

# 正定義數值計算方法的測試

柳再明

氣象資訊中心

中央氣象局

郭鴻基

大氣科學系

國立台灣大學

## 摘要

本文章中測試兩種數值方法，一種是 Smolarkiewicz 法 (1983, 1984)，另一種是 Hsu and Arakawa 法 (1990)。前者是二階正定義方法，後者是三階數值方法。

根據我們的研究結果，Smolarkiewicz 法校正階段的反覆次數最多兩次。在二維方法的測試方面，不論 split 2-D 或是 2-D, Hsu and Arakawa 法的結果都一樣。Hsu and Arakawa 法似乎比 Smolarkiewicz 法更有效率。

## 一、引言

在大氣模式的數值積分過程中，負水汽量的預報在參數化時會使不穩定產生，不使負值水汽產生的人為設定，往往造成水汽量分佈、水汽的蒸發、潛熱釋放等的錯誤模擬。用二階或更高階的數值方法並無法解決上述困難，因為他們都會產生負的質量。正定義法 (positive definite schemes) 是指在數值積分的過程中保持場值為正的數值方法。

近二十年來為人所熟知的正定義法有，The flux-corrected transport (FCT) 法是由 Boris and Book (1973, 1976), Book et al. (1975) 發展而來，且 Zalesak (1979) 將 FCT 擴充到多維。FCT 法對方波和平流模擬近乎完美 (Rood, 1987)。The self-adjusting hybrid scheme (SAHS) 由 Harten (1978), Harten and Zwas (1972) 發展而來，是根據 hybrid (混合法)，其平流通量的計算是由一階正定義通量及高階法的通量權重平均而求得。SAHS 法對震波及不連續形體的處理最有效率。Clark (1979) 及 Clark and Hall (1979) 應用混合

型法的觀念在他們的大氣模式裏，他們根據 Crowley 平流法 (Crowley, 1968) 提出一混合型法，雖然這方法並不保證是正定義法，然而其法所產生的負值小得可忽略。這方法較之 FCT 法有較大的數值消散，然而其所須的計算時間僅為 FCT 法的一半。郭等 (1990) 對正定義計算方法在一維方面有作一番探討比較，本文即是其之延續。

本文中測試兩種數值方法，第一種是 Smolarkiewicz (1983, 1984) 正定義法。第二種是 Hsu and Arakawa (1990) 法。前者的方法以上流法 (upstream) 為基礎，採多次反覆逼近的方式，這方法保證不會產生負值，且沒有過強的內部消散作用，同時也有計算時間少的優點。Hsu and Arakawa 方法有很繁雜校正階段的計算，然而其結果的相位誤差幾乎可忽略。文章末尾提供上述兩種方法的電腦執行時間的比較，更有不同電腦 HP 730 workstation, digit Dec 5000/120 workstation, CDC Cyber 205 的電腦執行時間概況比較表以供讀者參

考。

## 二、測試方法概述：

我們以方程式(A)，平流方程式來測試

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\Psi) + \frac{\partial}{\partial y}(v\Psi) = 0 \quad (A)$$

所要探討的數值方法：平流方程式有解析解，能夠正確的判別所測試方法的誤差大小。我們先以一維的平流方程式(B)來研究數值方法的特性，然後再探

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\Psi) = 0 \quad (B)$$

討各方法在二維上的性質。二維測試方面分兩種途徑，一種是 split 方式，用原來一維的程式先作 x 方向的模擬，再作 y 方向的模擬。另一種是處理方程式(A)二維方程式，直接作二維的測試。

一維的測試範圍為  $[-1, 1]$ ，使用週期性邊界條件，風場  $u = 1$ ，格點數 33 點 ( $\Delta x = \frac{1}{16}$ )， $\Delta t$  取  $1/160$ ，繞一圈共須 320 積分次數。所用的  $courant\ no. = 0.1$ ，使用很小的時距，所以計算誤差主要來自空間差分，我們以一高斯波形來測試

$$e^{-25x^2}$$

中心點放在 0 點的位置。

二維的測試範圍為  $x: [-1, 1]$ ， $y: [-1, 1]$ ，格點數為  $33 \times 33$  ( $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{16}$ )。  $\Delta t = 1/160$ 。以一圓形風場來測試(圖一)，角速度  $w = 1/\sqrt{2}$ ，最大風速  $|V_{max}| = 1$ ，繞一圈須 1421 積分次數。所用的最大  $courant\ no. = 0.14$ 。二維的高斯波形為

$$e^{-25[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}$$

高斯波形的中心點  $(x_0, y_0) = (-0.3, -0.3)$

在分析範圍的左下角，見圖二，和邊界尚有一段距離，不會受邊界的影響，邊界條件全部設定為零。

以下簡述二方法的特性及注意要點。

### 1. Smolarkiewicz 法

Smolarkiewicz (1983) 提出的正定義平流方法，含有預報-校正 (predictor - corrector) 兩個步驟。這方法有簡單，內部擴散小 (Small implicit diffusion) 以及電腦計算時間少的優點。 Smolarkiewicz (1983) 法的原理是先以上游法 (upstream method) 作預報，然後推導出反擴散速度 (antidiffusion velocity) 以補償上游法的內部擴散之反應。所以在修正上游法步驟，以反擴散速度取代初始風場平流速度。因為反擴散速度是一種輻合風場，所以可使上游法擴散出的質量再度聚集起來。理論上修正步驟可以一再的重覆計算進行。

以下指出 Smolarkiewicz 法的一些特點及使用時注意要點：

- (1) Smolarkiewicz 法在預報及校正階段都是使用上游法所以保證是正定義方法。
- (2) Smolarkiewicz 法的相位有往上游方向偏移的現象。
- (3) 當重覆多次校正步驟時，除第一次的校正步驟外，均須由上一反擴散速度來求這一次的反擴散速度，不可每次都由初始風場來求反擴散速度。因為校正階段是用反擴散速度來當平流風場，所以其所含的內部擴散項的平流風場是反擴散速度。因此第二次校正階段的反擴散速度須由第一次校正階段的反擴散速度來求得，依此類推。
- (4) 二維的應用方面本文尚未加入交錯項 (cross-space partial derivative terms)。 Smolarkiewicz (1984) 指出沒有交錯擴散項，當重覆校

正階段則會產生額外的能量。

Smolarkiewicz (1983) 法進行步驟，收放於附錄 A。

## 2. Hsu and Arakawa 法

Hsu and Arakawa (1990) 法是一三階精確度的方法，是根據 Takacs (1985) 發展而來。在我們的測試中，Hsu and Arakawa 法的負值大小，在一維裏約是  $10^{-6}$ ，在二維裏約是  $10^{-7}$ ，所以 Hsu and Arakawa 法大約是正定義法。其方法有相當複雜的校正階段計算，其校正理念是當一格點的值若為零時，其向外的通量設定為零，而進來的通量不為負所發展而來 (Hsu and Arakawa 1990)。Hsu and Arakawa 法的計算步驟收在附錄 B。

## 三、結果與討論

圖三是 Smolarkiewicz 法一維高斯波形繞一圈的測試結果。預報階段的上游法有很強的擴散作用，經由校正階段一次、二、三次，都能將預報階段擴散出去的質量再度聚集起來，作一次及兩次的校正步驟，所聚集回來的質量較顯着，作三次的校正結果和兩次的校正結果相去不遠，也就是說作三次校正比兩次校正增加不了多少精確度，然而卻又要花費額外的計算時間，較不合乎效率的原則。反擴散速度是一幅合風場，第一次校正階段的通量幅合大小較第二次的大一個數量級，第二次的大比第三次的大 1 ~ 2 個數量級以上。由通量大小可看出為何三次校正量不大。另外由圖三可看出 Smolarkiewicz 法的相位有往上游偏移的現象，校正階段比預報階段的相位有往上游偏移的情形。另外圖三也指出 Smolarkiewicz 法的減弱 (damping) 現象，波形繞一圈後和原來的解析解的最大值有明顯的差距。

圖四是 Smolarkiewicz 法一維的收斂測試結果，隨着解析度的增加，L2 error 減小。L2 error 的算法如下

$$L2 \text{ error} = \left[ \frac{\sum_i^N (x_i - x_a)^2}{N} \right]^{1/2}$$

這裡  $x_a$  是解析解， $x_i$  是模擬的結果。

圖四的 A 線是上游法，B、C、D 線分別是經由一、二、三次校正步驟的結果，經由校正步驟後精確度有明顯的提高。圖中明白的指出作三次校正是不必要的，尤其當解析度高時，作兩次校正步驟和作三次校正步驟結果的精確度幾乎完全一樣。

