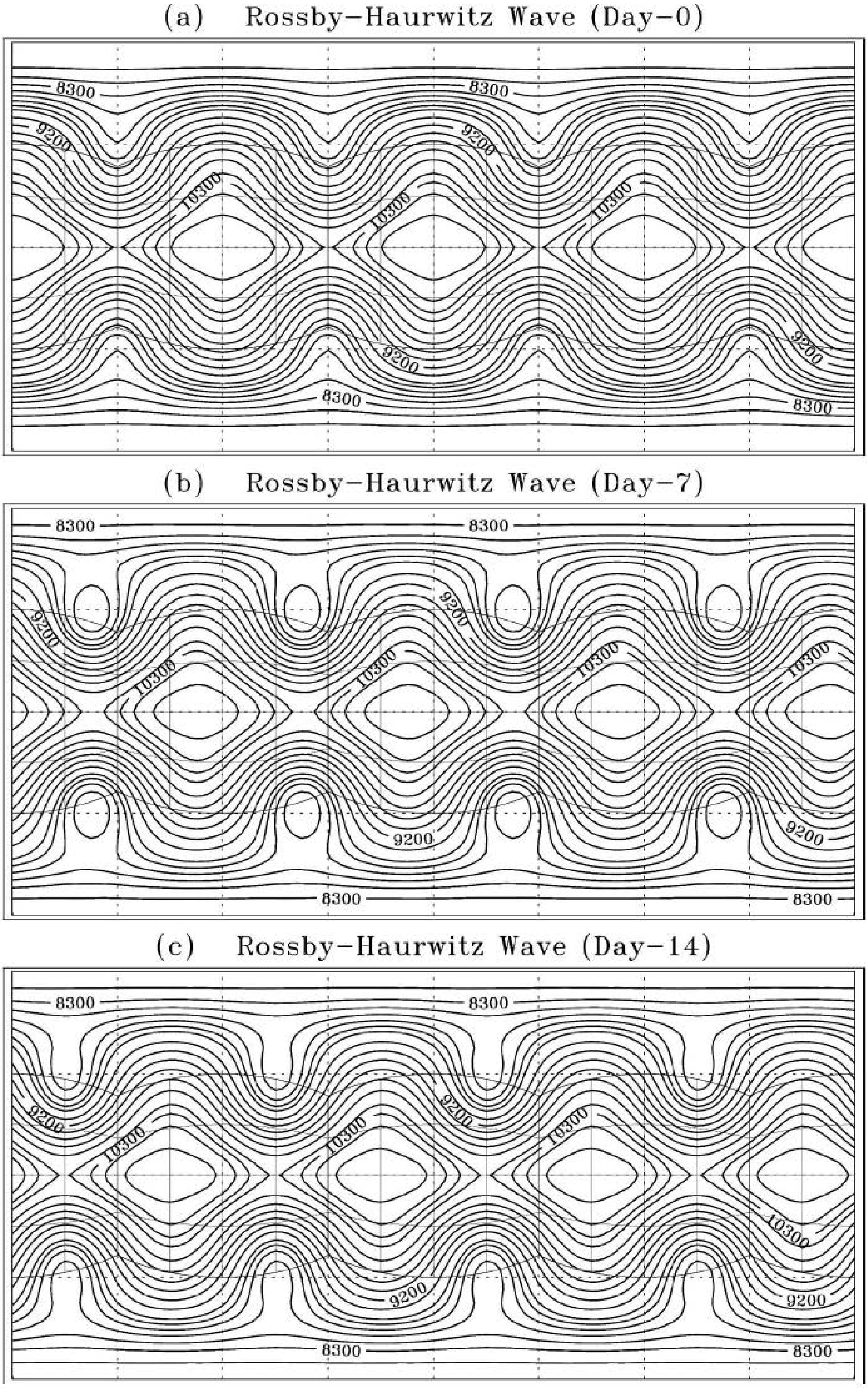

FIG. 7. Numerical results for SW test case 6 (Rossby–Haurwitz wave) on an 864 × 4 × 4 grid: (a) the initial height field and the simulated height fields at days (b) 7 and (c) 14, respectively.

圖 9(b). R.H 波測試。高度場於 0 天、7 天和 14 天結果。上圖為 0 天之結果；中圖為 4 天結果；下圖為 14 天結果。截圖自：Nair, Thomas and Loft, 2005 (DG 法)

(C)平行加速效能

多域計算格式可使用 OpenMP 多執行緒的方式來進行平行化之運算，執行加速的效能繪製於圖 10，我們可見計算結果在執行緒增加時確實達到加速。對於程式的平行化加速，我們現在僅就數值微分運算部分和時間積分部分進行多緒執行,至於邊界條件補償項的平行化我們尚未處理。然而由計算結果顯示,程式平行化的效能已有不錯的結果,若能將邊界項的處理再予以平行化，相信效能在執行緒大於 4 的情形下，執行效率還能再提升。

