# 發展中的氣象局全球預報系統

郭 鴻 基　　林 沛 練

國立台灣大學大氣科學系　國立中央大學大氣物理系

## 一、引言

我們都了解數值天氣預報的改進將來自積分更完整的模式以及使用更正確的初始資料。較正確的初始資料可以由較好的儀器，更細心的觀測，更好的資料品質控制，改良的客觀分析以及初始化來獲得。較完整的模式則意謂著積分一組更能表現動力以及物理強迫作用的方程式以及使用更精確的數值方法來求解這些方程式。

自從第一次成功的積分大氣模式以來，動力模式的發展或改良就一直沒有停止過。例如，從無輻散正壓方程( Charney et al.1950 )，準地轉正壓方程( Charney et al.1956 )，濾波斜壓方程( Charney 1962 )進展到原始方程( Schuman and Hovermale 1968 )等。無法解析運動物理參數化之改進使數值天氣預報有很大之進展，其中尤以較長週期之積分以及氣候模擬方面特別顯著。例如，包含地表水汽以及能量平衡的高解析邊界層模式( Deardoff 1978)，濕對流以及積雲參數化( Arakawa and Schubert 1974，Kuo 1974 )，不可解析尺度之階層能量傳輸( Leith 1971 ; Boer et al. 1984)以及最近有關重力波曳力(gravity Wave drag )之發展(McFarlane 1987 )等。

精確的數值方法可以減少截斷誤差，例如波譜法，由於其指數收斂之特性，對水平之計算而言相當精確，而有限元素會比傳統的有限差分法更適用於有限區域模式之運算(Staniforth and Daley 1977 )。

基於精確度之需求，促成發展更有效率數值方法之動機，例如半隱法( Semi-implicit method )之發展( Robert et al. 1972 )使早期作業化之原始方程模式變成可能。波譜轉換法( Eliasen et al.1970 )之進展以及快速傅利葉轉換( FFT ) 之出現使波譜法之應用更為普及。最近半拉格蘭基法( Semi-Lagrangian method )的發展( Robert 1981 ) 使模式積分到一定週期之積分步驟減少許多。採用更有效率的數值方法允許在相同計算花費下使用更昂貴，更完整或更高解析度的數值模式。

本文，我們將引用美國NMC 以及MASL之經驗來討論發展中央氣象局全球波譜模式的一些問題。至少有三點較明顯之優點讓我們在全球模式中採用波譜法來計算。(一)採用半隱法之計算花費很小。根據Robert之估計，半隱法非常容易就可以提高六倍的計算效率。此外在波譜模式中可以採用隱式緯向平流及高波數阻尼技術來增加 2 倍的積分時距。在模式積分的過程中，數值方法、動力結構以及物理參數化之間會有強烈的相互影響。除了輻射之外波譜模式允許在每一個積分步驟中起動物理參數化之程式套。(二)消除極點的問題。在有限差分之全球模式中，極點是一個麻煩又必須處理之問題。(三)指數收斂使全球波譜模式具有高效率及高精確度之特性。唯一美中不足的是沒有快速的勒壤得轉換( Legendre transform )，當模式之解析度增加M倍時O (M3) 的勒壤得轉換計算使該轉換方法變得很沒有效率。根據ECMWF 之估計，當解析度達到T200時現行之全球波譜模式將不再是一個高效率之模式。還好美國NMC 及FNOC 最近幾年才開始使用到T80 之解析度。

第二節中我們將推導適用波譜法之全球模式的控制方程式，第三節說明非線性正模初始化之基本步驟。第四節將介紹球面調和基本函數以及波譜轉換之技巧。時間積分法，物理參數化以及模式之結構則在第五節中說明，第六節總結一些要點。

## 二、控制方程式

模式的基本方程式是由可壓縮流體運動在靜力平衡( hydrostatic balance )以及慣例近似( Traditional Approximation )下，從尤拉方程( Euler equation )推導而得之原始方程( phillips，1966 )，垂直座標為$\sigma$座標，

$$\sigma = \frac{(P-P_{top})}{(\pi - P_{top})}$$

式中$\pi$爲地面氣壓，$P_{top}$爲模式頂之氣壓。球面幾何下之絕熱控制方程式如下：

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -\int_0^1 (\nabla \cdot \pi \vec{V}) d\sigma, \tag{2.1}$$

$$\pi \dot{\sigma} = -\{\sigma \frac{\partial \pi}{\partial t} + \int_0^{\sigma} (\nabla \cdot \pi \vec{V}) d\sigma'\}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = -c_p \theta, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\alpha(G, H), \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \alpha(H, -G) - \nabla^2(\Phi + E), \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{U}{1-\mu^2}\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} - V\frac{\partial \theta}{\partial \mu} - (\dot{\sigma}\frac{\partial p}{\partial \sigma})\frac{\partial \theta}{\partial p}, \tag{2.6}$$

