以離散小波轉換建立「MM5」模式中 INTERPF 之多重解析插值數值模式

黃德豐
龍華科技大學電機系助理教授
桃園縣 33306 龜山鄉萬壽路一段 300 號
dfhuang@mail.lhu.edu.tw

摘要

MM5 模組中之 INTERPF 模組為輸入由 REGRID, 及 LITTLE_R/RAWINS 等程式之資料，經由線性內插轉換為垂直σ座標後所產生的中尺度模型資料，側邊界條件等數據。本文將發展以離散小波轉換（discrete wavelet transform）為基礎之等價 INTERPF 理論，利用其多重解析度（multi-resolution）之特性，可以得到在不同解析度下之插值資料，其優點為在初期模擬時可用較低解析度觀察並修正模型；當需要高解析度時，可以近似頻域理想插值的方式得到較精密的數據。另外，離散小波轉換之計算可輕易地由複變率濾波器組（multi-rate filter bank）實作其平行結構。

關鍵詞：離散小波轉換、多重解析度、插值、INTERPF。

Abstract

The module INTERPF interpolates pressure-level data from either RAWINS or REGRID/DATAGRID to model's sigma coordinate. The main interpolation method is by linear interpolation. Based in the discrete wavelet transform, an equivalent function for interpolating the vertical data is developed in this paper. With the characteristic of multi-resolution, a coarse scale can be obtained in the beginning to modify the model and fine scale can be interpolated when high resolution is needed. Beside, the equivalent parallelized multi-rate filter bank can be implemented.

Keywords: discrete wavelet transform, multi-resolution, interpolation, INTERPF

1. 簡介

中尺度氣象學是研究中尺度天氣系統與其相關聯繫的嚴重災害性天氣發生發展原因和預報的學問，其中由MM5（The Fifth-Generation NCAR / Penn State Mesoscale Model）第五代 NCAR / Penn State 中尺度模型。

MM5之發展約在1970年代早期開始，並因其是自由軟體（freeware）且其計算架構除可在共享記憶體的平行電腦（如 Cray EL, Cray J90, Cray YMP, HP-SPP2000, SGI, SUN 及 DEC Alpha）和分散式記憶體的平行電腦[1]（如IBM RISC 6000 cluster, IBM SP2, Cray T3E, SGI Origin 2000, HP-SPP2000 及 Fujitsu VPP）執行外，更可適用如Cray, SGI, IBM, DEC, Sun, HP等公司之工作站及個人電腦Linux環境下執行，因此被廣泛使用。

隨著科技的發展與對大氣現象觀察所增進的知識，該系統迄今已有許多變革與增益，包括物理特性，系統動態特性等；亦已協助許多學術單位及氣象單位從事天候之預測與對氣象之了解。國內亦有許多研究與報告即以MM5程式為工具以協助研究台灣相關的氣象。

本文提出一種以離散小波（discrete wavelet transform）為基礎之插值理論，以其多重解析度之特性及簡單易實作之結構提出推廣MM5中INTERPF模組的理論架構。第2節為INTERPF模組簡介，第3節為小波轉換介紹，第4節為小波插值，第5節為等價小波濾波器組模組及與實際多重解析度於INTERPF插值資料之關係。

2. INTERPF 模組簡介[2]

撰寫INTERPF之程式語言為Fortran 90，主要功能為由壓力層資料以垂直方向插值到MM5模型的σ座標系統。主要是來自由REGRID或LITTLE_R/ RAWINS程式所的到的一維資料，輸入之形式為REGRID_DOMAINn，RAWINS_DOAMINn，或 LITTLE_R_DOMAINn （$n=1,2,3$ 等），由其個別輸入檔的定義域, INTERPF將產生該定義域相關之輸出檔，如MMINPUT_DOMAIN1, BDYOUT_DOMAIN1, LOWBDY_DOMAIN1。主要的執行副程式為hrdro_interp模組中的 intdrvr副程式，功能為其關係見圖1。