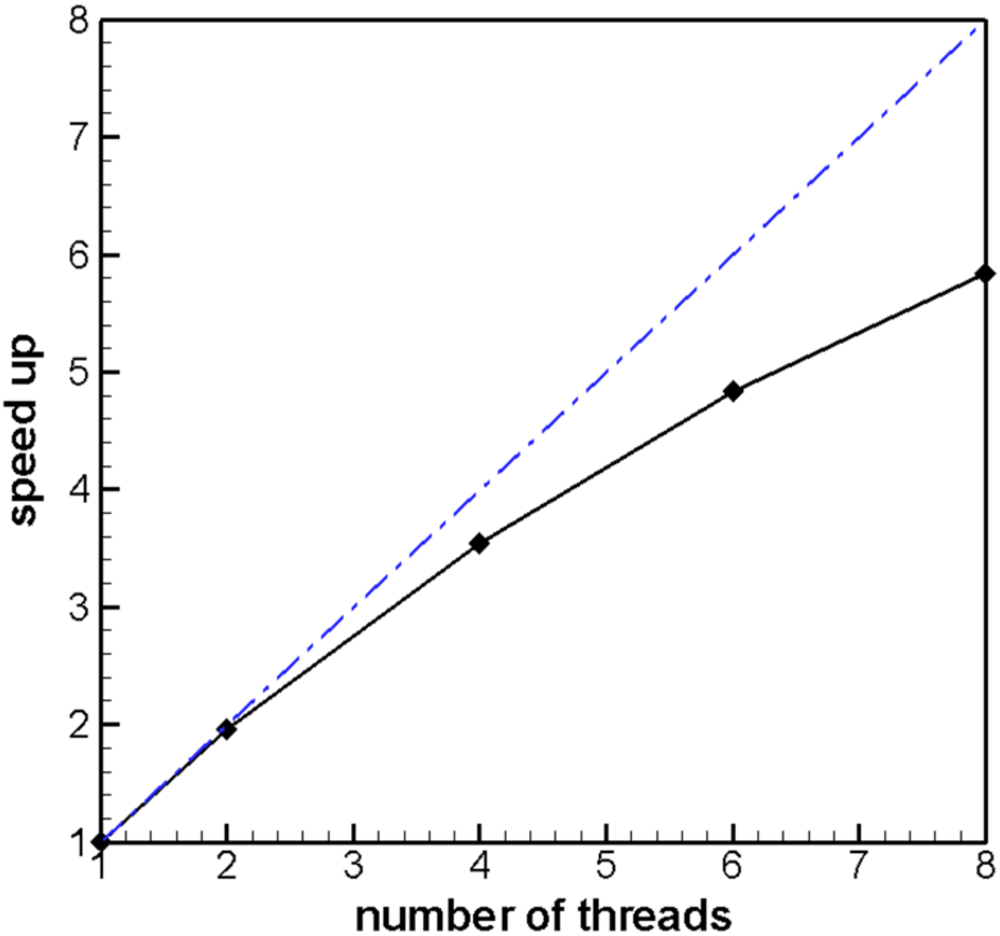

圖 10. 平行加速效能隨執行緒增加的情形

五、總結

本報告中我們介紹了以多域擬譜法計算球面上傳輸方程和淺水波方程的解。我們的網格是採用 cubed sphere 投影建構多域計算網格，並在各子域中針對偏微分方程建構一通用的擬譜計算格式。計算格式用 Fortran90 程式語言編程，經實際測試我們所得之數值解精確且收斂。程式平行計算的效能是以 OpenMP 多緒方式執行，數值實驗結果證明計算上確實提升效能。

參考文獻

Feng K. A., Teng C. H., Chen M. H., 2007: A pseudospectral penalty scheme for 2D isotropic elastic wave computations, J. Sci. Comput., Vol. 33, pp. 313-348.

Gelb A. and Gleeson J.P., 2001: Spectral Viscosity for Shallow Water Equations in Spherical Geometry, Monthly Weather Review, Vol. 129, pp. 2346-2360.

Gustafsson B., Kreiss H.-O., and, Oliger J., 1995: Time Dependent Problems and Difference Methods, John Wiley & Sons, INC..

Hesthaven J. S., 1998: A stable penalty method for the compressible Navier-Stokes equation: III Multidimensional domain decomposition schemes, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 20, pp. 62 – 93.

Hesthaven J. S., 2000: Spectral penalty methods, Applied. Numerical Mathematics, Vol. 33, pp. 23-41.

Hoskins B. J. and Simmons A. J., 1975: A multi-layer spectral model and the semi-implicit method, Quart. J. R. Met. Soc., Vol. 101, pp. 637-655.

Hesthaven J. S. and Warburton T., 2008: Nodal Discontinuous Galerkin Methods Algorithms, Analysis, and Applications, Springer.

Hesthaven J. S., Gottlieb S., and, Gottlieb D., 2007: Spectral Methods for Time-Dependent Problems, Cambridge University Press.

Kreiss H.-O. and Oliger J., 1975: Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations. Tellus, Vol. 24, pp. 199-215.

Nair D. R., Thomas S.J., Loft R. D., 2005: A discontinuous Galerkin transport scheme on the cubed sphere, Monthly Weather Review, Vol. 133, pp. 814-828.

Ritchie H., 1988: Application of the Semi-Langrangian Method to a Spectral Model of the Shallow Water Equations, Monthly Weather Review, Vol. 116, pp. 1587-1598.

Teng C. H., Lin B. Y., Chang H. C., Hsu H. C., Lin C. N., Feng K. A., 2008: A Legendre pseudospectral penalty scheme for solving time-domain Maxwell's equations, J. Sci. Comput., Vol. 36, pp. 351-390.

Williamson, D. L., J. B. Drake, J. Hack, R. Jakob, and P. N.Swartztrauber, 1992: A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry.
J. Comput. Phys., 102, 211 – 224.