

# 二維非靜力模式的建立及基本測試

洪景山\* 周仲島\*\*

\* 中央氣象局資訊中心  
\*\* 國立臺灣大學大氣科學系

## 摘要

本文主要是建立在Klemp and Wilhelmson (1978)及Durrant and Klemp (1983)的基礎上所發展之追隨地形的二維可壓縮非靜力模式。預報變數 $u$ 、 $w$ 、 $\pi$ 及 $\theta$ 、 $q_v$ 、 $q_c$ 、 $q_r$ 等交錯分佈在Arakawa-C網格式。由於模式中包含快速傳播的聲波在內，因此在時間積分上採用分離格式；與聲波有關的部份用較小的時間間距，與聲波無關的部份則採用較大的時間間距。此外，為了使積分更有效率，和聲波部份有關的垂直差分是隱式的。側邊界採用Orlanski (1976)提出的輻射邊界條件，上邊界則放置一海棉吸收層以抑制上傳的內重力波。為了測試模式的準確度，我們在此進行三個基本測試，其中包括了氣流過山、密度流及熱胞上升等。實驗結果顯示模式已有能力模擬上述三個物理現象，唯對模式更精確的診斷分析則有待更進一步進行。

## 一、前言

近年來由於電腦運算速度的快速提昇，使我們利用高解析度數值模式來模擬中尺度天氣系統已經成爲一個相當重要的研究方法；其中特別是在中尺度對流系統方面。透過模式模擬不僅可以彌補觀測資料的不足，同時也提供一組在時間及空間上具有物理一致性的資料庫，有助於我們進一步了解不同物理過程之間的交互作用及因果關係。現今中尺度非靜力模式不僅在理論上或數值方法上的進展均一日千里，而許多發展完整的模式(例如Penn State的MM5，CSU的RAMS等)更是已經被廣泛地測試，同時也受到相當的肯定。本模式主要是架構在Klemp and Wilhelmson (1978)及Durrant and Klemp (1983)上所發展之二維可壓縮非靜力模式，文中之第二及第三部份是模式之控制方程及差分方程的描述，第四部份則是針對本模式之模擬能力所進行的三個基本測試，最後則是結論。

## 二、控制方程及垂直座標系統

本模式主要是架構在Klemp and Wilhelmson (1978)及Durrant and Klemp (1983)上所發展之二維可壓縮非靜力模式。其預報變數爲 $u$ 、 $w$ 、 $\pi$ 及 $\theta$ (目前尚未包含水氣的作用)，控制方程可寫成

$$\frac{du}{dt} + c_p \Theta \frac{\partial \pi}{\partial x} = D_u \quad (1)$$

$$\frac{dw}{dt} + c_p \Theta \frac{\partial \pi}{\partial z} = g \left( \frac{\theta}{\Theta} - 1 \right) + D_w \quad (2)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{R_d \Pi}{c_v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + w \Pi_z = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = D_\theta \quad (4)$$

其中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Pi + \pi = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{R_d/c_p}$$

以上方程式中的 $p$ 是壓力， $p_0 = 1000$  hPa， $R_d$ 是乾空氣的氣體常數， $\Pi$ 和 $\Theta$ 分別代表初始的壓力及位溫場。 $D$ 是次網格式混合項；在此參考Lilly (1962)的一階封閉格式， $K_M$ 和 $K_H$ 由流場的Richardson number決定，有關細節可參考Durrant and Klemp (1983)，目前模式仍未考慮摩擦的效果。此外，在壓力方程中忽略了非線性平流項，Klemp and Wilhelmson (1978)指出這樣的省略會影響到模式中 $\pi$ 的空間平均，但對壓力梯度則無影響。為了使模式可以應用到複雜地形的模擬，在此將垂直座標系統轉換至追隨地形起伏，定義 $\zeta$ ：

$$\zeta = \frac{z_t(z - z_s)}{z_t - z_s}$$

$z_s$  是地形高度， $z_t$  是模式的深度。則(1)至(4)經座標轉換後可寫成：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + (Gu + Hw) \frac{\partial u}{\partial \zeta} + c_p \Theta \left( \frac{\partial \pi}{\partial x} + G \frac{\partial \pi}{\partial \zeta} \right) = D_u \quad (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + (Gu + Hw) \frac{\partial w}{\partial \zeta} + c_p \Theta H \frac{\partial \pi}{\partial \zeta} = g \left( \frac{\theta}{\Theta} - 1 \right) + D_w \quad (6)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{R_d \Pi}{c_v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + G \frac{\partial u}{\partial \zeta} + H \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) + Hw \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + (Gu + Hw) \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = D_\theta \quad (8)$$

