

数值天气预报中存在的某些问题

—关于P—坐标系的非正交性和大气状态方程的逼近问题

王跃山

国家海洋环境预报中心

地址:北京 100081, 海淀区大慧寺 8 号

电话:(宅)010-68471461 (办)010-62173322 转 148

email:wys@axp.nmefc.gov.cn

传真:010-62173620

摘 要

对数值天气预报中的某些问题, 比如 P—坐标系的非正交性和大气状态方程的逼近问题, 笔者从完全不同的角度(比如统计物理的角度)进行了分析。对其中的有些问题提出了自己的建议。

关键词: 数值天气预报的问题, P—坐标系的非正交性, 大气的状态方程。

引 言

1910 年数学家 Lewis Fry Richardson 作了世界上第一个数值天气预报的数值试验 [1], 在试验中他采用了准静力近似 [2]。遗憾的是, 试验以失败而告终。失败的原因可以归为以下几个: 第一, 缺乏资料。当时他完全没有高空资料, 只有一些地面资料; 第二, 观测资料误差太大; 第三, 他直接从运动方程计算加速度, 这实际上是求地球偏向力和气压梯度力两个大量之间的小差, 是不可能求准的; 第四, 他所使用的预报方程中包含着大气的快过程: 声波和重力波, 这是干扰他的预报结果的气象“燥音”, 应当在计算之前把它们从方程中过滤掉。

Richardson 的试验虽然失败了, 但他的垂直运动方程却永远留给了动力气象学。另外, 只要比较一下他的模式和 60 年代美国国家气象中心的业务模式就不难发现, 在本质的特征上它们并无什么差别, 甚至连模式的垂直、水平分辨率都是相似的。其实, 他的试验的意义远不仅如此, 后人通过分析他的失败, 可以从中吸取教训, 绕过暗礁, 让数值预报早日获得成功。

Richardson 的试验结果发表于 1922 年。25 年以后, Charney Fjortoft 和 von Neumann 使用实际观测资料, 在世界上刚刚诞生的电子计算机上作出了世界上第一次成功的数值预报, 500mb 高度场的 36 小时预报和实况的相关系数达到了 0.75。

这以后, 数值天气预报取得了迅速的进展 [3]。1966 年以前, 研究和业务使用的模式主要是地转模式, 其后主要是原始方程模式。在数值预报发展

的前 30 年, 研究主要集中在短期天气预报上, 中期数值预报是从 1979 年开始的。此外, 中尺度数值天气预报和长期数值天气预报近年来都取得了较大的进展。

当然, 随着研究和业务工作的深入发展, 数值天气预报中存在的问题也在不断地被发现。人类科学就是在这种不断发现问题、不断解决问题的过程中一天天发展起来的。笔者在这里所提及的几个问题, 有的尚未被人注意, 有的虽被注意却并未引起重视, 有的则是老生常谈。笔者在这里试图从不同的视角重新审视它们, 以期引起人们对这些问题的关注和讨论。

1. 关于 (x, y, p, t) 坐标系的正交性

在气象上, (x, y, z, t) 是一种常用的坐标系, 它是正交坐标系。对于地球上任一点 $M(x, y, z)$, z 的正向是自地球球心射向球面上 M 点的射线所指的方向, 其零点一般取在地球的海平面; x 轴和 y 轴位于过 z 轴零点的地球的切面上, 通常取 x 轴的正向向东, y 轴的正向向北。在视地球为球形的假定下, (x, y, z, t) 显然是正交坐标系, 而且是右旋系。

在气象上还有另外一种坐标系, 那就是 (x, y, p, t) 坐标系, p 指气压。由于该坐标系和 (x, y, z, t) 相比, 只是用 p 代替了 z , 所以常简称其为 p —坐标系。相应地, 称 (x, y, z, t) 坐标系为 z —坐标系。

p —坐标系是在垂直准静力平衡

$$\frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial z} = -g\rho \quad (1)$$

