

半拉格朗日格式特徵線法和雲模式中的地形效應

曾忠一
中央研究院
國立台灣大學

張博雄
中央氣象局
國立台灣大學

摘要

在進行較小尺度大氣現象的數值模擬時，重力波的影響不能忽略，重力波也會限制時步的大小。雖然採用半隱式格式可以增長時步，但這種格式也會使重力波的相速度與事實不符。本文中使用的特徵線法考慮了重力波項的效應，如此可以採用顯式格式而不需擔心會改變重力波相速度，而且時步也不會受到限制。在一維非線性淺水方程特徵線法中使用單調格式，除了時步不受限制外，還可消除重力波附近的寄生波，也使得邊界條件的給定更為簡單。

在雲模式的測試方面，半拉格朗日法會影響雲微物理參數化格式中水物質項的生成時間，但對流的結構特徵不受到影響。本文最後研究進行地形對對流的影響，在沒有強對流發生的情況下，低層水汽扮演減弱山岳波的角色。若流場為均勻流，則通常在山岳下游會形成類似雲牆的結構。

關鍵詞：半拉格朗日法，特徵線法，雲模式

一、前言

對於中小尺度的模擬，半拉格朗日法採用或不採用單調內插格式，模擬的結果會有明顯不同(張與曾, 1998)。加入單調內插格式可以抑制數值方案所產生的計算性誤差，因而不需要額外的人為平滑。在含有水汽的大氣模式中採用單調內插格式，除了防止產生不合理的負值或水汽過飽和外，還可以避免非物理雜波產生(張與曾, 1999)。雖然許多學者採用多項式做為半拉格朗日法的內插函數，但仍然有其他的內插算符可採用。許多學者在不同坐標的實驗結果表明，構造半拉格朗日法的單調內插算符是可行的。然而要維持形狀保存性或單調性的主要困難在於如何決定內插算符所需具備的性質以及如何運用它們，這並沒有一個絕對的選擇標準。由於近年來半拉格朗日法中小尺度數值模式的飛躍發展，因此必須有合適的單調內插格式來處理模式中複雜的預報變數，以便透過不同的測試來了解這些單調內插格式在不同大氣流場以及推廣到三維數值模式時的表現。

基本方程的重力波項可以用顯式或隱式格式計算。如果採用隱式格式，則時步(time step)將會受到限制。在中尺度模式中，重力波項顯得比較不重要，此時採用半隱式格式(semi-implicit scheme)就能得到不錯的結果。但是對小尺度來說，這時重力波開始影響數值模擬的結果，不僅是由於它的快速移動限制了時步的大小，更因為採用隱式格式將使得重力波模減速，這種情形在重力波模以不同方向移

動時更為顯著。

通常處理重力波項的問題可採用顯式或隱式格式，但是這兩種方法各有利弊，因此 Erbes(1993)提出利用特徵線法(method of characteristics)來整合這兩種方法的優點。這個方法必須先求得基本方程組的特徵方程，然後利用顯式格式來求解，此時雖然時步可以較大，但仍然沒有解決平流場的單調性問題。本文中我們結合準單調半拉格朗日法(QMSL)(Bermejo and Staniforth, 1992)與特徵線法進行測試。

本研究的雲微物理參數化法採用 Lin *et al.*(1983)的格式，除了一般降水粒子，也考慮冰相粒子對降水結構的影響，使降水過程較為健全。在微物理參數化格式中假設雲滴、雪和冰珠呈 Marshall-Palmer 分布，降水質點的拖曳力等於質點重量，飽和水汽壓採用 Tetens 的公式計算。雲內部允許有過飽和的現象，若產生過飽和則採用冰水調整方式修正。進行調整過程時需注意在調整之前先進行半拉格朗日法平流，考慮平流擴散過程，再進行雲微物理過程。由於以往採用的是較短時步下的雲物理過程，因此必須修正雲微物理參數化過程，另外也將探討地形所引發的對流。

半拉格朗日法的效率主要來自於平流項的積分是沿著質點運動軌跡的，因此得到的數值解較尤拉(Euler)格式準確而且引起的誤差較小。只要前一時步質點出發點的估計夠準確，則半拉格朗日法在穩定性上的限制少於尤拉格式，因而才能使用較長的時步。為了建立一個有效率且準確的中小尺度雲模