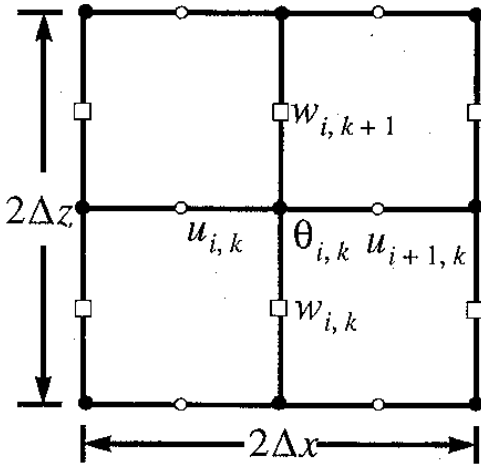
其中

$$G = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\zeta - z_t}{z_t - z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x}$$

$$H = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{z_t}{z_t - z_s}$$

### 三、差分方程及邊界條件

模式採用標準的Arakawa-C網格系統，如圖1所示。由於模式中包含快速傳播的聲波在內，



- : w point
- : u point
- : thermodynamic point  
 $\pi, \theta, q_v, q_c, q_r$

圖1：模式所使用的網格系統。

因此在時間積分上採用分離格式；將與聲波有關的部份用較小的時間間距，與聲波無關的部份則採用較大的時間間距。此外，為了使積分更有效率，與聲波部份有關的垂直差分是隱式的。(5)至(7)式之差分方程為：

$$\delta_\tau u + c_p \Theta (\delta_x \pi^\tau + G \delta_{2\zeta} \overline{\pi^{\tau^2}}) = f_u^t \quad (9)$$

$$\delta_\tau \bar{w} + c_p \bar{\rho} \Theta^2 H \delta_\zeta \bar{\pi}^\tau = \bar{\rho} \Theta f_w^t \quad (10)$$

$$\delta_\tau \pi + \frac{R_d \Pi}{c_v} \left( \delta_x u^{\tau+\Delta\tau} + G \delta_{2\zeta} \overline{u^{\tau+\Delta\tau^2}} \right) + \frac{R_d \Pi}{c_v \bar{\rho} \Theta} H \delta_\zeta \bar{w}^\tau = 0 \quad (11)$$

其中 $\bar{\rho}$ 為初始密度場。空間差分運算元定義為

$$\delta_{n\xi} \phi(\xi) = \frac{1}{n\Delta\xi} \left[ \phi\left(\xi + \frac{n}{2}\Delta\xi\right) - \phi\left(\xi - \frac{n}{2}\Delta\xi\right) \right]$$

$$\overline{\phi(\xi)^{n\xi}} = \frac{1}{2} \left[ \phi\left(\xi + \frac{n}{2}\Delta\xi\right) + \phi\left(\xi - \frac{n}{2}\Delta\xi\right) \right]$$

時間平均運算元為

$$\overline{\phi(\tau)^\tau} = \frac{1+\epsilon}{2} \phi(\tau + \Delta\tau) + \frac{1-\epsilon}{2} \phi(\tau)$$

此處 $\epsilon = 0.2$ 用以壓抑在峻深地形中可能產生的聲波不穩定度(Durran and Klemp 1983)。由於垂直差分是隱式格式，所以在解(10)及(11)式時需求解一個tri-diagonal矩陣以計算下一個時刻的 $\pi$ ，但要注意此時我們不須要知道 $\pi$ 在上、下邊界的值，而僅由 $w$ 即可計算出整層的 $\pi$ ，這將省略了處理 $\pi$ 的邊界問題。

(9)至(11)式等號右邊的強迫項是和聲波無關的，包含了平流項及浮力項等，這些強迫項均在大的時間間距 $t$ 上計算，等號左邊則由 $t - \Delta t$ 用向前積分法以時間間距 $\Delta\tau$ 往前積分至 $t + \Delta t$ ，而得到下一個時刻的預報場。 $\Delta\tau$ 此時滿足CFL條件，也就是

$$\frac{\bar{c} \Delta\tau}{(\Delta x^2 + \Delta z^2)^{1/2}} < 1, \quad \bar{c}^2 = \frac{c_p}{c_v} R_d \Pi \Theta$$