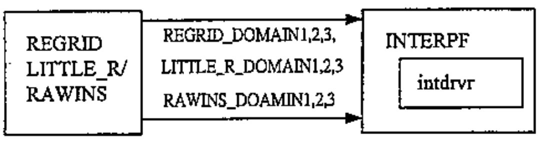

圖 1. 輸入到 INTERPF 之資料型態關係

INTERPF 中亦已設計各種物理特性的選項（如 cloud, rain, snow, ice, 等），但是如 snow 與 ice 是目前台灣較少出現的物理特性，因此應該先針對修改或加強其程式以使其能應用於台灣的特性。另外

1. INTERPB 為 INTERPF 之反函數，即由 MM5 模型的σ座標系統垂直插值到壓力層資料。
2. 使用INTERPF計算MM5模型中的數據，至少需要24小時的數據。例如需要12小時間隔的資料，至少需要一組0 Z及一組12 Z的數據以計算；例如需要3小時間隔的資料，至少需要一組0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 Z的數據以計算。
2. 當需要算多重域時，僅需修改 namelist.input 為適當的檔案即可。

3. 小波轉換[3]

通常能量有限的函數所形成的空間以

$$L^2(\mathrm{R})=\left\{f \mid \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt<\infty\right\}$$

表示。當V_0為起始空間由尺度函數(scaling function)$\varphi(t-k)$所生成(span，線性組合)時，即

$$\begin{aligned} V_0 &= \overline{\underset{k\in R}{span}\{\varphi(t-k)\}} \\ &= \overline{\{\sum a_k \varphi(t-k) \mid k\in R\}} \end{aligned}$$

如果W_0為V_0在V_1中的正交補集合而且基底為

$$\psi(t)=\sum_n h_1(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n) \quad (1)$$

其中$h_1(n)$通常滿足$h_1(n)=(-1)^n h(1-n)$。

事實上$L^2(R)$可寫成$W_0,W_1,\cdots,W_N$的直和 [4]（direct sum），即

$$L^2(R)=V_0\oplus W_0\oplus W_1\cdots\oplus W_N$$

其關係可參考圖 2 或如圖 3 之多重解析空間關係。

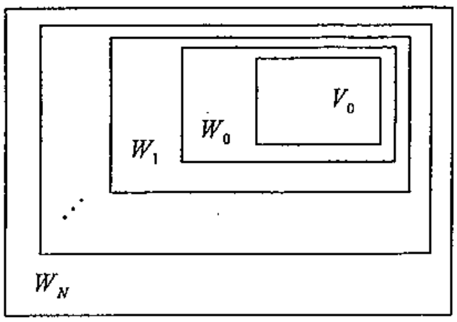

圖 2. 多重解析小波向量空間

$$
\begin{aligned}
&L^2(R) = \\
&\boxed{V_0 \oplus W_0} \oplus W_1 \oplus W_2 \cdots \oplus W_N \\
&\quad\downarrow \\
&\quad \boxed{V_1 \oplus W_1} \oplus W_2 \cdots \oplus W_N \\
&\qquad\quad\downarrow \\
&\qquad\quad \boxed{V_2 \oplus W_2} \oplus W_3 \cdots \oplus W_N
\end{aligned}
$$

圖 3. 多重解析空間關係

由圖 2 及圖 3 可知，下標的數字越大表示空間越大或者所謂的解析度越高，因此對於一函數 $f(t)$ 以離散小波為基礎之插值理論即為將其在較小之空間（例如 V_j）的表示式求出解析度較高之表示式（任意 V_{j+K} ，$K \in \mathrm{N}$）。欲推導出其關係，僅需找出基底間的相互關係即可。所以當任一函數 $\varphi(t) \in V_0$ 時，$\varphi(2t) \in V_1$，且其間的關係為

$$\varphi(t) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n) \quad (2)$$

其中 $h(n)$ 為尺度函數係數，$\sqrt{2}$ 主要是為了保持常規化。因此，若令

$$V_j = \overline{\underset{k}{span}\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j t - k)\}} ,$$