式，我們將進行單調半拉格朗日特徵線法以及雲模式中地形對流的數值實驗。

二、特徵線法的數值實驗

從事較小尺度大氣現象的數值模擬時，重力波會限制時步的大小。半隱式格式雖然可以增長時步，但也會使重力波的相速度與事實不符。Erbes(1993)提出將特徵線法應用在半拉格朗日法中，這個方法考慮了重力波項的效應，如此可以對模式採用顯式格式而不需擔心會改變重力波相速度，且時步也不會有限制。在構造半拉格朗日法特徵線格式時，首先需找出基本方程的特徵方程組，然後將特徵方程組的平流項採用半拉格朗日格式，而特徵值就是平流速度。

任何線性或非線性雙曲線型方程組可以表示如下：

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad p = R^{-1}q, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

q 為向量， A 為係數矩陣， R 為 A 的特徵向量矩陣。我們可以找到 N 個特徵方程，此時 p 以 N 個特徵速度及方向傳播。對於一維非線性淺水方程來說， p 和 Λ 分別如下(見曾, 1993)：

$$p = \begin{bmatrix} u+2c \\ u-2c \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} u+c & 0 \\ 0 & u-c \end{bmatrix}, \quad c = \sqrt{gh}$$

根據上式利用半拉格朗日法可表示為 p 以 $u \pm c$ 的速度平流，但是分別有兩個變數 p_1, p_2 以不同的速度移動。根據 Erbes(1993)的研究結果，半拉格朗日特徵線法的結果與解析解相近，但他未採用單調格式，因此在數值實驗中有許多寄生波產生。

我們使用的初始場如下：

$$u(0) = 1 \text{ m s}^{-1}$$

$$h(0) = 1000 \text{ m} + 100 \exp \left[- \left(\frac{x-x_0}{5000 \text{ m}} \right)^2 \right] \text{ m}$$

在這個研究中 Courant 數定義為

$$Co = \frac{|u| + \sqrt{gh}}{\Delta x} \Delta t$$

積分區域為 200 km，格距為 1 km。圖 1 分別為解析解、半拉格朗日法及 QMSL 特徵線法積分 6000 秒後的結果。解析解是利用細網格且 Courant 數小於 0.1 的方法求出，半拉格朗日法所用的最大 Courant 數是 7.8，QMSL 特徵線法所用最大 Courant 數是 28.9。計算結果顯示，傳統半拉格朗日法雖然有較大的 Courant 數，模式可以穩定積分，但是在淺水波附近有寄生波出現，這在 Erbes(1993)的結果中也可發現。即使採用特徵線法仍然會有寄生

波，Courant 數越大數值解受到的影響越大，但相速度則與解析解相近。QMSL 特徵線法在 Courant 數很大的情況下，結果仍然與解析解相近，沒有寄生波的問題，但是相速度較解析解慢。研究結果也顯示，Courant 數越大則數值積分結果越接近解析解，Courant 數的最大值可以到達 150。特徵線法的另一個好處是邊界較易處理，由於邊界值可以利用特徵線法給定，因此波動可以經由邊界傳出而不會反射回到積分區域。一維非線性淺水方程的特徵線法，理論上可以推廣到多維空間，但由於多維空間的結果將會是特徵值在特徵曲面上移動，因此數值計算時間將耗費在求解矩陣問題上。Erbes(1993)所提出的利用顯式格式計算特徵方程以節省求解橢圓型方程時間的構想，將因空間維度增加而增加計算時間，不如直接求解隱式格式中出現的橢圓型方程，因此在直角坐標下特徵線法並不適用多維空間。

三、半拉格朗日法雲模式的地形效應

在從事中小尺度模擬時，地形效應是不可忽略的重要因素，除了地形的熱力效應之外，機械力的作用更是中小尺度流場的變化因素之一。通常由於半拉格朗日法的特性，在較長時步下雖然會有虛假的數值解，但是 Courant 數仍然比尤拉格式大 3 到 6 倍。我們在下面探討由模式地形所引起的對流情況，地形對它的影響以及模式時步對雲微物理參數化的影響。