圖五是 Smolarkiewicz 法一維穩定度的測試結果。x 軸是時距，取  $\Delta t = 2^{-x}$ ，向右 Courant no. 以倍數方式增加，當  $\Delta t = 2^{-5}$  時 Courant no. = 0.5。Smolarkiewicz 法在穩定範圍內，Courant no. 愈大精確度愈高。校正步驟愈多，精確度也愈高。

Smolarkiewicz 法的二維測試部份有 2-D 及 split 2-D 兩種方式。2-D 部份尚未加入交錯擴散項，先看 2-D 部份，圖六是上游法二維高斯波形繞一圈的結果 (可對照圖二的初始場)，原來 1.0 的高度已降為 0.17，而且質量擴散得很開。圖七是 Smolarkiewicz 法經一次校正步驟的結果，中心強度已聚集回來達 0.51，中心位置往上游偏移。圖八是兩次校正步驟的結果，中心值為 0.69，質量更加聚集。圖七和圖八兩者的中心位置似乎相同，經由多次的校正階段似乎不會加速相位往上游偏移。圖九及圖十是 split 2-D 經一次及二次校正步驟的結果，中心強度分別是 0.51 及 0.7，較之 2-D (圖七及八) 稍強。split 2-D 比 2-D 似乎可以有稍好的精確度。圖七、八、九、十的中心位置似乎完全相同。更值得注意的是這四張圖除波形所

在位置外，其他部份非常潔淨完全沒有雜波，這足以證明 Smolarkiewicz 法絕對是正定義方法。對照圖十一是四階定差法繞一圈的結果，中心值 0.94 消散很少，相位偏移也很小，然而周圍的雜波很多，高斯波形旁邊有達  $-10^{-2}$  的負值產生。我們將圖二、六、七、八以較賞心悅目的方式繪成立體圖，為圖十二、十三、十四及十五，圖十三的上游法繞一圈高度已降得很低。

圖十六是 Smolarkiewicz 法 2-D 的收斂速度測試結果，和一維的情形比較（見圖四），除了收斂速度不同外，大致上 2-D 和一維得相同的結論。就效率性而言，Smolarkiewicz 法二維方面仍不需要執行第三次校正步驟。Smolarkiewicz 法 split 2-D 的收斂結果比 2-D 有稍好的精確度。

圖十七是 Smolarkiewicz 法二維穩定度測試的結果， $\Delta t = 2^x$ 。圖中，A、B 線是 2-D，C、D 線是 split 2-D，A、C 線是經由一次校正的結果，B、D 線是經由二次校正的結果。在兩次校正方面，split 2-D 可能使用最大  $\Delta t_{max} = 2^{-4}$  而 2-D  $\Delta t_{max} = 2^{-5}$ ，而 split 2-D 使用較大  $\Delta t$  卻比 2-D 使用較小  $\Delta t$  有較高的精確度。對照圖五（Smolarkiewicz 法一維穩定度的結果），二維和一維一致指出，Smolarkiewicz 法在穩定度限制內，使用較大的時距（courant no. 變大），精確度愈高。

Hsu and Arakawa 法一維測試的結果是圖十八，圖中也納入上游法、Smolarkiewicz 法一起比較。Hsu and Arakawa 法幾乎沒有相位偏移的現象，和其他正定義方法一樣存在有減弱的現象。Hsu and Arakawa 法一維的收斂情形在圖十九，圖中也收錄他種方法來比較。A 線是上游法為一階法，B、C 線是 Smolarkiewicz 法為二階方法，D 線是 Arakawa 法為三階法，E 線是四階定差法。愈高階

的方法，有愈高的精確度。圖二十是 Hsu and Arakawa 法一維的穩定度測試結果， $\Delta t = 2^x$ 。當  $\Delta t = 2^{-4}$  時  $u = 1$ ， $\Delta x = \Delta t$  courant no. = 1，因為預報階段的上游法，不需要作內插運算而校正階段沒有執行，所以精確度達  $10^{-10}$ 。也就是說當 courant no. = 1 時 Hsu and Arakawa 法即為上游法，而時距和網格距相等，上游法每次預報剛好平流一個格距，不須作內插，所以可以達很高的精確度。

Hsu and Arakawa 法的二維測試結果見圖二十一及二十二。圖二十一為 2-D 高斯波形繞一圈的結果，而圖二十二為 split 2-D 的結果，二者幾乎完全一樣。Smolarkiewicz 法的 2-D 及 split 2-D 結果並不相同（圖七、八、九、十）。圖二十三是 Hsu and Arakawa 法 2-D 的收斂結果和 split 2-D 的收斂結果幾乎完全相同，圖二十一、二十二、二十三得一致的結論，Hsu and Arakawa 法 2-D 和 split 2-D 二者的結果幾乎完全相同，得相同的精確度。圖二十四是 Hsu and Arakawa 法穩定度的測試，A 線是 2-D，B 線是 split 2-D，split 2-D 比 2-D 可以用較大的時距，因為對一數值方法而言，一維的穩定度限制恰為二維穩定度限制的  $\sqrt{2}$  倍，2-D 有較嚴格的穩定度限制，所以比 split 2-D 只能用較小的時距。

一種數值方法無論應用在一維及二維時，應該有相同的收斂速率。一維和二維的不同，只是積分狀態不同，所用方法的特性應是一樣的。將圖十九的一維 Hsu and Arakawa 法結果及圖二十三的二維 Hsu and Arakawa 法結果繪在一起，即為圖二十五，A 線是一維，B 線是二維。兩條線有相同的收斂速率，這表示 Hsu and Arakawa 法一維及二維的測試表現出相同的特性。反觀圖二十六 Smolarkiewicz 法一維及二維的收斂情形並不相同，圖中 A、B 是

一維，C、D 是二維，A、C 是經由一次校正的結果，B、D 是經由二次校正的結果，A 和 C 線的斜率並不相同，B、D 的斜率也不同。在圖十六 Smolarkiewicz 法二維的收斂情形時，我們曾指出其 2-D 和 split 2-D 的收斂結果大致相同，若是說圖二十六一維和二維的收斂速率不同，是因是我們的二維處理尚未納入交錯擴散項之故，然而 split 2-D 可以表現出一維的特性，並沒有交錯擴散項的困擾。圖二十六一維及二維的收斂速率不同，應是 Smolarkiewicz 方法本身問題所致。

另外以下討論上述兩種數值方法在處理方波 (square wave) 的一些結果。圖二十七是 Smolarkiewicz 法對方波繞一圈的情形，結果還不錯，仍保持波形為正值，圖二十八是 Smolarkiewicz 法對方波的收斂測試，解析度變大，精確度並不會明顯增加。圖二十九是 Hsu and Arakawa 法處理方波繞一圈的情形，表現比 Smolarkiewicz 法 (圖二十七) 稍好，然而圖三十 Hsu and Arakawa 法的方波收斂測試和圖二十八 Smolarkiewicz 法的結果類似，兩種方法對方波的處理，在精確度的測試上，隨着解析度的增加，精確度並沒有明顯收斂增加。Hsu and Arakawa 法及 Smolarkiewicz 法都是泰勒展開法的應用，泰勒展開並不適用在不連續點 (方波的轉角處) 的地方。因此 Hsu and Arakawa 法要應用在等熵座標中，零質量點的模擬方面，零質量區的形狀常是不連續的，要處理這些不連續區域，Hsu and Arakawa 法應無法呈現其效率性。

表一是 Smolarkiewicz 法、Hsu and Arakawa 法及四階定差法在 workstation HP 730 的電腦執行時間 (CPU) 測試。左邊算過來第二欄是各種方法在相同的  $\Delta t$ ， $\Delta x$ ， $U$  下的 CPU 時間比較，取  $\Delta x = \frac{1}{16}$ ， $\Delta t = \frac{1}{160}$ ， $U=1$ ，courant no. = 0.1，在相同穩定度的情況下 Hsu and Arakawa 法是