(9)至(11)等號右邊的水平平流採用四階差分，垂直平流則為二階的。其差分方程為：

$$f_u = -\frac{u}{3} (4\delta_{2x} u - \delta_{4x} u) - \overline{(\bar{u}^\zeta G + H \bar{w}^\zeta)} \delta_\zeta u - c_p \bar{\Theta}^\zeta (\delta_x \pi + \overline{G \delta_{2\zeta} \pi^x}) + D_u$$

$$f_w = -\frac{\bar{w}^\zeta}{3} (4\delta_{2x} w - \delta_{4x} w) - \overline{(\bar{u}^\zeta G + H w)} \delta_{2\zeta} w + c_p H \bar{\Theta}^\zeta \delta_\zeta \pi + g \left( \frac{\theta}{\Theta} - 1 \right) + D_w$$

模擬種類	氣流過山		密度流	熱胞	
個案數目	個案一	個案二	個案一	個案一	個案二
$\Delta x$	200 m	200 m	10 m	10 m	10 m
$\Delta z$	200 m	200 m	10 m	10 m	10 m
$\Delta t$	1 s	1 s	0.4 s	0.4 s	0.4 s
$\Delta \tau$	0.1 s	0.1 s	0.04 s	0.04 s	0.04 s
網格式數目	101×80	101×80	151×150	151×150	151×150
積分範圍	20km×16km	20km×16km	1500m×1500m	1500m×1500m	1500m×1500m
積分時間	5400 s	5400 s	300s	900 s	900 s

表一：六個模擬測試中的實驗設計。

由於熱力場和聲波的傳遞無關，因此其時間積分為單純的跳蛙格式，差分方程可寫為如下：

$$\delta_{2t}\phi = -\frac{\bar{u}^z}{3}(4\delta_{2x}\phi - \delta_{4x}\phi) - \overline{(\bar{u}^z G + Hw)}\delta_{\zeta}\phi + D\phi$$

其中 $\phi$ 可為 $\theta$ 、 $q_r$ 、 $q_c$ 或 $q_v$ 等。為了濾除短波及抑制非線性項的成長，除了 $\pi$ 以外，其他預報變數均對其擾動場(相對於初始背景場)加上四階的平滑(鄰近邊界的一層為二階，邊界則不處理)：

$$\gamma[\phi_{i+2} + \phi_{i-2} - 4(\phi_{i+1} + \phi_{i-1}) + 6\phi_i], \quad \gamma = 0.015$$

此外，跳蛙積分配合Asselin勻滑以抑制計算模的成長(Asselin 1972)。

有關邊界條件的處理方面，由於模式是追隨地形的，故 $\zeta = 0$ 時的垂直速度為 $w = u\partial z_s/\partial x$ 。側邊界用的是輻射邊界條件(Orlanski 1976, Hedley and Yau 1988)。基本上側邊界的處理可以想像成是一個具體而微的重力波模式，它利用過去時刻及邊界點附近的格點資料估計(預報)下一個時刻在邊界上的重力波速，並讓外傳的重力波自由地傳出，內傳的重力波則設定為和初始背景場一致；因此重點是如何在邊界點上正確地預報下一個時刻的重力波波速。模式中參考Orlanski (1976)的方法，在邊界點上重力波速計算的方法如下：

$$c^* = \frac{\Delta x}{2\Delta t} \frac{u_{B-1}^{n-2} - u_{B-1}^n}{(u_{B-1}^n + u_{B-1}^{n-2})/2 - u_{B-2}^{n-1}}$$

$$u_B^{n+1} = \left[ \frac{1-r}{1+r} \right] u_B^{n-1} + \left[ \frac{2r}{1+r} \right] u_{B-1}^n, \quad r = c^* \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$B$ 代表邊界上的格點， $n$ 是時間。

上邊界則放置一海棉吸收層，用以吸收對流所產生之上傳的內重力波。

#### 四、基本測試

在此我們將利用此模式進行三種基本測試，分別為氣流過山、密度流及熱胞實驗，有關各實驗之網格式設計如表一所列。

##### • 氣流過山

對於一個新模式而言，氣流過山實驗可以說是最常被測試的項目之一。在此我們考慮在層化大氣( $N^2 = 10^{-4} s^{-2}$ )基本氣流( $U = 10$  m/s)通過鐘形地形： $h(x) = h_0 \frac{a^2}{a^2 + x^2}$ 的情形。Laprise and Peltier (1989)指出 $F_x = \frac{N_a^2}{U}$ 可視為鐘形地形激發之內重力波的非靜力程度指標，當 $F_x$ 愈小時擾動愈傾向非靜力，此時重力波的能量將會往山的下游傳播。第一個實驗我們令 $a = 1000$  m ( $F_x = 1$ )， $h_0 = 400$  m，圖2a是積分至2200秒時的結果，此時山岳坡已達到穩常的階段。圖中顯示波動明顯的往下游傳播，這是非靜力山岳波的特徵，而這個結果也和圖2b之MM5的模擬結果(Dudhia 1993)相當接近，這意味本模式已有能力模擬大氣中的非靜力過程。