本研究採用的半隱式半拉格朗日法雲模式的基本方程和前文(張與曾, 1999)完全一樣。我們利用一個典型熱帶大氣環境模擬積雲對流的狀況，基本狀態為地面溫度設為 25°C，從地面向上到雲底(雲底假定在 0.8 km) 氣溫按乾絕熱遞減率減小。地面相對溼度為 70%，從地面到雲底相對溼度呈線性增加，到雲底時為 90%。雲底以上的氣溫遞減率為 6.°C/km。這種溫度結構表示，在大約 12.5 km 以下是條件不穩定的。雲底以上的相對溼度以 7.5 % /km 減少，在更高的高度上相對溼度為 30%。模式採用半隱式半拉格朗日法，流體軌跡採用二時間層格式計算。單調格式採用 QMSL 法(Bermejo and Staniforth, 1992)，只作用在水物質變數。對於區域雲模式的邊界問題，本文採用吸收邊界的方法，這種方法可以有效地吸收重力波，因而不需在模式邊界進行複雜的計算就可以有效的防止重力波和聲波從邊界的反射(張與曾, 1999)。環境風場假設為零，初始熱胞按照下式計算：

$$\theta' = \theta_0 \left\{ 1 - \left[\frac{z_0 - z}{z_0 - (\Delta z / 2)} \right]^2 \right\} \left[1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right]$$

θ_0 取為 0.5°C， r_0 為三倍格距， z_0 為 2 km。熱胞

中心相對溼度 100%，且假設雲滴濃度為 1.0 g/kg。首先測試模式在不同時步下雲微物理過程的變化。研究結果顯示，當時步較短時水物質生成時間明顯較短，時步越長則水物質生成時間越接近。但是在總量的比較上，各種時步所得到的水物質總生成量幾乎一致，這表示時步的影響只在水物質生成的時間不同。由模式中的雲微物理過程可知，各項水物質的生成是由飽和調整後過飽和水汽凝結成雲滴時才開始，因此雲滴生成關係著其他水物質的生成時間。當時步為 10 s 時，水物質的生成時間差異最大。這是由於在時步較短的情形下，雲邊的夾捲 (entrainment) 情形較明顯，因此水物質的耗散現象較其他時步還大，以致雲滴的生成較其他時步慢。由測試結果可知，半拉格朗日法的時步主要影響水物質生成的時間，對於總量並沒有太大的影響。

在進行地形對流的測試時，我們假設山岳高度為 2 km，山脈半寬為 5 km。首先探討不同 Froude 數與不同潮濕狀況下的山岳波動狀況，圖 2 是分別利用水平風場 10m/s 與 20m/s 積分 2 h 後的垂直運動場。右邊上下兩圖是低層水汽增加後的結果，低層水汽由相對溼度 70% 增加到 80%，不同水平流場顯示不同的 Froude 數。在低 Froude 數 ($U=10\text{m/s}$) 的情況下，流場呈現出向上傳播的重力波，山脈下游處流場的上升運動較弱，但仍然有雲滴在山脈下游生成。在高 Froude 數 ($U=20\text{m/s}$) 的情況下，波動呈現向下游傳播的現象，並且產生雲滴但沒有降水發生。由這個實驗結果可知，水汽增加會使得山岳波減弱，這與 Klemp and Lilly (1978) 的結果相同。在均勻流場的情況下，通常在山岳下游都會形成類似雲牆的結構，如圖 3 所示。

四、結論

在本文中我們探討單調淺水重力波模式特徵線法和雲模式的地形效應。由第二節的數值實驗可知，特徵線法可以用來求解較簡潔的基本方程，在一維非線性淺水模式中，特徵線法使得時步不再受到限制，這個類似於波譜法的格式不但可以節省半隱式格式中求解橢圓型方程的時間，更可以使重力波有足夠準確的相速度。但是當空間維度增加時，特徵線法將增加矩陣運算的時間，並不會比求解橢圓型方程更快，而且會增加複雜度，因此特徵線法並不適用於多維空間的氣象模式中。

在雲微物理的測試中，長時步對雲模式的效應，除了水物質出現時間不同外，對流過程與特徵並沒有受到太大的影響。這可能是因為在時步較短的情況下模式積分步驟增加，進而增加數值模式中的耗散作用。另外由對流實驗結果可知，時步越短，則雲邊的夾捲越明顯，造成雲邊空氣被夾捲進入對流中心，影響空氣塊的過飽和生成雲滴，減慢雲微物理過程的啟動。另外，在時步越大的情形下，水