最花時間的，大約是 Smolarkiewicz 法校正兩次 CPU 的 1.6 倍。而 split 2-D 要處理額外的 I/O，所須要的 CPU 時間比 2-D 來得多。四階定差法花費的 CPU 時間最少，是最便宜的方法。右邊三欄是有關穩定度測試方面的，在穩定度測試中我們可以得出各種方法最大可能使用的時距，結果放在右邊算來第三欄，而在這時距下的精確度值放在右邊算來第二欄，所花費的 CPU 時間放在右邊第一欄。

Smolarkiewicz 法方面，在第二次校正時 split 2-D 比 2-D 可以使用較大的時距，較省的 CPU 時間，值得注意的是 split 2-D 比 2-D 使用較大的時距，卻有較高的精確度。因此 Smolarkiewicz 法在校正兩次方面，使用 split 2-D 比 2-D 來得有效率。Hsu and Arakawa 法的 split 2-D 似乎是最有效率的，它比 Smolarkiewicz 法可以使用更大的時距，而精確度也比 Smolarkiewicz 法來得高，CPU 時間 (3.8) 也比 Smolarkiewicz 法的二次校正 CPU 時間 (8.8 及 4.6) 來得少。Hsu and Arakawa 法雖然有繁雜的校正階段，似乎應該計算花費多，Smolarkiewicz 法計算簡單，似乎花費時間少，然而由表一的右邊三欄最大可能時距、精確度及 CPU 時間的比較下，Hsu and Arakawa 法的 split 2-D 比 Smolarkiewicz 法來得有效率。四階定差法在時距  $2^{-5}$  下的精確度已升高到  $10^{-1}$ ，在  $\Delta t = 2^{-5}$  時，已達其穩定區的上限了。表二和表一所要表達的意念完全相同只是用不同電腦，用 digit Dec 5000/120 的機器來比較不同電腦執行的差異，和表一比較，得到完全相同的最大可能時距，而精確度值幾乎完全相同。Dec 5000/120 和 HP 730 的不同點，就表一及表二看來，是額外的 I/O 較花時間，split 2-D 比 2-D 花了更多的時間。在 HP730 就 Hsu and Arakawa 法而言，split 2-D 的 CPU 時間約是 2-D 的 1.1 倍，到了 Dec 5000/120，提高到 1.48 倍，表三是 CDC

Cyber 205 的 CPU 時間，和表一及表二比較，三個表有完全相同的最大可能時距和近乎相同的精確值，Cyber 205 也顯現出，額外的 I / O 較花時間，split 2-D 比 2-D 花更多的時間。

#### 四、結論

本文在一維及二維上詳盡探討了 Smolarkiewicz 法及 Hsu and Arakawa 法的特性，所得的重要結論歸納成下述幾點。

1. Hsu and Arakawa 法不論是一維或是二維（包括 split 2-D 及 2-D）均表現出相同的特性（見圖二十五），一維及二維有相同的收斂斜率。Smolarkiewicz 法一維及二維的收斂速率不同（圖二十六）。
2. 在 CPU 時間比較上，Hsu and Arakawa 法的 split 2-D 比 Smolarkiewicz 法來得有效率（表一、二、三）。
3. 在方波的測試上，Hsu and Arakawa 法及 Smolarkiewicz 法都不具效率性。兩種方法的收斂速率測試上都沒有收斂。
4. Smolarkiewicz 法至多作兩次校正，不需要作第三次校正，第三次校正所增加的精確度有限，卻需要額外的計算時間。
5. split 2-D 比 2-D 可以用較大的時距。二維的方法比一維的方法有更嚴謹的穩定度限制。

文後我們將對某些問題進行探討，一是 Smolarkiewicz 法加入交錯擴散項的結果，是否會改變圖二十六一維及二維收斂速率不同的結論，這是我們最感興趣的。一是 Smolarkiewicz 法相位往上游方向偏移的現象。我們知道上游法相位不會偏移，為何 Smolarkiewicz 法作了校正步驟相位便會偏移，是不是擴散項的處理方式或是擴散項本身就有此特性，這都是我們急切想知道的。Smolarkiewicz

法的校正步驟不論再多作幾次，相位都不會再往上游偏移，不知是為什麼。

#### 五、附錄A：Smolarkiewicz方法

Smolarkiewicz 法是以預報子及校正子的型式表示。

預報子：

$$F_{i+1/2} = \frac{(u_{i+1/2} + |u_{i+1/2}|) q_i^n}{2.0} + \frac{(u_{i+1/2} - |u_{i+1/2}|) q_{i+1}^n}{2.0}$$

$$q_i^n = q_i^n - \Delta t \delta_x F_i$$

校正子：

$$\tilde{u}_{i+1/2} = \frac{(|u_{i+1/2}| \frac{\Delta x}{2.0} - \Delta t u_{i+1/2}^2)(q_{i+1}^n - q_i^n) * S}{\frac{\Delta x}{2.0}(q_i^n + q_{i+1}^n + \epsilon)}$$

$$F_{i+1/2}^* = \frac{(\tilde{u}_{i+1/2} + |\tilde{u}_{i+1/2}|) q_i^n}{2.0} + \frac{(\tilde{u}_{i+1/2} - |\tilde{u}_{i+1/2}|) q_{i+1}^n}{2.0}$$

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \Delta t \delta_x F_i^*$$

這裡  $\epsilon = 10^{-15}$ ， $S$  是一參數用來改進實驗解的品質。上標  $n$  是指積分過程中第  $n$  個時階。根據 Smolarkiewicz (1983) 指出，為了改進結果，校正子的階段可反覆運作。

#### 六、附錄B：Hsu & Arakawa方法

Hsu & Arakawa 法是以預報子及校正子的型式表示。

預報子：

$$q_i^n = q_i^n - \Delta t \delta_x F_i$$

其中

$$F_{i+1/2} = u_{i+1/2}^+ q_i^n + u_{i+1/2}^- q_{i+1}^n$$

$$u_{i+1/2}^+ = 0.5(u_{i+1/2} + |u_{i+1/2}|)$$

$$u_{i+1/2}^- = 0.5(u_{i+1/2} - |u_{i+1/2}|)$$

校正子：

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \Delta t \delta_x F_i^n$$

其中

$$F_{i+1/2}^n = u_{i+1/2}^+ \frac{q_{i+1}^n + q_i^n}{2.0} + u_{i+1/2}^- \frac{q_i^n + q_{i+1}^n}{2.0} + G_{i+1/2}$$

$$G_{i+1/2} = -\alpha_{i+1/2} [u_{i+1/2}^+ \beta_{i+1/2}^+ (q_{i+1}^n - q_i^n) - \hat{u}_{i+1/2}^+ \hat{\beta}_{i+1/2}^+ (q_i^n - q_{i-1}^n) + u_{i+1/2}^- \beta_{i+1/2}^- (q_i^n - q_{i+1}^n) - \hat{u}_{i+1/2}^- \hat{\beta}_{i+1/2}^- (q_{i+1}^n - q_{i+2}^n)]$$

$$\alpha_{i+1/2} = \frac{1 + |u_{i+1/2}| \frac{\Delta t}{\Delta x}}{6.0}$$

$$\beta_{i+1/2}^\pm = \frac{1 - 2\alpha_{i+1/2} r_{i+1/2}^\pm}{2\alpha_{i+1/2}} + 1$$

$$\hat{\beta}_{i+1/2}^\pm = 1 - r_{i+1/2}^\pm$$

$$r_{i+1/2}^+ = \frac{(q_{i-1}^n - 2q_i^n + q_{i+1}^n)^2}{(q_{i-1}^n - 2q_i^n + q_{i+1}^n)^2 + q_i^n q_{i+1}^n + \epsilon}$$

$$r_{i+1/2}^- = \frac{(q_i^n - 2q_{i+1}^n + q_{i+2}^n)^2}{(q_i^n - 2q_{i+1}^n + q_{i+2}^n)^2 + q_i^n q_{i+1}^n + \epsilon}$$

$$\hat{u}_{i+1/2}^+ = (u_{i+1/2}^+ u_{i-1/2}^-)^{1/2}$$

$$\hat{u}_{i+1/2}^- = (|u_{i+1/2}^-| |u_{i+3/2}^-|)^{1/2}$$

這裡上標  $n$  指的是積分過程中第  $n$  個時階，且  $\epsilon =$

$10^{-15}$ 。

## 參考文獻

郭鴻基、柳再明、周仲島，1990：平流傳輸方程

的計算：交錯網格之有限差分法。大氣科學

，18，159—169。

Book, D. L., J. P. Boris and K. Hain, 1975:

Flux-corrected transport. II: Generalizations of the method. J. Comput. Phys., 18, 248-283.