則可得到

$$\varphi(2^j t - k) = \sum_m h(m-2k)\sqrt{2}\varphi(2^{j+1}t-k) \quad (3)$$

上式表示可以由 $\varphi(2^{j+1}t-k)$ 表示 $\varphi(2^j t-k)$。另外，當 $f(t) \in V_{j+1}$，則

$$f(t) = \sum_k c_{j+1}(k) 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1}t-k) \quad (4)$$

表示函數 $f(t)$ 可以由 $c_{j+1}(k)$ 的係數完全表示。當 $\varphi_{j,k}(t)$ 和 $\psi_{j,k}(t)$ 為正規垂直時，第 j 級的尺度係數可由下式求得

$$
\begin{aligned}
c_j(k) &= \langle f(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle \\
&\overset{\Delta}{=} \int f(t) 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) dt
\end{aligned} \quad (5)
$$

將（3）代入上式整理可得 $c_j(k)$ 與 $d_j(k)$ 的關係如下

$$c_j(k) = \sum_m h(m-2k) c_{j+1}(m) \quad (6)$$

及

$$d_j(k) = \sum_m h_1(m-2k) c_{j+1}(m) \quad (7)$$

亦即每一個相鄰解析度的係數關係。

4. 小波插值

假設欲得到的插值函數為

$$f(t) = \sum_k c_{j+1}(k) 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1}t-k) \quad (8)$$

或另一種表示方式為

$$
\begin{aligned}
f(t) = &\sum_k c_j(k) 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) + \\
&\sum_k d_j(k) 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k)
\end{aligned} \quad (9)
$$

其中 $d_j(k)$ 為小波係數。將（1），（2）代換入上式可得到

$$
\begin{aligned}
&f(t) = \\
&\sum_k c_j(k) \sum_n h(n) 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1}t - 2k - n) 2^{\frac{j}{2}} \\
&+\sum_k d_j(k) \sum_n h_1(n) 2^{\frac{j+1}{2}} \psi(2^{j+1}t - 2k - n)
\end{aligned} \quad (10)
$$

經過整理可得到

$$
\begin{aligned}
c_{j+1}(k) = &\sum_m c_j(m) h(k-2m) \\
&+\sum_m d_j(m) h_1(k-2m)
\end{aligned} \quad (11)
$$

5. 等價小波濾波器組模組

由於複取樣率濾波器組（multi-rate filter bank）可以直接實作小波轉換各尺度間之係數關係，因此在處理插值問題的(6)及(7)可以用圖 4 和圖 5 之等價結構處理其計算。圖中2↓和2↑分別表示每兩相鄰數據捨棄一個值及每兩個相鄰數據中間補入一個 0。

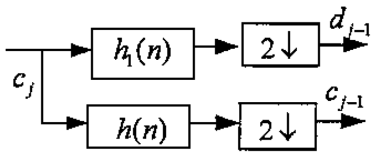

圖 4. 由高解析度數據求出低一層解析度之濾波器組結構

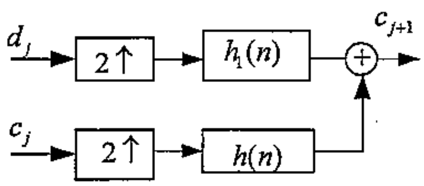

圖 5. 由低解析度數據求出高一層解析度之濾波器組結構（插值）

當需要更高解析度時，可以重複圖 5 之結構而形成 4 倍之插值功能（如圖 6）。如果圖 5 之結構為軟體模組之形式，其概念即為重複呼叫 2 次即可得到所需之解析度。圖 7 為圖 6 系統插值後所得到數據之概念圖。