物質生成時間越趨近於一固定值。但是當時步超過某個值 (約 50 s) 之後，模式會失去穩定性。由此可看出，半拉格朗日法應用在大氣現象的模擬時，事實上時步會有一個最佳值，太小的時步無法增加半拉格朗日法的準確度，但是太長的時步也會減低模式的穩定度，這與其他學者所提出的半拉格朗日法應該有最佳時步的說法相同。

在地形波動的實驗中，雲滴通常產生於山脈下游的微弱上升運動區，這種情況與山脈下游經常出現的雲牆相似。而山脈上方通常會有一個高溫區，但是這個區域並未引起對流，這是由於該處流場水平風速強，當雲滴生成後被迅速帶往下游且該處的高溫使的水汽不易飽和。當下坡風過強時，在下游將引起強烈對流。根據模擬的結果，對流的發生與低層水汽含量有關。

五、致謝

本文是在國家科學委員會 NSC 88-2111-M-001-001 計劃支持下完成的。

參考文獻

- 曾忠一, 1993: 大氣模式的數值方法. 渤海堂, 台灣台北, 695 頁.
- 張博雄, 曾忠一, 1998: 半拉格朗日法單調平流格式的數值實驗. *大氣科學*, **26**, 325-342.
- 張博雄, 曾忠一, 1999: 半拉格朗日法雲模式在中小尺度模擬上的應用. *大氣科學*, **27** (已接受).
- Bernejo, R., and A. Staniforth, 1992: The conversion of semi-Lagrangian advection schemes to quasi-monotone schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2622-2632.
- Erbes, G., 1993: A semi-Lagrangian method of characteristics for the shallow-water equations. *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 3443-3452.
- Klemp, J. B. and D. K. Lilly, 1978: Numerical simulation of hydrostatic mountain waves. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 78-107.
- Lin, Y. L., R. D. Farley, and H. D. Orville, 1983: Bulk parameterization of the snow field in a cloud model. *J. Climate Appl. Meteor.*, **22**, 1065-1092.