有關地形引發之內重力波的另一個有趣的主题即是擾動最陡峭( $\frac{\partial \theta}{\partial z} \sim 0$ )發生的位置，因為這個地方是對流最容易被激發之所在。Laprise and Peltier (1989)指出 $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$ 最先發生的位置是 $F_x$

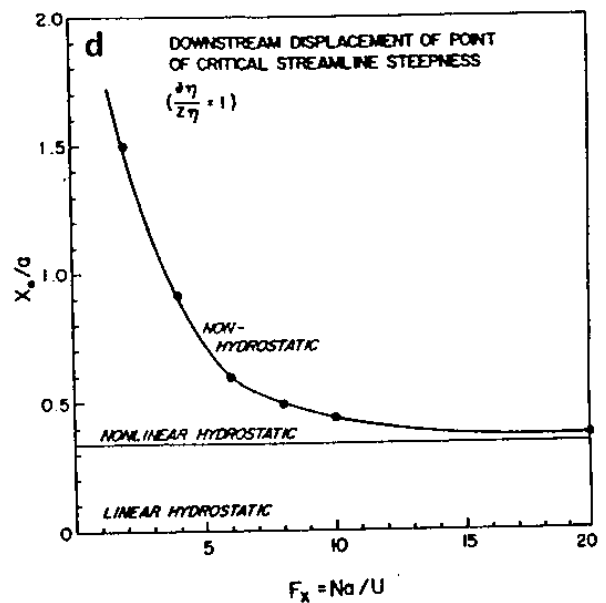
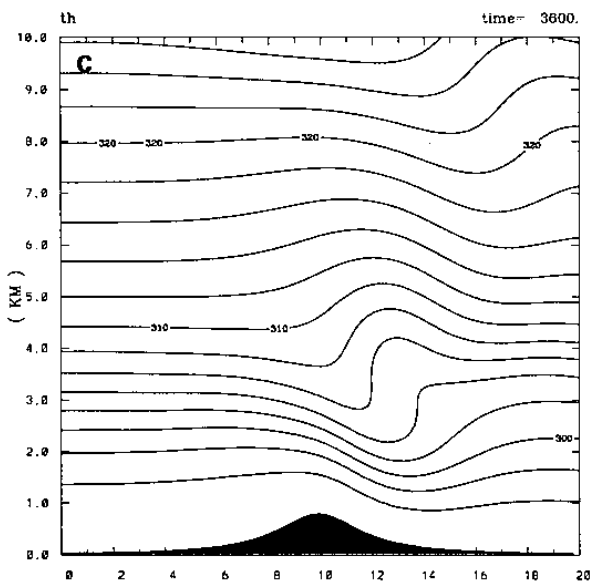
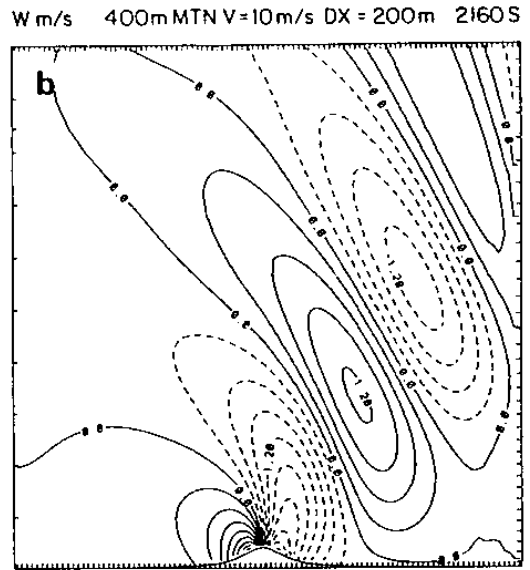
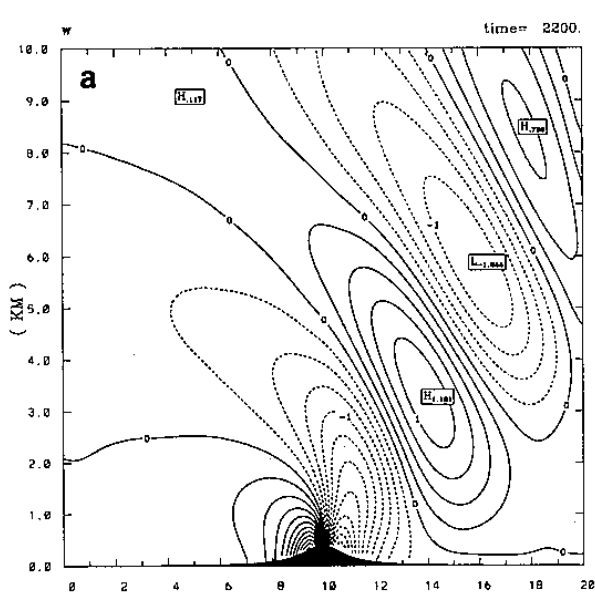