Boris, J. P., and D. L. Book. 1973: Flux-corrected transport. I: SHASTA, a fluid transport algorithm that works. J. Comput. Phys., 11, 38-69.

\_\_\_\_\_, and \_\_\_\_\_, 1976: Flux-corrected transport. III: Minimal-error FCT algorithms. J. Comput. Phys., 20, 397-431.

Clark, T. L., 1979: Numerical simulations with a three-dimensional cloud model: Lateral boundary condition experiments and multicellular severe storm simulations. J. Atmos. Sci., 36, 2191-2215.

\_\_\_\_\_, and W. D. Hall, 1979: A numerical experiment on stochastic condensation theory. J. Atmos. Sci., 36, 470-483.

Crowley, W. P., 1968: Numerical advection experiments. Mon. Wea. Rev., 96, 1-11.

Harten, A., 1978: The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities. III: Self-adjusting hybrid schemes. J. Comput. Phys., 32, 363-389.

\_\_\_\_\_, and G. Zwas, 1972: Self-adjusted hybrid schemes for shock computations. J. Comput. Phys., 6, 568-583.

Hsu, Y.-J., and A. Arakawa, 1990: Numerical modeling of the atmosphere with an isentropic vertical coordinate. Mon. Wea. Rev., 118, 1933-1959.

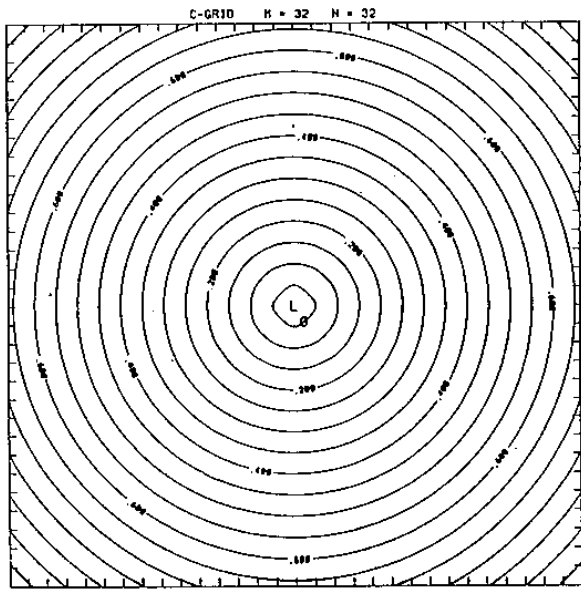
Rood, R. B., 1987: Numerical advection algorithms and their role in atmospheric transport and chemistry models. Rev. of Geophys., 25, 71-100.

Smolarkiewicz, P. K., 1983: A simple positive definite advection scheme with small implicit diffusion. Mon. Wea. Rev., 111, 479-486.

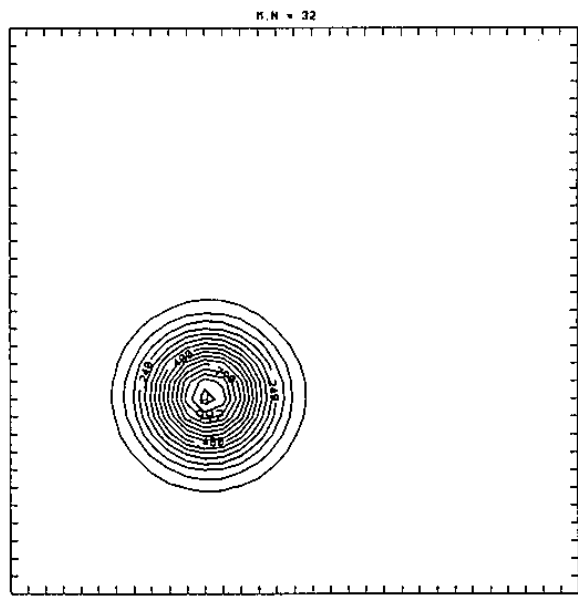
\_\_\_\_\_, 1984: A fully multidimensional positive definite advection transport algorithm with small implicit diffusion. J. Comput. Phys. 54, 325-362.

Takacs, L.L., 1985: A two-step scheme for the advection equation with minimized dissipation and dispersion errors. Mon. Wea. Rev., 113, 1050-1065.

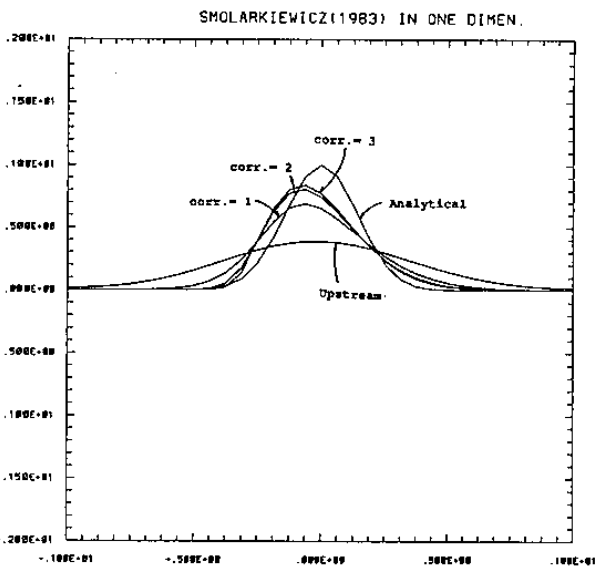
Zalesak, S. T., 1979: Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. J. Comput. Phys., 31, 335-362.



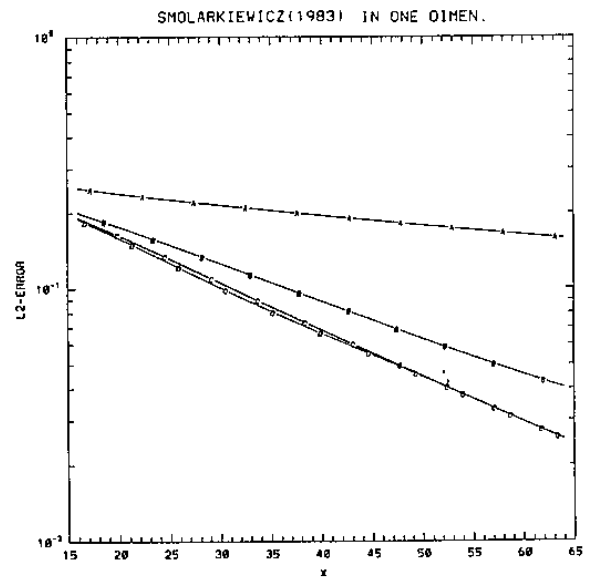
圖一 圓形風場，角速度 =  $1/\sqrt{2}$ ， $|\vec{v}_{max}| = 1$ 。