的假定下引入的。在大气中, 除了 $z \rightarrow \infty$ 处, 总有 $\rho > 0$, 所以总有 $\partial p / \partial z < 0$ 。换句话说, 在大气中, 在 x, y 和 t 不变的条件下, p 随 z 的变化是单调递减的。这意味着, 在 x, y 和 t 不变的条件下, p 和 z 之间存在着——对应的关系。这里我要强调的是“ x, y, t 不变”这个条件。若我们令新引进的坐标系变量为 x^*, y^*, p, t^* , 则该条件即为 $x^*=x, y^*=y, t^*=t$ 。只有在这种关系下, 才有 p 和 z 之间的——对应。于是我们得到了新旧坐标之间的变换关系:

$$\begin{cases} x^*=x \\ y^*=y \\ p=p(x, y, z, t) \\ t^*=t \end{cases} \quad (*)$$

这就形成了 (x, y, p, t) 坐标系。

(x, y, p, t) 不是正交坐标系。因为在大气中的任一点, p 轴和 z 轴并不平行。或者说, p 的梯度 ∇p 和 z 的梯度 ∇z 之间的矢积

$$\nabla p \times \nabla z \neq 0 \quad (2)$$

这是很显然的。实际上, (1) 式只能保证 p

随 z 单调递减, 它不能保证 p 轴和 z 轴之间是平行的。也许有人认为

$$\nabla p \times \nabla z \approx 0 \quad (3)$$

现在我们先不妨看一看 (3) 式能否成立。根据定义我们有

$$\nabla p = \partial p / \partial x \mathbf{i} + \partial p / \partial y \mathbf{j} + \partial p / \partial z \mathbf{k} \quad (4)$$

其中, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别是 x 轴、 y 轴和 z 轴的单位向量。还有

$$\nabla z = \mathbf{k} \quad (5)$$

于是我们可以看到

$$\nabla p \times \nabla z = \partial p / \partial y \mathbf{i} - \partial p / \partial x \mathbf{j} \quad (6)$$

即使在准静力的近似下, 也不能保证 $\partial p / \partial y \approx 0$, $\partial p / \partial x \approx 0$, 更不能保证 $\partial p / \partial y \approx \partial p / \partial x$, 所以 (3) 式不可能成立。其实只要看一下数值预报中一个很重要的量—垂直速度 ω

$$\omega = dp/dt = \partial p / \partial t + u \partial p / \partial x + v \partial p / \partial y + w \partial p / \partial z \quad (7)$$

从中可知, $\partial p / \partial x$ 和 $\partial p / \partial y$ 是不能忽略的。所以说, 在数值预报中不能按 (3) 式作近似处理。虽然如此, 但对于大尺度运动来说, 在一般情况下 p 轴和 z 轴的夹角是很小的。这个事实说明, 即使把 (x, y, p, t) 看成正交坐标系, 其错误亦不至于使数值预报结果产生明显的荒谬。从这个角度思考问题, 倒不如 (x, y, p, t) 离正交坐标系更远一些, 因为在这种情况下其正交性可以容易地从数值预报的结果来判断。

对于使用 p -坐标系, 笔者有三点建议: 第一, 在构造动力系统的时候, 最好把控制方程组首先写在 z -坐标系内, 然后利用坐标变换关系将控制方程逐一地变换到 p -坐标系内。第二, 许多数学规律 (比如场论中的许多公式) 都是基于曲线正交坐标系推导出来的, 因此不要冒然地直接在 p -坐标系内引用。最好先在 z -坐标系内引进, 然后利用坐标变换关系转换到 p -坐标系内。第三, 要审慎地推导或选用从 z -坐标系到 p -坐标系的变换关系。在有些专著中, 推导变换关系时依据的前提条件是 p 和 x, y 两两正交, 但并没有给出正交性的证明; 在有些专著中虽没有利用正交性, 但其推导中仍存在着交代不清甚至是错误的问题。这些都是我们在研读文献中应当小心的。现在我们先不妨以哈廷纳 (1975) 的《数值天气预报》[4] 为例, 看看他的推导中究竟存在着什么问题。为此, 我们摘引其中有关的一段:

现在, 设 $\epsilon(x, y, \sigma, t)$ 是 ϵ 在 σ -坐标系中的函数形式, $\epsilon'(x, y, z, t)$ 是 ϵ 在普通的笛卡尔坐标系中的函数形式, 于是有

$$\epsilon(x, y, \sigma, t) \equiv \epsilon'[x, y, z(x, y, \sigma, t), t] \quad (8)$$