圖2：氣流過山實驗，a為垂直運動場，等值線間距為0.25 m/s。b為MM5的模擬結果(Dudhia 1993)。c為位溫場，等值線間距為 $2^{\circ}\text{C}$ ，d為Laprise and Peltier (1993)估計山岳坡不穩定層發生的位置。

和 $a$ 的函數。在第二個實驗中我們令 $a = 2000 \text{ m}$  ( $F_x = 2$ )， $h_0 = 800 \text{ m}$ ，圖2c是積分到3600秒時，我們發現不穩定層首先在距離山的下游約2.8公里的地方形成，而Laprise and Peltier (1989)預測的距離約在2.9公里(如圖2d)，兩者是非常符合的。

### • 密度流

密度流是對流系統中激發新對流胞最重要的物理過程之一，因此一個雲模式必須要有能力正確地模擬密度流的動力特性。在第三個實驗中我們考慮中性大氣下一個冷丘( $\theta' = -2^{\circ}\text{C}$ ,  $0 < x < 600 \text{ m}$ ,  $0 < z < 500 \text{ m}$ )釋放後模式所模擬之密度流的行為。圖3是模擬的結果，圖中顯示在密度流前緣的頭、鼻及後面的Kelvin-Helmholtz波均與觀測及其他研究非常接近(Simpson 1969, Droegemeier