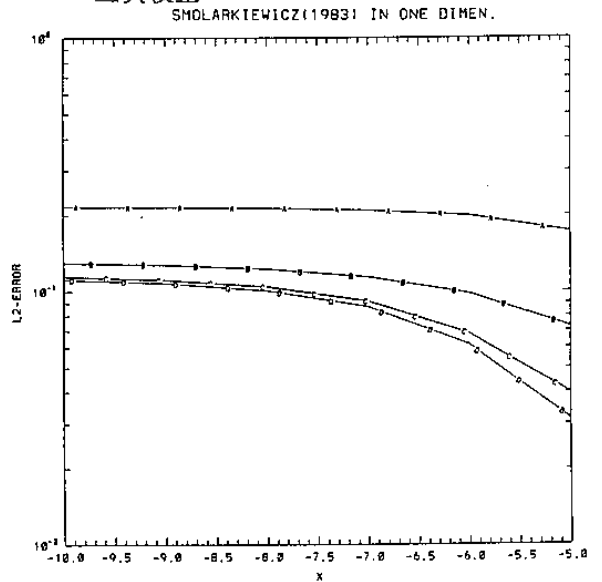
圖二 初始高斯波形中心極值 = 0.992。



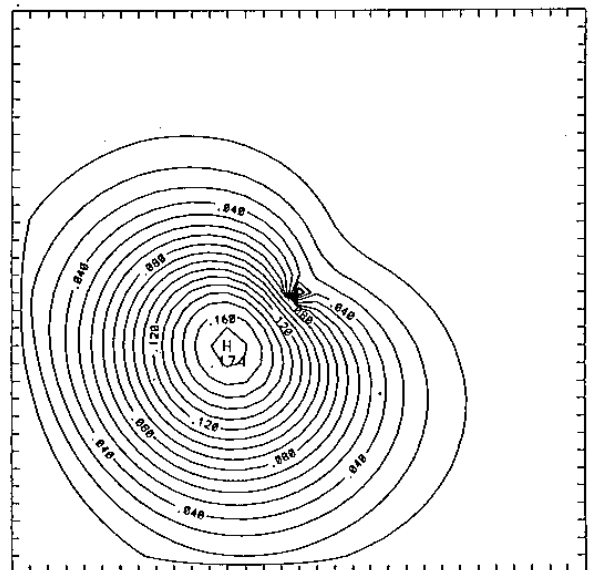
圖三 Smolarkiewicz 法波形繞一圈的結果。



圖四 Smolarkiewicz 法一維的收斂測試。A 線是上游法，B、C、D 線分別是一次、二次、三次校正。

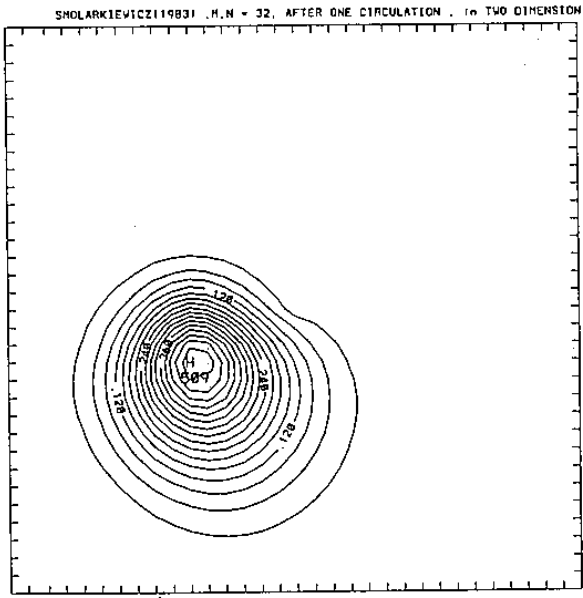


圖五 Smolarkiewicz 法一維穩定度的測試結果，A、B、C、D 線和圖四同， $\Delta t = 2^x$ 。

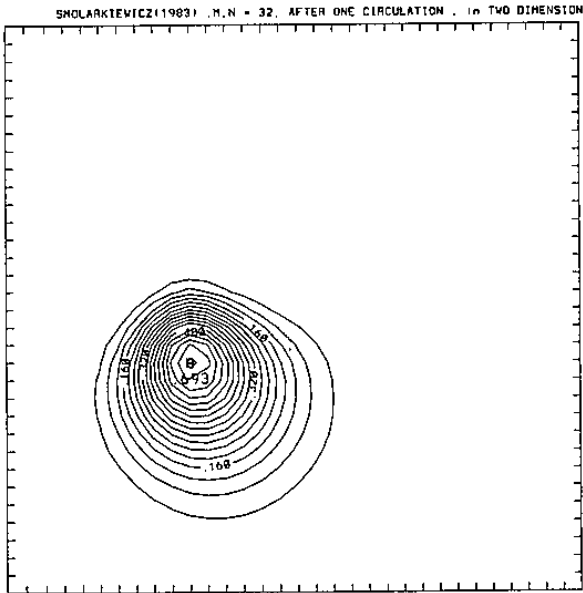


圖六 上游法，二維高斯波形繞一圈的結果。

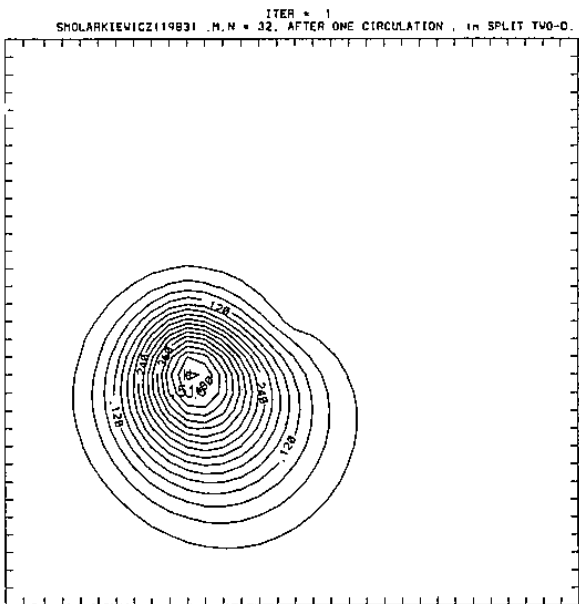




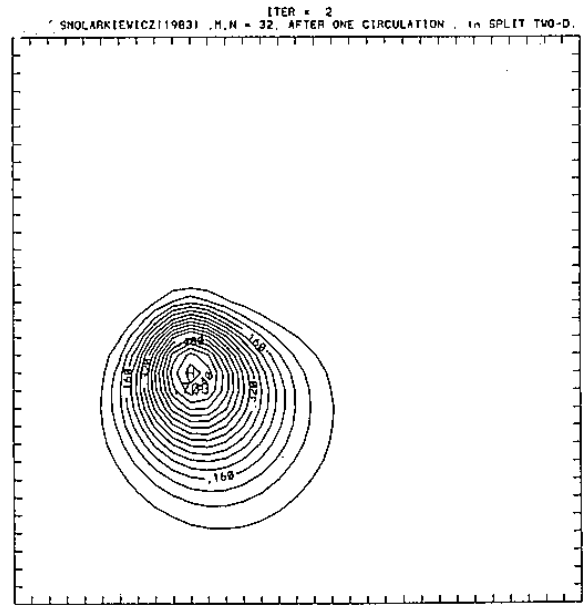
圖七 Smolarkiewicz 法二維波形繞一圈經一次校正步驟的結果。



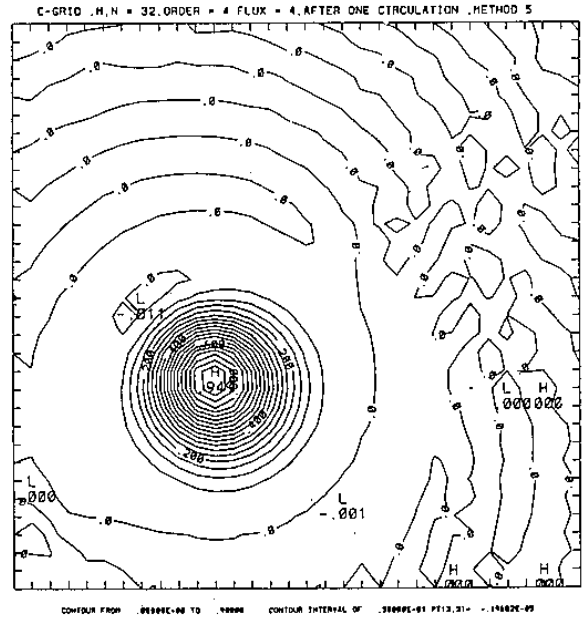
圖八 和圖七同，唯是二次校正。



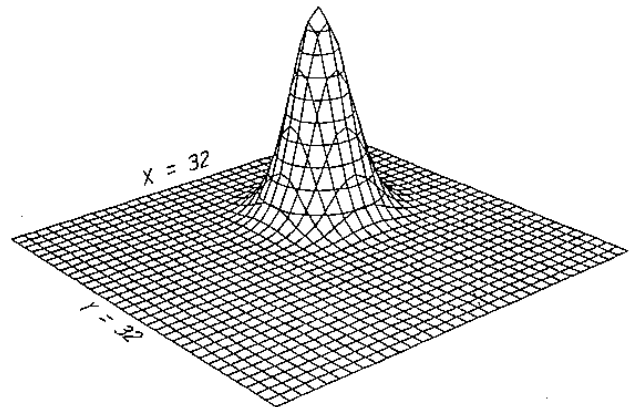