随即有

$$(\partial \epsilon / \partial x)_{x, y, \sigma, t} = (\partial \epsilon' / \partial x)_{x, y, t}$$

$$+ (\partial \epsilon' / \partial z)_{x, y, t} (\partial z / \partial x)_{y, \sigma, t} \quad (9)$$

对 y 和 t 也有同样的表达式, 而在垂直方向上有

$$\partial \epsilon / \partial \sigma = (\partial \epsilon' / \partial z) (\partial z / \partial \sigma) \quad (10)$$

应用前面的结果, 不难证明下面的关系式是成立的:

$$\nabla_{\sigma} \epsilon = \nabla \epsilon + \partial \epsilon / \partial z \nabla_{\sigma} z \quad (11)$$

和

$$\nabla_{\sigma} \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} + \partial V / \partial z \cdot \nabla_{\sigma} z \quad (12)$$

其中 ∇_{σ} 是表示在 σ 为常数的面上的二维 ∇ 算子。摘引完毕。在该摘引中, 为了说明的方便, 我们用 (8) — (12) 作为文中公式的序号, 而不用原书中的序号。此外, 将原译文中“其中下标 σ 是表示在 σ 为常数的面上的二维算子”作了修改, 改正了笔误。

现在我们看第 (8) 式右端项 $\epsilon'[x, y, z(x, y, \sigma, t), t]$ 的来历和含义。我们知道 $\sigma = \sigma(x, y, z, t)$, 从中可以解出 $z = z(x, y, \sigma, t)$ 。将其代入 $\epsilon'[x, y, z, t]$ 中即可得到该右端项。这里我要指出的是, 代入前后 $\epsilon'[x, y, z, t]$ 和 z 的含义都发生了变化。代入前, z 是独立变量, $\epsilon'[x, y, z, t]$ 的自由度是 4; 代入后, z 不再是独立变量, 而是等 σ 面的高度, z 表为 x 和 y 的函数, 且以 σ 为参变量, $\epsilon'[x, y, z(x, y, \sigma, t), t]$ 的自由度为 3。其实这也正是 $\epsilon(x, y, \sigma, t)$ 的含义。从这个意义上理解坐标系 (x, y, σ, t) , 可知 σ 根本不是独立变量 (它只是参变量), 所以它不可能与 x, y 两两正交。

以上是推导中未能交代清楚的。此外, 推导中还有一处错误: 从 (9) 式中导出 (11) 式时, 作者偷换了函数的形式。因为 (11) 式应为

$$\nabla_{\sigma} \epsilon = \nabla \epsilon' + (\partial \epsilon' / \partial z) \nabla_{\sigma} z \quad (11')$$

他却把 (11) 式右边的 ϵ' 换成了 ϵ , 这显然是不对的。因为 $\epsilon(x, y, \sigma, t)$ 和 $\epsilon'(x, y, z, t)$ 是完全不同的函数形式, 是绝对不能随意替换的。

也许有人会产生这样的疑问: 既然引进 (x, y, p, t) 坐标系带来了这么多麻烦, 为什么还要使用它呢? p -坐标系的引进至少给我们带来三大好处: (1) 气压梯度力在 z -坐标系中含有不易测准的变量 ρ , 而在 p -坐标系中就不再出现了。

(见 [5] 第 18 页); (2) p -坐标系下的连续方程比 z -坐标系下的形式要简单的多。在 z -坐标系下连续方程为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_z + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = 0$$

表达式不但长, 而且式中含有不易测量的大气密度 ρ 。在实际应用中必须将 ρ 变换为其它容易观测的量; 在 p -坐标系下, 连续方程为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