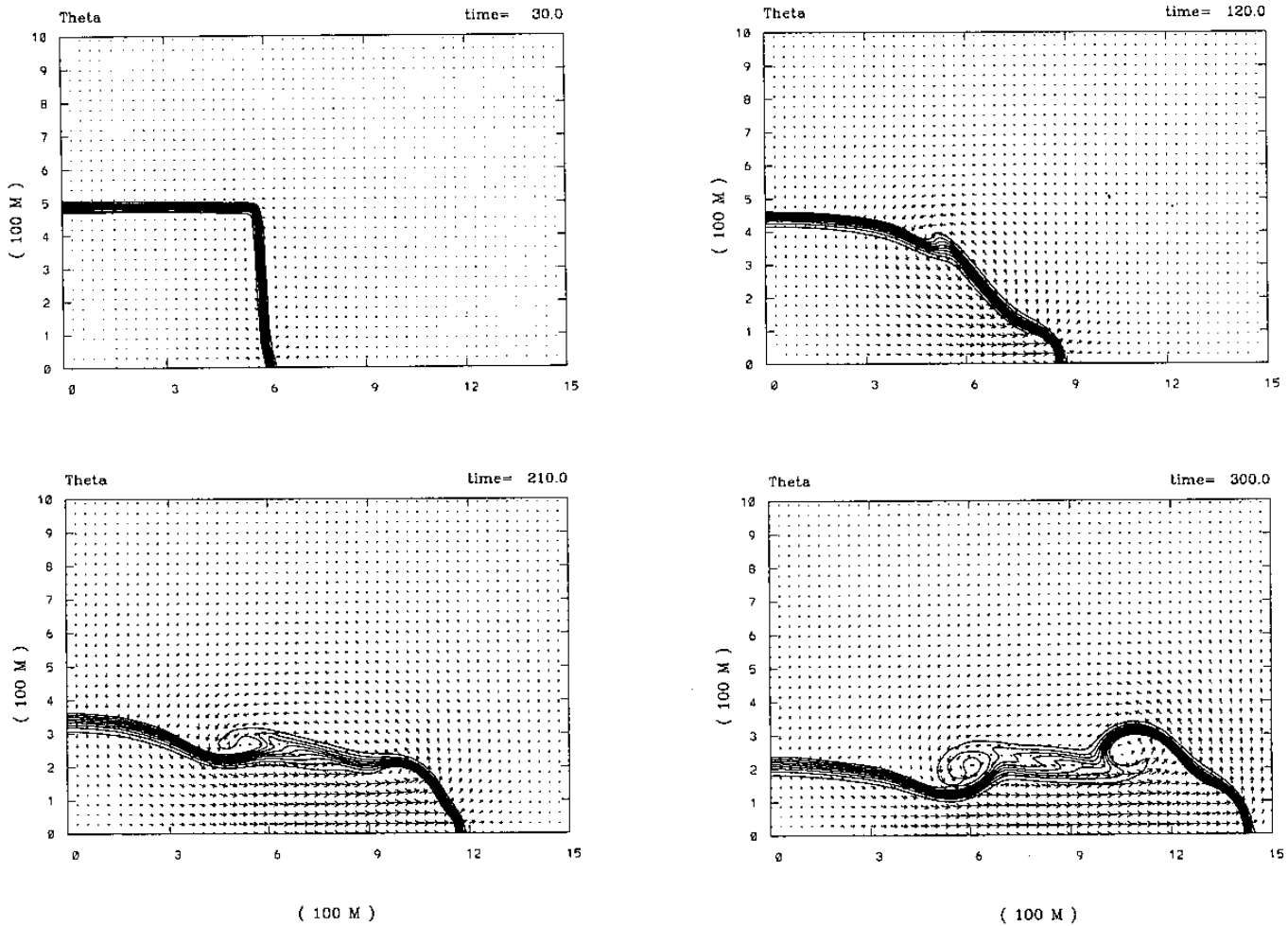


圖3：密度流實驗，等值線為位溫場，間距為 $0.2^{\circ}\text{C}$ ，時間的單位為秒。

and Wilhelmson 1987)；但因模式未考慮摩擦作用，因此近地層沒有回流產生。

### • 熱胞上升

此處我們測試中性大氣下熱胞上升的模擬實驗。第一個是高斯分佈的熱胞：

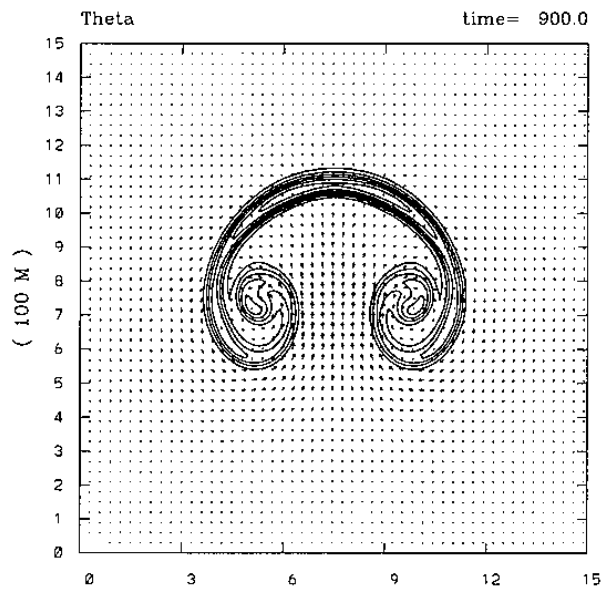