圖九 和圖七同，唯是 split 2-D。



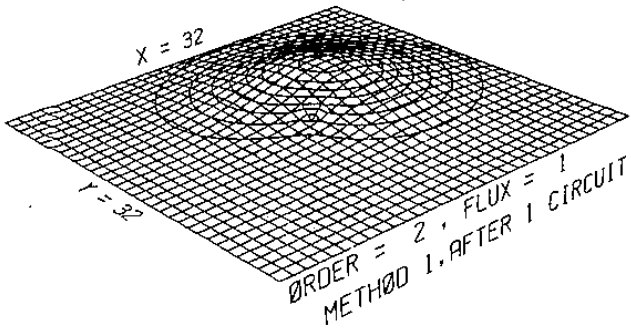
圖十 和圖八同，唯是 split 2-D。



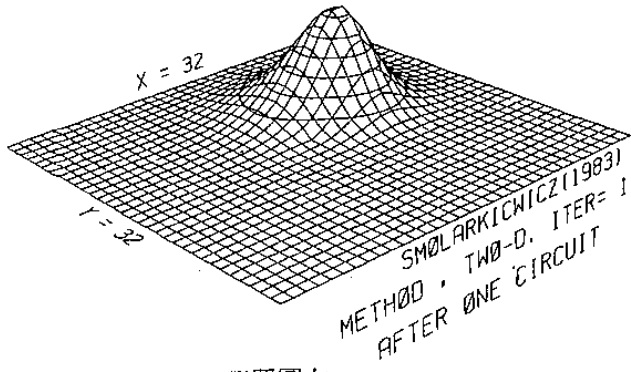
圖十一 四階定差法繞一圈的結果。



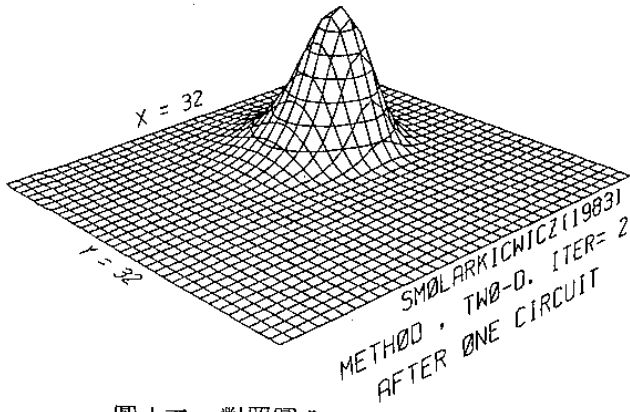
圖十二 初始場。



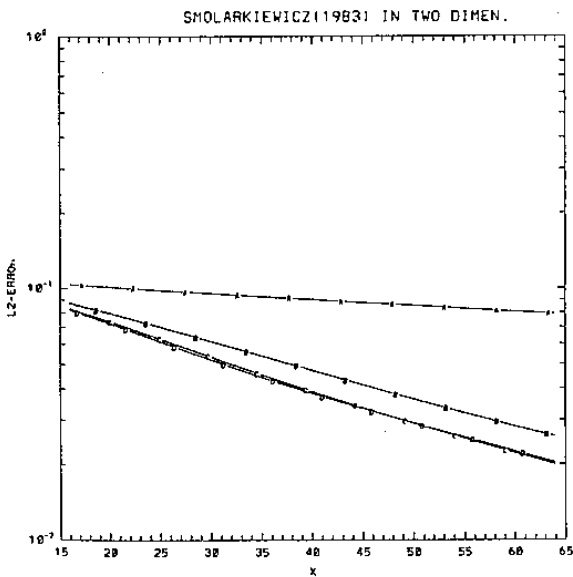
圖十三 上游法 (對照圖六)。



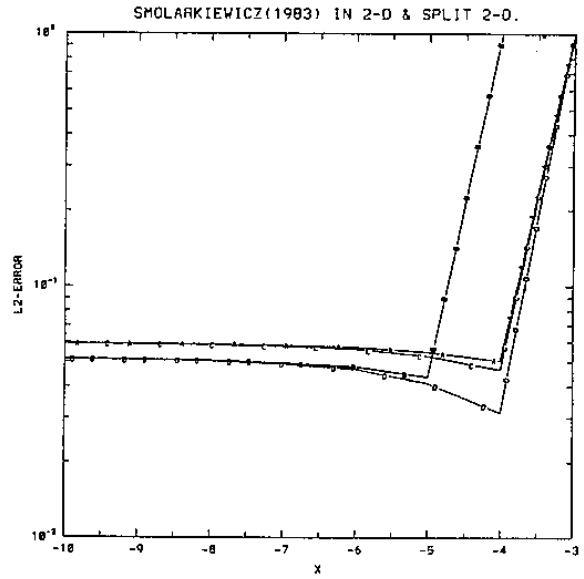
圖十四 對照圖七。



圖十五 對照圖八。

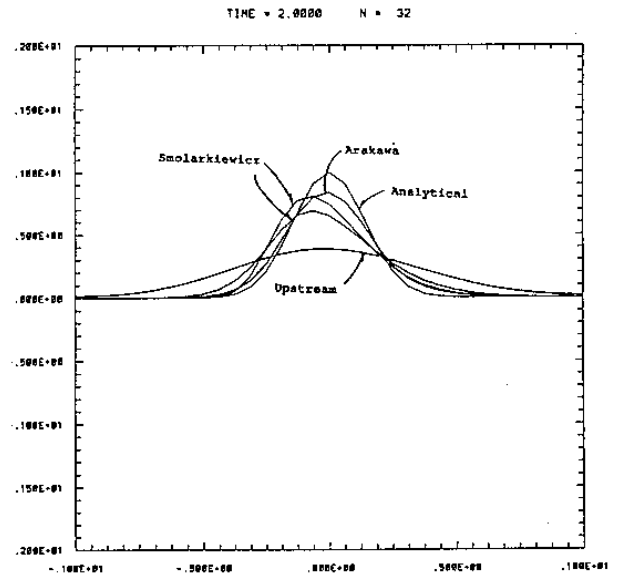


圖十六 Smolarkiewicz 法二維的收斂速度測試結果

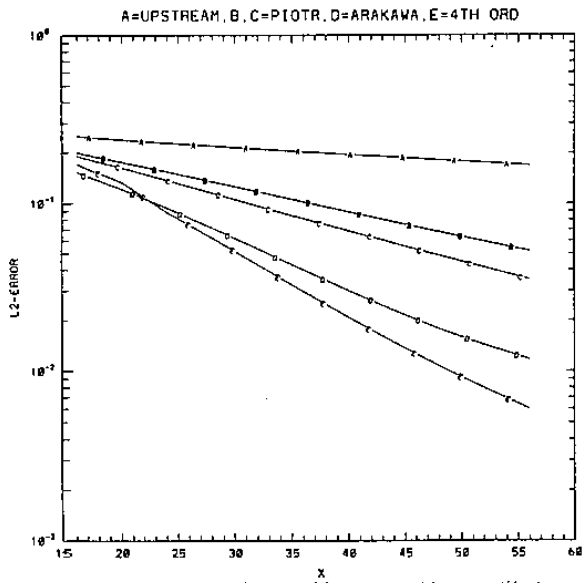


圖十七 Smolarkiewicz 法二維穩定度的測試

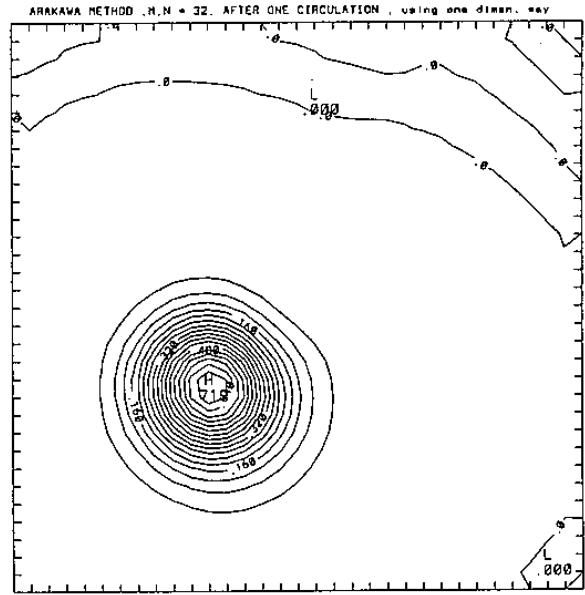
$\Delta t = 2^x$ , A、B 線和 2-D, C、D 線是 split 2-D, A、C 線是一次校正的結果, B、D 線是經由二次校正的結果。