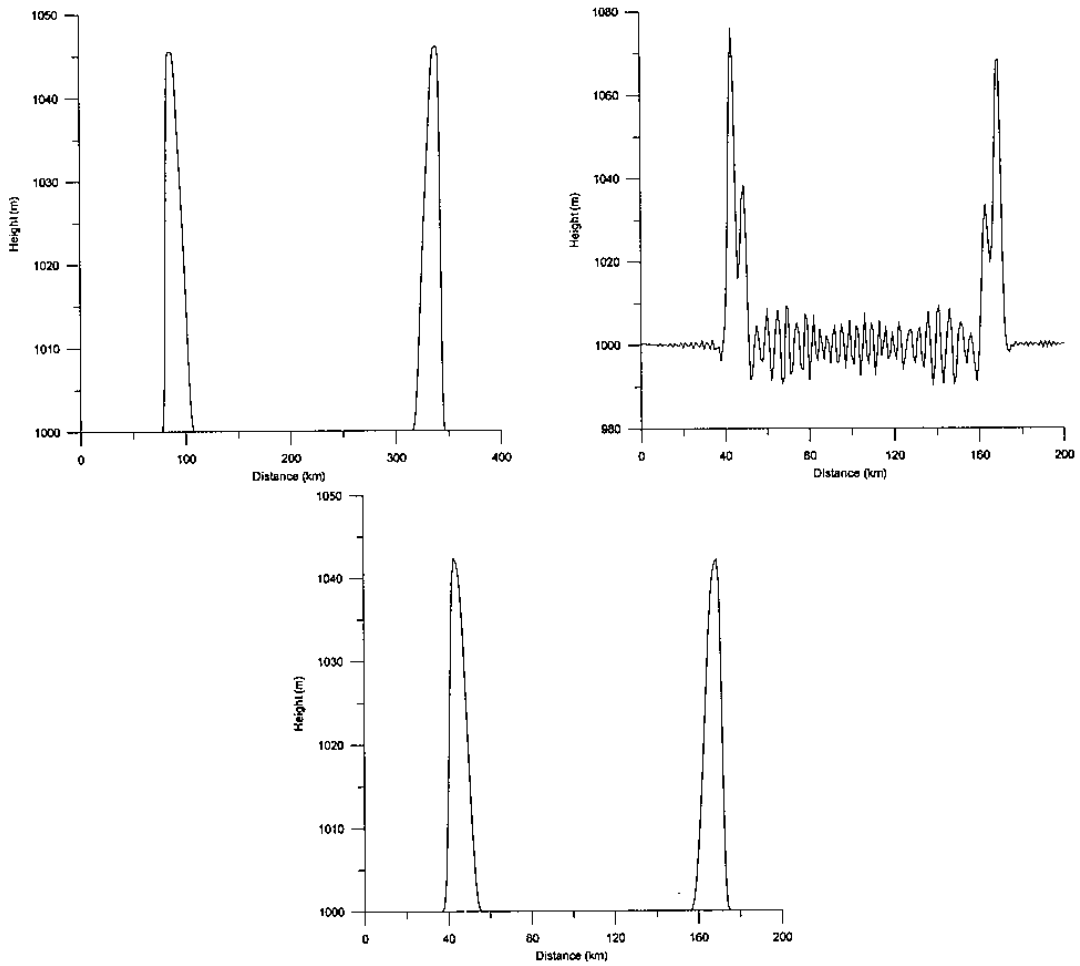


圖 1 解析解(上左)、半拉格朗日法(上右)及 QMSL 特徵線法(下)積分 6000 秒之後的結果。

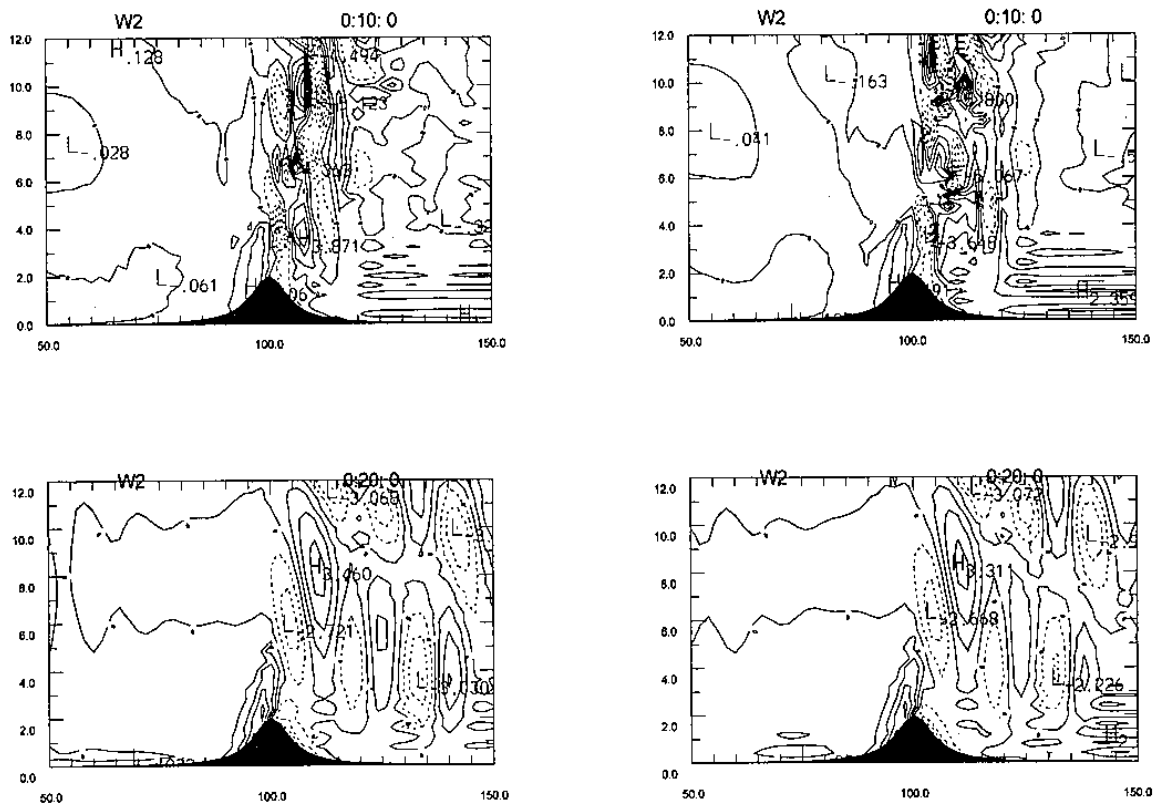


圖 2 水平流場 10m/s(上圖)與 20m/s(下圖)積分兩小時後的垂直運動場，左側上下圖低層相對濕度為 75 %，右側上下圖低層相對濕度為 85%。

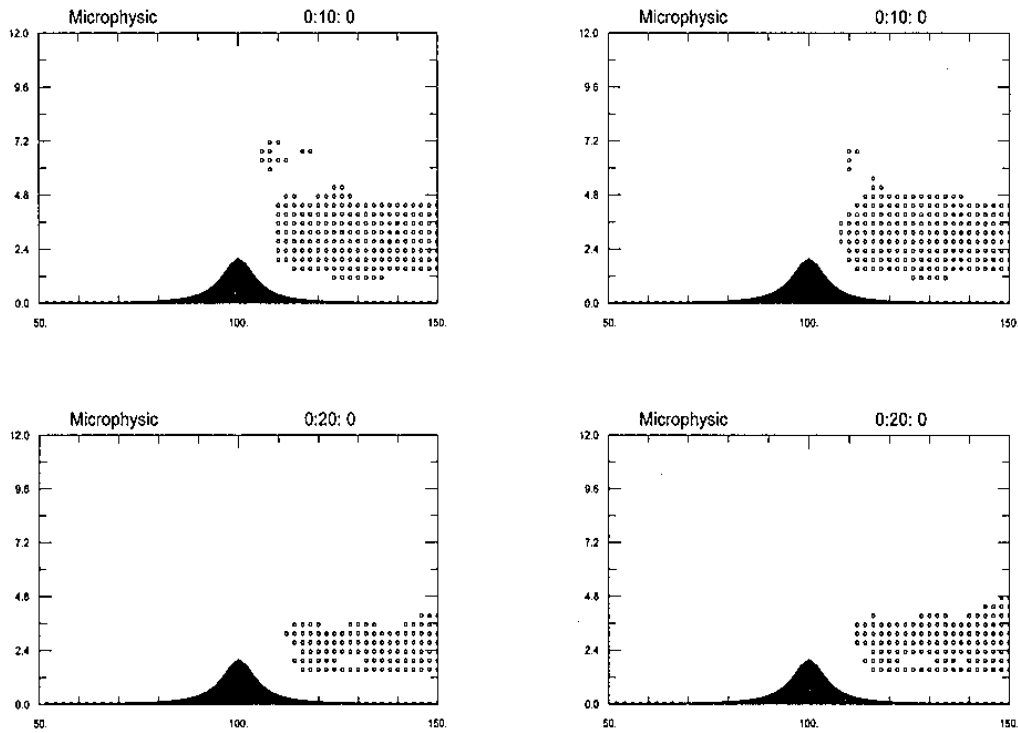


圖 3 圖片的對應同圖 2，圖中打“o”號的點表示該處雲滴濃度超過 5g/kg。

Method of Characteristics for Semi-Lagrangian Scheme and Orographic Effects in Cloud Model

Chung-yi Tseng
Academia Sinica
and
National Taiwan University

Po-hsiung Chang
Central Weather Bureau
and
National Taiwan University

ABSTRACT

When performing numerical simulation on smaller scales, we can no longer neglect the role of gravity waves. Although the semi-implicit scheme may be used for longer time steps, but this scheme retards the gravity wave phase speeds. A semi-Lagrangian method of characteristics is stable for long time steps and at the same time retains accurate phase speeds. In this paper the monotone scheme and characteristics method is combined to be applied to a shallow water model. It is found that the length of time steps is not restricted and the parasitic waves are suppressed efficiently. In addition, it is easier to prescribe the boundary conditions. In cloud model experiment, the variation of time steps changes the first stage of microphysics, but the feature of convection is retained. Low-level moisture may reduce the magnitude of mountain waves. For uniform flow, there are cloud walls at the lee side.