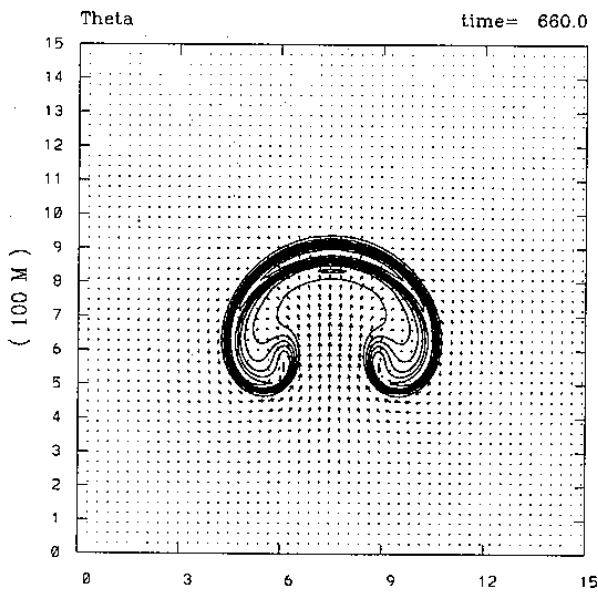
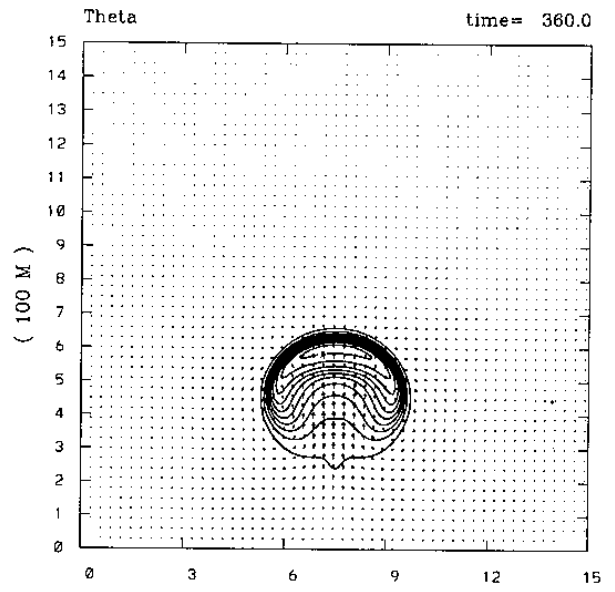
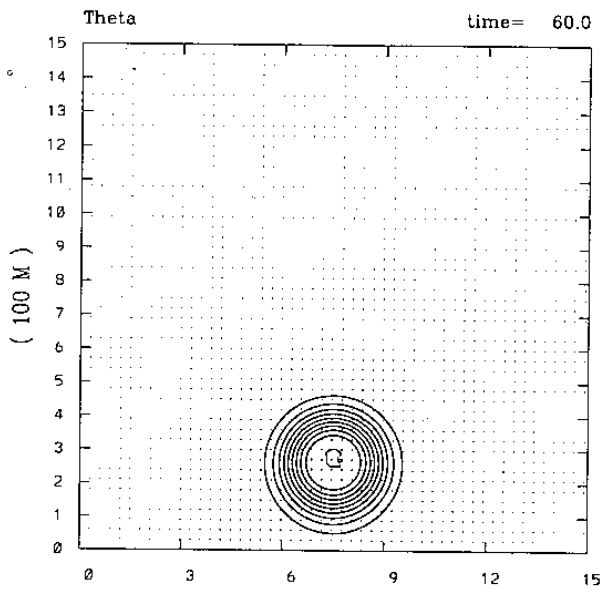
$$\theta' = \begin{cases} A, & r \leq a \\ Ae^{-(r-a)^2/s^2}, & r \geq a \end{cases}$$