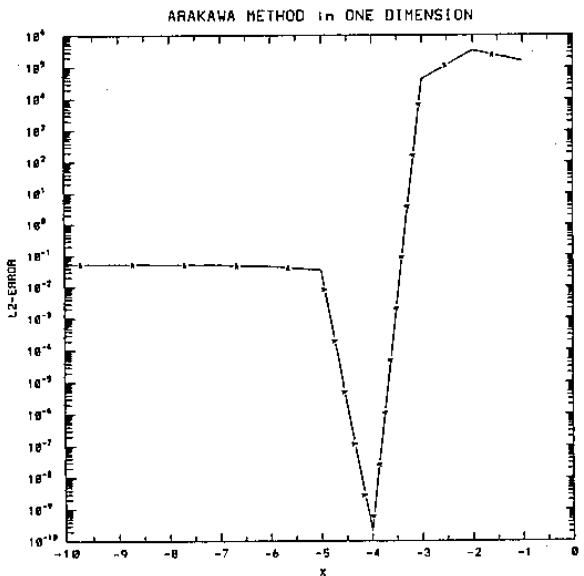
圖十八 Smolarkiewicz 法, Hsu and Arakawa 法 上游法三種方法繞一圈的結果。



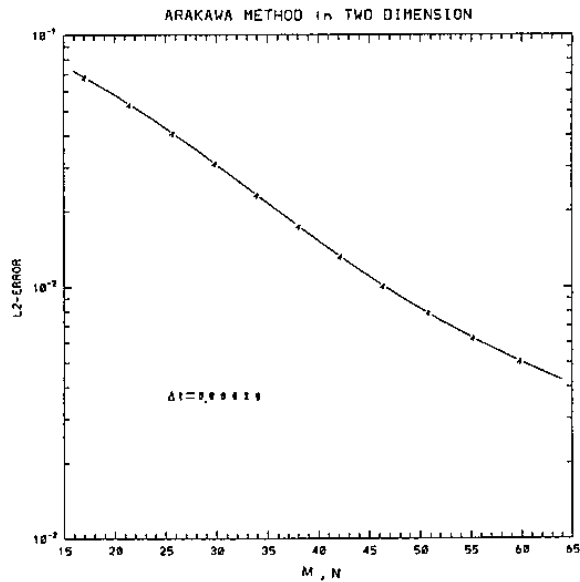
圖十九 一維收斂速度的結果。A線是上游法，B、C是 Smolarkiewicz 法，D線是Hsu and Arakawa 法，E是四階差分法。



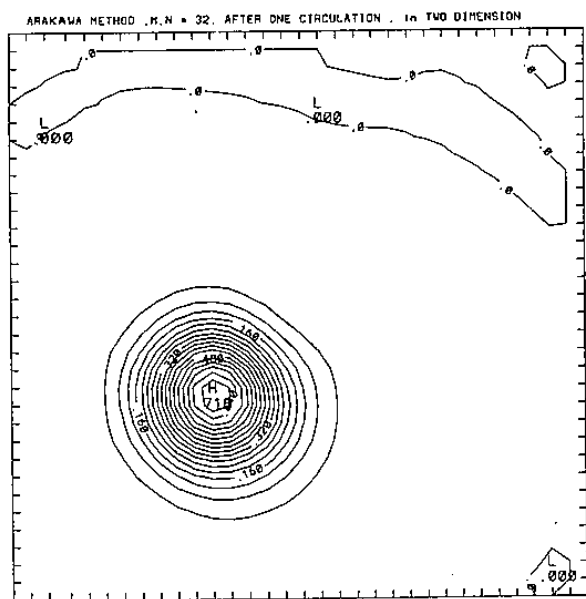
圖二十二 Hsu and Arakawa 法 split 2-D 繞一圈的結果。



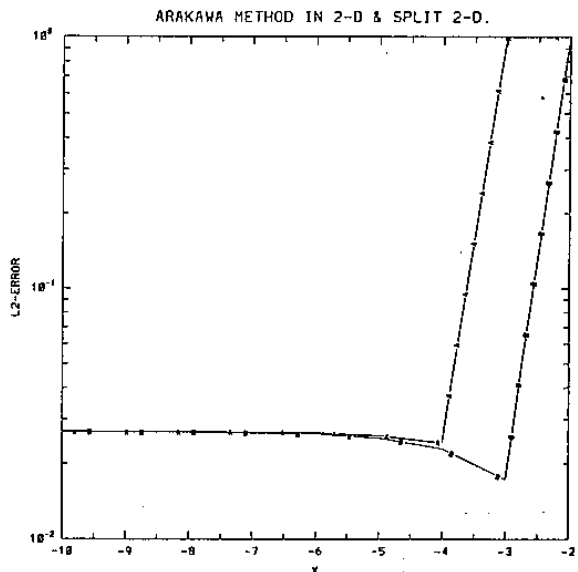
圖二十 Hsu and Arakawa 法一維穩定度的測試結果， $\Delta t = 2^x$ 。



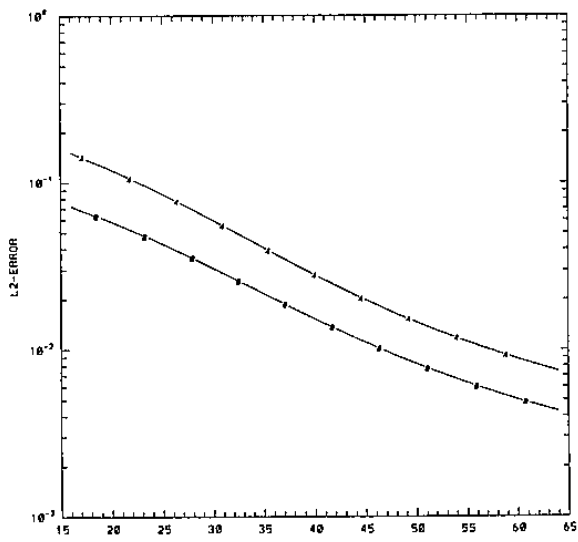
圖二十三 Hsu and Arakawa 法二維的收斂結果。



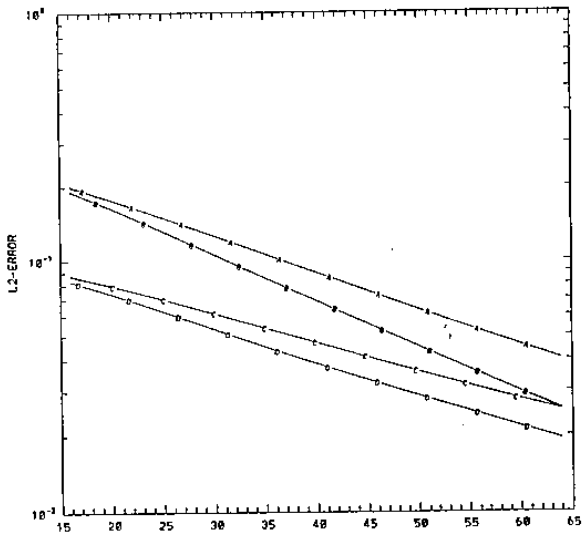
圖二十一 Hsu and Arakawa 法 2-D 繞一圈的結果。



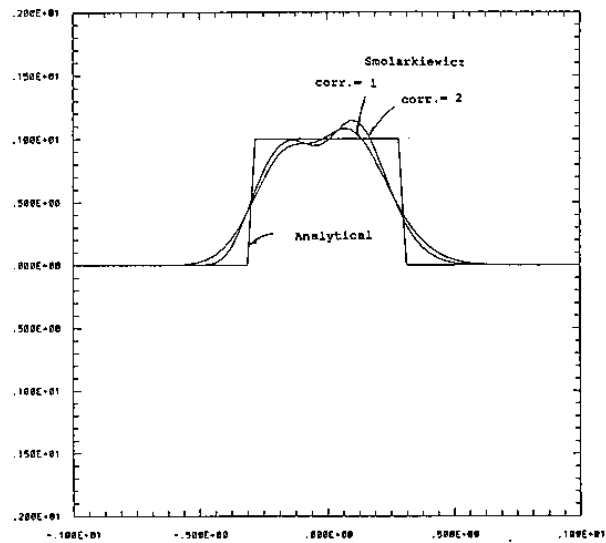
圖二十四 Hsu and Arakawa 法二維的穩定度測試，A線是 2-D，B線是 split 2-D。