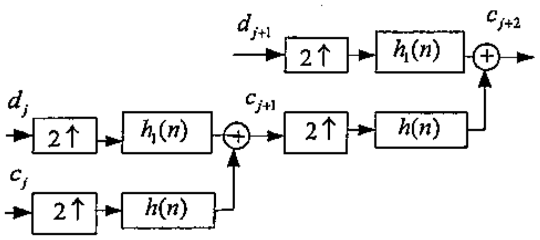

圖 6. 具 4 倍插值功能之結構

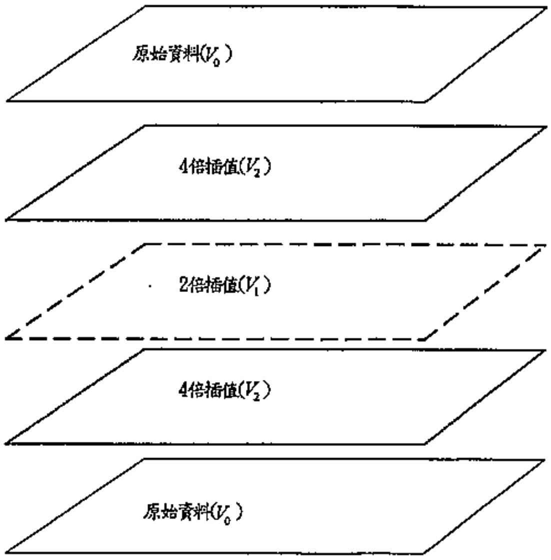

圖 7. 經圖 6 系統後所的數據之概念圖

當需要各種不同尺度高解析度之資料時，可經由如圖 8 之系統得到所需解析度的資料。

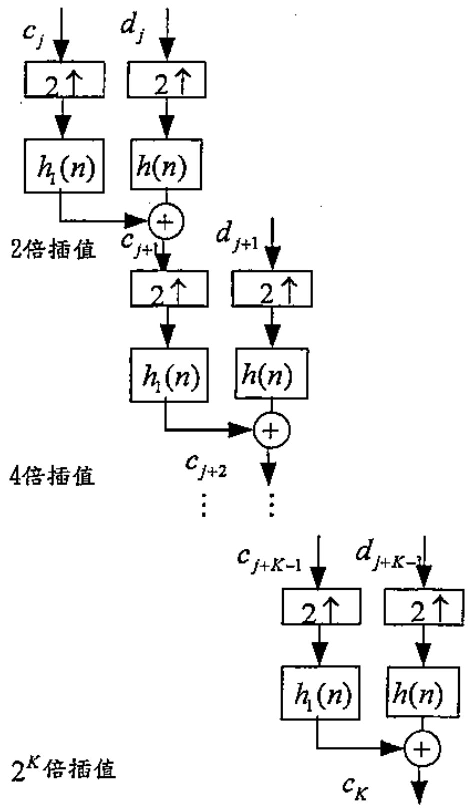

圖 8. 每層增加 2 倍解析度之差值系統結構

5. 結論

本文以離散小波為基礎，介紹可用於MM5 程式中的垂直插值理論，其目的為希望以小波轉換的不同解析度觀點提供INTERPF 模組等價但彈性更大的模組設計思考，雖然此時未能發展出相容的模組供學界先進測試，但希望能為國內氣象科學的發展提出一個能自行發展計算模式的方向。也許國內應能發展適合台灣本身的天氣預測程式，因此不揣簡陋，希望由簡單之 INTERPF 開始建立屬於台灣本土之天氣預測程式。

6. 參考文獻

1. PSU/NCAR Mesoscale Modeling System- Tutorial Class Notes and User Guide: MM5 Modeling System Version 3, Mesoscale and Microscale Meteorology Division, National Center for Atmospheric Research, August 2003.
2. VERSION 3 INTERPF PROGRAM (release 3-6, Updated December 19, 2002).
3. C. Sidney Burrus, Bamesh A. Gopinath and Haitao Guo, Introduction to wavelets and wavelet transforms- a primer, Prentice-Hall, 1998.
4. Erwin Kreyszig, ntroduction to functional analysis with applications New York, Wiley , 1978.