式子既简单，式中又不含 ρ ；(3) 在 p - 坐标系的基础上，Phillips(1957)提出了 σ -坐标系 [6]， σ 的定义为

$$\sigma = \frac{p}{p_s}$$

式中 p_s 为下垫面气压。这样，下边界条件就可简单地写成 $\sigma = 1$ ，免遭了描述下垫面地形之苦。为了使积分区域内的 σ 坐标保持在闭区间 $[0, 1]$ 内，以后又出现了改进的 σ 坐标：

$$\sigma = \frac{p - p_t}{p_s - p_t}$$

式中的 p_t 为上边界气压。这样，上边界条件就变成了 $\sigma = 0$ 。不难看出， σ -坐标实际上不过是 p -坐标系的变形而已。

2. 用理想气体的状态方程作为大气的状态方程

在数值预报中，一个常常用到的关系是理想气体的状态方程，即：对于质量为 m 的理想气体我们有

$$P = \rho RT \quad (13)$$

式中， $\rho = m/V$ ，为密度， V 为气体体积； R 为比气体常数； T 是温度。我们有时亦将其写成

$$PV = nR^*T \quad (13')$$

式中， n 为气体的摩尔 (mol) 数， R^* 为普适气体常数，且 $R^* = \mu R$ ， μ 为摩尔质量。这就是说，在数值预报中近似地把理想气体的状态看作大气的状态。下面我们将分析理想气体与真实气体之间相差多远，从而判断这种近似的合理性。

为了讨论的方便，我们考虑 1 摩尔的气体。对于 1 摩尔的理想气体，其状态方程可以写为

$$pv = R^*T \quad (13'')$$

对于 1 摩尔的真实气体，Kammerlingh-Onnes 将 pv 展成 p 或 $1/v$ 的级数，从而得到真实气体的精确的状态方程 [7]

$$pv = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \dots \quad (14)$$

或者

$$pv = A + B'/v + C'/v^2 + D'/v^3 + \dots \quad (14')$$

(14) 或 (14') 都称作卡默林—昂尼斯方程，式中 A 、 B 、 C 、 D ……或者 A 、 B' 、 C' 、 D' ……等分别称为第一、第二、第三、第四……维里 (Virial) 系数，而且 $A = R^*T$ 。从该方程我们不难看出，当 $p \rightarrow 0$ 或者 $v \rightarrow \infty$ 时，方程就变成了理想气体的状态方程。表 1 给出了氮气 (N_2) 的维里系数在不同温度下的实验值，从中不难看出，级数各项的系数

减小得很快，实际应用时只需取前两项就足够了。

表 1 氮气 (N_2) 的维里系数 B 、 C 和 D 在不同温度下的值 (引自汪志诚, 1980)

温度 T (K)	B (10^{-3}atm^{-1})	C (10^{-6}atm^{-2})	D (10^{-9}atm^{-3})
100	-17.951	-348.7	-216630
200	-2.125	-0.0801	57.27
300	-0.183	2.08	2.98
400	0.279	1.14	-0.97
500	0.408	0.623	-0.89

卡默林—昂尼斯方程的一个极好的近似是范德瓦耳斯 (Van der Waals) 方程。对于 1 摩尔气体，范氏方程为

$$(p + a/v^2)(v - b) = R^*T \quad (15)$$

式中 a 和 b 是常数，不同的气体其值不同。范氏方程是在理想气体的基础上推演出来的。

理想气体完全不考虑分子间的相互作用 (如前所述，它是卡默林—昂尼斯方程在 $p \rightarrow 0$ 或 $v \rightarrow \infty$ 时的极限情况)，所以理想气体是永久的气体，它不能发生相变，因为任何相变都是分子间相互作用状态的改变。换句话说，理想气体永远不会凝结！由此我们可以看出，理想气体偏离真实气体 (比如大气) 是何等之大！

19 世纪 60 年代，英国物理学家安德鲁斯详细地研究了二氧化碳 (CO_2) 的相变问题，并且发现了临界现象和临界点。1873 年，正在莱顿攻读博士学位的荷兰青年范德瓦耳斯，利用当时刚刚发展起来的分子运动论，试图对安德鲁斯的实验结果作出理论解释 [8]。为了解释气液相变，范德瓦耳斯认为应当考虑气体分子间两种基本的作用。第一，分子间相距很近时有相互排斥的力。他认为每个分子都具有一定的不可压的体积 b' 。假定一摩尔气体共有 N 个分子，则总共可占体积 $b = Nb'$ 。这样，气体活动的有效体积应为 $(V - b)$ ；第二，分子间相距较远时应考虑微弱的吸引力，这相当于补充一些内压力，大小为 $(N/v)^2 a'$ 。令 $a = N^2 a'$ ，理想气体的状态方程 (13) 就变成了范德瓦耳斯方程 (15)。