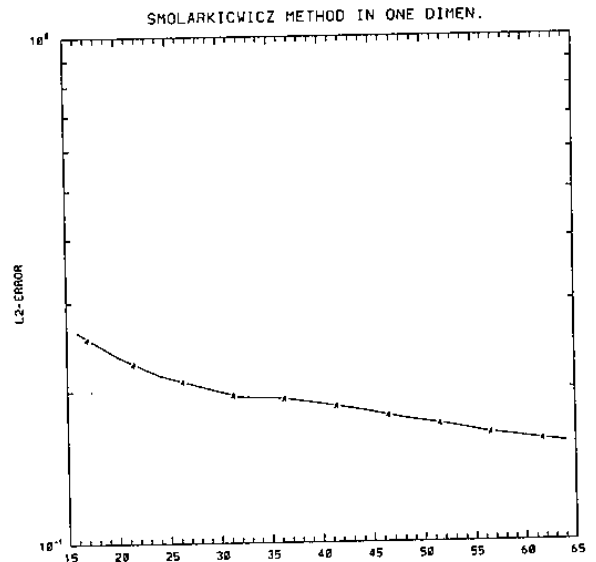
圖二十五 Hsu and Arakawa 法的收斂結果，A線是一維，B線是二維。



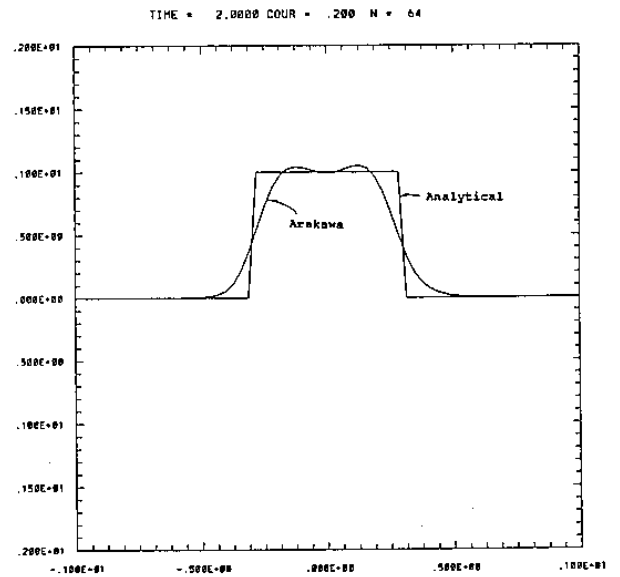
圖二十六 Smolarkiewicz 法的收斂情形，A、B 是一維，C、D 是二維，A、C 是一次校正的結果，B、D 是二次校正的結果



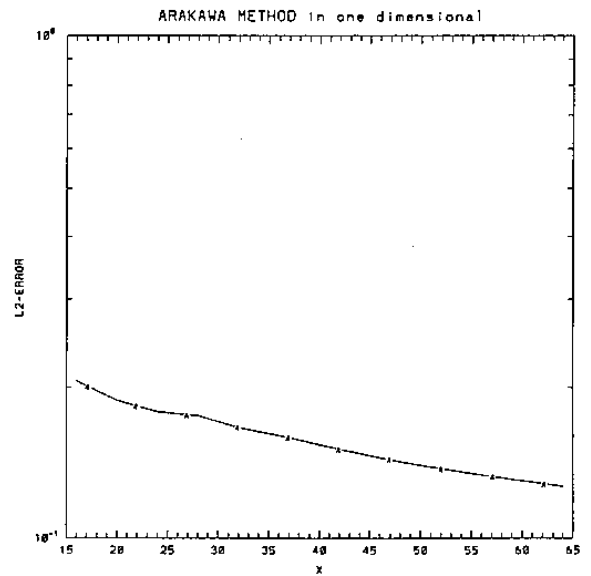
圖二十七 Smolarkiewicz 法處理方波繞一圈的結果。



圖二十八 Smolarkiewicz 法處理方波的收斂結果。



圖二十九 Hsu and Arakawa 法處理方波繞一圈的結果。



圖三十 Arakawa 法處理方波的收斂情形。

HP 730 U=1, $\Delta x = 1/16$	$\Delta t = 1/160$ CPU	最大 $\Delta t$ (可能)	$\Delta t_{max}$ 之 L2 Error	$\Delta t_{max}$ 之 CPU	
Smolarkiewicz method (1983)					
(1) 2D	I	25.2	$2^{-4}$	$5.057139 \times 10^{-2}$	2.7
	II	42.7	$2^{-5}$	$4.365276 \times 10^{-2}$	8.8
(2) Split 2D	I	33.7	$2^{-4}$	$4.653119 \times 10^{-2}$	3.5
	II	47.2	$2^{-4}$	$3.147084 \times 10^{-2}$	4.6
Hsu and Arakawa method (1990)					
(1) 2D	68.3	$2^{-4}$	$2.415415 \times 10^{-2}$	7.4	
(2) Split 2D	74.9	$2^{-3}$	$1.726805 \times 10^{-2}$	3.8	
4th order finite difference	16.1	$2^{-5}$	$5.713267 \times 10^{-1}$	3.2	

表一 Smolarkiewicz 法、Hsu and Arakawa 法及四階定差法在 HP730 的 CPU 測試。

digit Dec 5000/120 U=1, $\Delta x = 1/16$	$\Delta t = 1/160$ CPU	可能 $\Delta t_{max}$	$\Delta t_{max}$ 之 L2 Error	$\Delta t_{max}$ 之 CPU	
Smolarkiewicz method (1983)					
1° 2D	I	36.32	$2^{-4}$	$5.057139 \times 10^{-2}$	3.84
	II	64.76	$2^{-5}$	$4.365276 \times 10^{-2}$	13.32
2° Split	I	72.7	$2^{-4}$	$4.653121 \times 10^{-2}$	7.21
	II	96.1	$2^{-4}$	$3.147082 \times 10^{-2}$	9.39
Hsu and Arakawa method					
1° 2D	125.4	$2^{-4}$	$2.415442 \times 10^{-2}$	12.76	
2° Split	180	$2^{-3}$	$1.726806 \times 10^{-2}$	8.98	
4th order finite differencing	26.6	$2^{-5}$	$6.779395 \times 10^{-1}$	5.41	

表二 和表一同，唯是 digit Dec 5000/120

CDC Cyber 205 U=1, Δx=1/16	Δt=1/160 CPU	可能 Δt <sub>max</sub>	Δt <sub>max</sub> 之 L2 error	Δt <sub>max</sub> 之 CPU	
Smolarkiewicz method (1983)					
	I 1° 2D	8.13	2 <sup>-4</sup>	5.057140 x 10 <sup>-2</sup>	0.85
	II	13.54	2 <sup>-5</sup>	4.365276 x 10 <sup>-2</sup>	2.76
	I 2° Split	11.1	2 <sup>-4</sup>	4.653122 x 10 <sup>-2</sup>	1.12
	II	15.5	2 <sup>-4</sup>	3.147084 x 10 <sup>-2</sup>	1.56
Hsu and Arakawa method					
	1° 2D	15.0	2 <sup>-4</sup>	2.415423 x 10 <sup>-2</sup>	1.98
	2° Split	21.2	2 <sup>-3</sup>	1.726806 x 10 <sup>-2</sup>	1.07
4th order finite differencing	5.53	2 <sup>-5</sup>	1.138638 x 10 <sup>-2</sup>	1.34	

表三 和表一同，唯是 CDC Cyber 205

## A Test of Positive Definite Schemes

Leou Tzay-Ming

Kuo Hung-Chi

Computer Center

Dept of Atmospheric Science

Center Weather Bureau

National Taiwan University

### ABSTRACT

This paper Studies two numerical methods. One is the Smolarkiewicz method (1983, 1984), and the other is the Hsu and Arakawa method (1990). The former is second order positive definite method and the later is third order scheme.

By our studing results, at most the number of the repetitions of the Smolarkiewicz method's corrective steps are two times. In two-dimen, scheme testing, the Hsu and Arakawa method has the same performance between split 2-D result and 2-D result. The Hsu and Arakawa method seems to have more efficient than the Smolarkiewicz method.