其中  $A = 0.5^{\circ}\text{C}$ ， $a = 50\text{ m}$ ， $s = 100\text{ m}$ ，熱胞的中心在(750 m, 250 m)處。第二個是在  $r = 250\text{ m}$  內均勻分佈的熱胞( $\theta' = 0.5^{\circ}\text{C}$ ，中心為(750 m, 350 m))。圖4及圖5分別為其模擬結果。圖中顯示本模式能正確地模擬熱胞的演化，並且與文獻上的研究(例如Robert 1993)的結果也非常類似。

## 五 結論

由以上一系列的實驗中顯示本模式已能成功地模擬氣流過山、密度流及熱胞上升之基本測試，這意味著模式的動力部份大致上是正確的。在未來發展方面，至少有以下兩點是必須考量的：

1. 本模式仍需再進行更精緻的校驗及數值積分穩定性及保守性的測試，以提高使用者的信心，同時，模式效率的加強也是一個重要的工作目標。
2. 雲物理過程方面將先考慮  $q_r$ ,  $q_c$ ,  $q_v$  (rain water, cloud water and water vapor) 等較單純的過程，這對於中尺度對流系統而言是一個起點，同時也可以簡化模式發展的複雜程度。



( 100 M )

( 100 M )

圖4：熱胞實驗，等值線為位溫場，間距為 $0.05^{\circ}C$ ，時間的單位為秒。

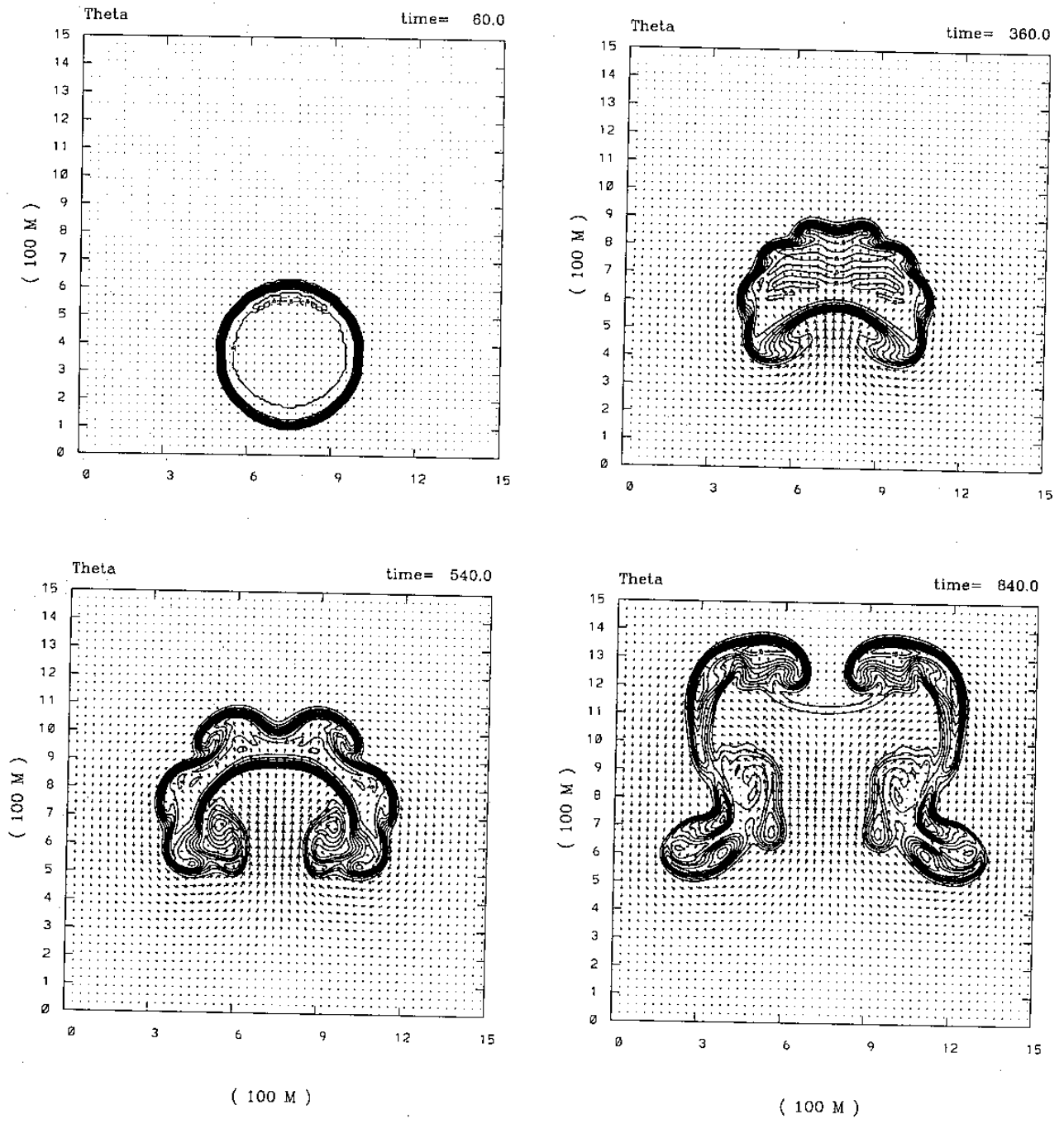


圖5：熱胞實驗，等值線為位溫場，間距為 $0.05^{\circ}C$ ，時間的單位為秒。

## 參考文獻

- Asselin, R., 1972: Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 487 - 490.
- Droegemeier, K. K., and R. B. Wilhelmson, 1987: Numerical simulation of thunderstorm outflow dynamics. Part I: Outflow sensitivity experiments and turbulence dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 1180 - 1210.
- Dudhia, J., 1993: A nonhydrostatic version of the Penn State-NCAR mesoscale model: Validation tests and simulation of an Atlantic cyclone and cold front. *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 1493 - 1513.
- Durran, D. R., and J. B. Klemp, 1983: A compressible model for the simulation of moist mountain waves. *Mon. Wea. Rev.*, **111**, 2341 - 2361.
- Hedley, M., and M. K. Yau, 1988: Radiation boundary conditions in numerical modeling. *Mon. Wea. Rev.*, **116**, 1721 - 1736.
- Klemp, J. B., and R. Wilhelmson, 1978: The simulation of three dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070 - 1096.
- Laprise, R., and W. R. Peltier, 1989: On the structure characteristics of steady finite amplitude mountain wave over bell shaped topography. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 586 - 595.
- Lilly, D. K., 1962: On the numerical simulation of buoyant convection. *Tellus*, **14**, 148 - 172.
- Orlanski, I., 1976: A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *J. Comput. Phys.*, **21**, 251 - 269.
- Robert, A., 1993: Bubble convection experiments with a semi-implicit formulation of the Euler equations. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1865 - 1873.
- Simpson, J. E., 1969: A comparison between laboratory and atmospheric density currents. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **95**, 758 - 765.