我们将 (15) 式展成级数形式则有

$$pv = R^*T + bp - a/v + ab/v^2 \quad (15')$$

不难看出，它实际上是卡默林—昂尼斯方程的近似值。

下面我们应用系综理论来推导真实气体的状态方程。这个几经简化才得到的状态方程又几经简化可得到范德瓦耳斯方程，再进一步简化才得到理想气体的方程。通过这种理论上的推导和简化，读者可以深刻地理解范氏方程和理想气体方程的近似程度，从而作出正确的判断。

现在我们讨论单原子分子组成的气体 [9]。为了方便仍考虑 1 摩尔的真实气体。这时气体含有 N 个分子， N 为阿伏伽德罗 (Avogadro) 常数。气体的

能量为

$$E = \sum_{i=1}^{3N} \frac{M_i^2}{2m} + \sum_{i<j} \phi(r_{ij}) \quad (16)$$

其中 M_i 为广义动量, m 为分子量。可以看出, 式子右边第一项实际上为 N 个分子的总动能。第二项为分子之间相互作用产生的势能。由气体的正则分布可以导出气体的状态方程, 但须先求配分函数 Z :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{N!h^{3N}} \int \dots \int e^{-\beta E} dq_1 \dots dq_{3N} dM_1 \dots dM_{3N} \\ &= \frac{1}{N!h^{3N}} \int \dots \int e^{-\beta \sum_{i=1}^{3N} \frac{M_i^2}{2m}} dM_1 \dots dM_{3N} \\ &\quad \int \dots \int e^{-\beta \sum_{i<j} \phi(r_{ij})} dq_1 \dots dq_{3N} \end{aligned} \quad (17)$$

式中, h^{3N} 是系统一个微观状态在相空间所占的体积, $\beta=1/kT$, k 是玻耳兹曼 (Boltzmann) 常数, q_i 是广义坐标。先求前面 $3N$ 重积分, Z 可表为

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} Q \\ Q &= \int \dots \int e^{-\beta \sum_{i<j} \phi(r_{ij})} d\tau_1 \dots d\tau_N \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $d\tau_i$ 是广义体元, $d\tau_i = dq_{3i-2} dq_{3i-1} dq_{3i}$ 。

为求 Q , 定义 $f_{ij} = e^{-\beta \phi(r_{ij})} - 1$, 这时 Q 可以写成

$$\begin{aligned} Q &= \int \dots \int \prod_{i<j} (1 + f_{ij}) d\tau_1 \dots d\tau_N \\ &= \int \dots \int (1 + \sum_{i<j} f_{ij} + \sum_{i<j} \sum_{i'<j'} f_{ij} f_{i'j'} + \dots) d\tau_1 \dots d\tau_N \end{aligned}$$

(第一)* 假定上式可只保留前两项, 则有

$$Q = \int \dots \int (1 + \sum_{i<j} f_{ij}) d\tau_1 \dots d\tau_N$$

(第二) 假定上式中 $f_{ij} (i < j)$ 的积分全都等于

$$\int \dots \int f_{12} d\tau_1 \dots d\tau_N = v^{N-2} \iint f_{12} d\tau_1 d\tau_2$$

式中 v 为气体的体积。考虑当 r_{12} 大于分子的力程时 f_{12} 等于零, 因此有

$$\iint f_{12} d\tau_1 d\tau_2 = v \int f_{12} d\tau_1$$

$$Q = v^N + \frac{N^2}{2} v^{N-1} \int f_{12} d\tau_1 = v^N \left(1 + \frac{N^2}{2v} \int f_{12} d\tau_1 \right) \quad (19)$$

对上式取对数则有

$$\ln Q = N \ln v + \ln \left[1 + \frac{N^2}{2v} \int f_{12} d\tau_1 \right]$$

(第三) 假定 $\frac{N^2}{2v} \int f_{12} d\tau_1$ 很小, 并将

$\ln \left[1 + \frac{N^2}{2v} \int f_{12} d\tau_1 \right]$ 展开, 只取第一项, 则有

$$\ln Q = N \ln v + \frac{N^2}{2v} \int f_{12} d\tau_1 \quad (20)$$

我们知道对正则分布的配分函数 Z 有

$$p = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial v} \ln Z = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial v} \ln Q = \frac{1}{\beta} \left[\frac{N}{v} - \frac{N^2}{2v^2} \int f_{12} d\tau_1 \right] \quad (21)$$

于是有

$$pv = NkT \left[1 - \frac{N}{2v} \int f_{12} d\tau_1 \right] \quad (22)$$

令 $B = -\frac{N}{2} \int f_{12} d\tau_1$, 上式即可变为

$$pv = NkT [1 + B/v] \quad (23)$$

这就是真实气体状态方程的近似表达式。

现在我们考虑分子间相互作用势能的函数形式, 以便求出 (23) 式中的维里系数 B 。1924 年 Lennard-Jones 用下式描述两个分子之间的相互作用势:

$$\phi(r) = \phi_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right] \quad (24)$$

其函数图形表示在图 1 中。该图说明, 当两个分子相距很近时, 它们之间的相斥势能迅速增大到无穷大; 当距离稍大时, 两分子间存在引力势能。在力程范围内, 引力势能随距离的增大而逐渐减小。接近并超过力程时, 引力势能则迅速减小到零。这种相互作用势能的特征是十分接近真实气体的。

*将近似假定编成序号写在括号内, 是为了让读者清晰地看出在公式推导中总共使用了多少个近似处理。

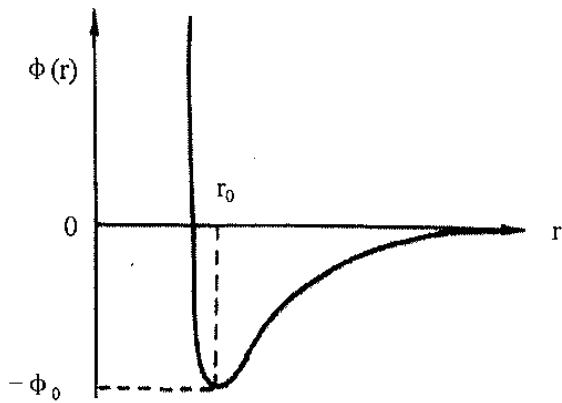


图1 Lennard-Jones 公式所表示的两个分子之间的相互作用势。
(取自汪志诚, 1980)

但是, 为了从 (23) 式导出范德瓦耳斯方程, 需对 (24) 式作进一步简化: (第一) 令

$$\phi(r) = \begin{cases} +\infty & \text{当 } r < r_0 \\ -\phi_0(r_0/r)^6 & \text{当 } r \geq r_0 \end{cases} \quad (25)$$

其函数图形如图 2。从图可知, 两个分子相当于直径为 r_0 的刚性球。当 $r \geq r_0$ 时分子间存在引力, 并随 r 的增大以 r^{-6} 的速度迅速减小到零。

将 (25) 式代入 (23) 式中 B 表达式内的

$$f_{12} = e^{-\beta\phi(r_{12})} - 1 \text{ 并改用球坐标则有}$$

$$B = 2\pi N \left[\int_0^{r_0} r^2 dr - \int_{r_0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\phi(r)}{kT}} - 1 \right) r^2 dr \right]$$

(第二) 假定气体的温度足够高, 这时有 $\phi_0/kT \ll 1$,

从而 $e^{-\phi/kT} \approx 1 - \frac{\phi}{kT}$, 则

$$B = 2\pi N \left[\frac{r_0^3}{3} - \frac{\phi_0 r_0^3}{3kT} \right]$$

令 $b = 4 \left[\frac{4}{3} \pi \left(\frac{r_0}{2} \right)^3 \right] N$ (分子体积的 4

倍) $= \frac{2\pi}{3} N r_0^3$, $a = \frac{2\pi}{3} r_0^3 N^2 \phi_0$, 则 B 变为

$$B = b - \frac{a}{NkT} \quad (26)$$

(26) 式代入 (23) 式则有

$$pv = NkT \left(1 + \frac{b}{v} \right) - \frac{a}{v} \quad (27)$$

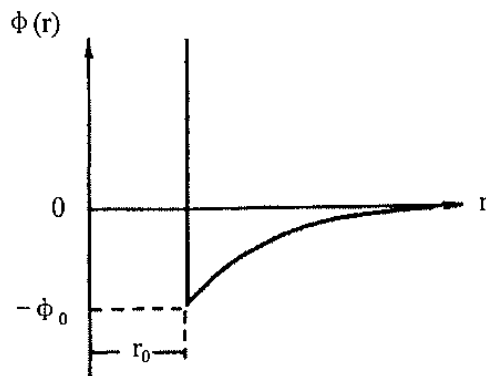


图2 存在引力的两个刚性分子之间的作用势。(取自汪志诚, 1980)

(第三) 因 $\frac{b}{v} \ll 1$, 展开 $(1 - \frac{b}{v})^{-1}$ 只取一项有

$$\left(1 - \frac{b}{v} \right)^{-1} \approx 1 + \frac{b}{v} \quad (28)$$

将 (28) 代入 (27) 得

$$p = \frac{NkT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \quad (29)$$

我们又知 $R^*/N = k$, 则 (29) 即为范氏方程

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v-b) = R^* T$$

我们将 (23) 式应用于理想气体, 因 $f_{12}=0$, 所以 $B=0$ 。于是我们可以一下子得到理想气体的状态方程。

到此, 理论推导便告结束。现在不妨概括一下。我们从气体的正则分布出发, 经过三次近似假设, 导出了真实气体状态方程的近似表达式 (23)。可以看出, 它不过是只取前两项的卡默林—昂尼斯方程 (14')。由 (23) 和 (25) 式出发, 又经过三次近似假设, 导出了范德瓦耳斯方程 (15)。尤其是 (25) 式, 只考虑了分子的体积和分子间的弱引力。但它毕竟考虑了分子间的相互作用, 而且能比较真实地反映气液相变, 所以在压力不是很高、温度不是太低的情况下, 它是真实气体相当好的近似。理想气体的状态方程则是在完全不考虑分子间相互作用的情况下导出的, 它是永久的气体, 不会发生相变。理想气体所反映的是实际气体在压力趋于零时所具有的特征。所以, 在压力偏大或温度偏低的条件下, 理想气体对于实际气体的偏离是显著的。

结论: 在数值天气预报中, 尤其对于考虑相变的数值系统, 不宜使用理想气体状态方程作为大气的状态方程, 应以范德瓦耳斯方程来代替。

参 考 文 献

- 【1】L. F. Richardson. *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press, London, 1992. 236PP. Reprinted by Dover.
- 【2】G. W. Platzman. A retrospective view of Richardson's book on weather prediction. *Bulletin American Meteorological Society*. Vol. 48. No. 8, 1968. 514-550PP.
- 【3】廖洞贤。近十年来数值天气预报的回顾和展望。应用气象学报。第3卷, 第3期, 1992。340-346页。
- 【4】G. J. 哈廷纳。数值天气预报。北大地球物理系气象专业译。第一版, 北京, 科学出版社, 1975年。348页。
- 【5】伍荣生等。动力气象学。第一版, 上海, 上海科学技术出版社, 1983年。326页。
- 【6】N. A. Phillips. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *J. Meteor.*, 14, 184-185 (1957) .
- 【7】J. V. Iribarne and W. L. Godson. *Atmospheric Thermodynamics*. Second Edition. D. Reidel Publishing Company, 1981. 259PP.
- 【8】于淦, 郝柏林。相变和临界现象。第一版, 北京, 科学出版社, 1984。209页。
- 【9】汪志诚。热力学·统计物理。第一版, 北京, 高等教育出版社, 1980。364页。

Some Problems in Numerical Weather Prediction — On Non-orthogonality of the P-Coordinate System and a Better Approaching to the State Equation of Atmosphere

Wang Yaoshan

(National Center for Marine Environment Forecasting,
Beijing, 100081)

Abstract

From completely different angle of view, statistical physics for example, some problems in numerical weather prediction such as non-orthogonality of the p-coordinate system and a better approaching to the state equation of atmosphere were analyzed. For some of them, suggestion was provided.

Key words: Problems of numerical weather prediction, non-orthogonality of the p-coordinate system, state equation of atmosphere.