式中$\lambda$是經度，$\varphi$是緯度，$\mu$=Sin($\varphi$)，a是地球半徑，$f=2\Omega \mathrm{Sin}(\varphi)$，$\Omega$表示地球轉動角速度，$U=u\cos(\varphi)/a$，$V=v\cos(\varphi)/a$，$P=(P/P_0)^{R/CP}$，$E=1/2(U^2+V^2)a^2/(1-\mu^2)$

$$\alpha(A, B) = \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial A}{\partial \lambda} + \frac{\partial B}{\partial \mu}$$

由$\alpha$(A,B) 之定義，渦度($\zeta$)以及輻散度(D)分別爲

$$\zeta = \alpha(V, -U), \tag{2.7}$$

$$D = \alpha(U, V). \tag{2.8}$$

若$\zeta$，D 已知，在波譜空間很容易可以反推求U及V，(2.1)及(2.2)式中的G和H定義如下

$$G = U(\zeta + f) + (\dot{\sigma}\frac{\partial p}{\partial \sigma})\frac{\partial V}{\partial p} + c_p\frac{1-\mu^2}{a^2}\theta\frac{\partial P}{\partial \pi}\frac{\partial \pi}{\partial \mu} \tag{2.9a}$$

$$H = V(\zeta + f) + (\dot{\sigma}\frac{\partial p}{\partial \sigma})\frac{\partial U}{\partial p} + \frac{c_p\theta}{a^2}\frac{\partial P}{\pi}\frac{\partial \pi}{\partial \lambda}. \tag{2.9b}$$

爲了計算之理由，靜力方程式寫成(2.3) 之型式。詳細的垂直計算方法在本文中不描述。基本上採用洛仁子( Lorenz )之網格，以及能量保守之差分法。方程式(2.1)-(2.8) 對渦度($\zeta$)， 輻散度(D)，三度空間速度(U,V及$\dot{\sigma}$)，位溫($\theta$) ，重力位($\Phi$)以及地形氣壓($\pi$)等變數而言爲一組完整的方程式系統。每一$\sigma$層之壓力直接由狀態方程計算之。

(2.1)—(2.8)絕熱預報流程如下：

(一)先給定U，V，$\zeta$，D以及$\pi$之值

(二)由 (2.1)式預報$\pi$值

(三)由(2.2)式診斷$\dot{\sigma}$

(四)由已知的$\theta$值利用(2.3)式診斷$\Phi$值

(五)由(2.4)-(2.6)式計算G，H值以及其變化趨勢

(六)由(2.4)-(2.6)預報$\zeta$，D以及$\theta$

(七)利用(2.7)(2.8)式由$\zeta$，D診斷U及V

(八)回到步驟(二)重新開始。

下面幾節我們將討論包含物理強迫作用，精確之全球波譜法以及波譜模式之結構。

## 三非線性正模初始化

未來中央氣象局的波譜模式將會採用非線性正模初始化(NNMI-nonlinear normal mode initialization )，在模式發展之初期，將先採用絕熱之初始化。NNMI之基本步驟說明如下：爲了進行NNMI，我們必須先把模式變數對其正模(normal mode )展開，此步驟與固有函數之展開相同。固有值問題其實就是討論固有函數一般特性與固有值之關係以及固有值與固有函數邊界條件間的關聯等問題。

引用一般常用之符號，沒有強迫作用，非線性垂直離散模式之預報方程可以表示如下：

$$\frac{\partial \zeta_k}{\partial t} + 2\Omega\mu D_k + 2\Omega V_k = N_{\zeta\, k}, \tag{3.1a}$$

$$\frac{\partial D_k}{\partial t} - 2\Omega\mu\zeta_k + 2\Omega U_k + \nabla^2\Phi_k = N_{D\, k}, \tag{3.1b}$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} + \mathrm{S}D_k = N_{\Phi\, k} \tag{3.1c}$$

式中$N_K$ 爲非線性項，S爲L×L之矩陣，K 爲垂直層之指標L是垂直向之層數，S與垂直計算方法以及基本狀態之選擇有關。我們可以(3.1)的預報方程式爲基礎將$\zeta$，D以及$\Phi$等做變數分離，使之成爲水平以及垂直之結構方程式。(3.1) 式的垂直轉換牽涉到S固有函數之求取，然後再利用這些正交固有函數去執行類似之轉換。最後我們會將S轉換成以$C_K^2$爲要素之 diagonal 矩陣。$C_K^2$是第k 個垂直波模的重力波速之平方，經過垂直轉換之後，水平結構方程可以表示爲

$$\frac{\partial \mathrm{W}_k}{\partial t} + L_k\mathrm{W}_k = \mathrm{N}_k. \tag{3.2}$$

上式中$C_K^2$係包含在線性運算元$L_K$中。下面我們來說明如何求解此類似Sturn-Liouville Problem之問題。經過適當的選擇基本狀態後$L_K$通常會是一Skew-Hermitian的運算元

$$\langle L_k \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f}, -L_k \mathbf{g} \rangle, \tag{3.3}$$

其中<，>是一適當的內積(inner product )，而g及f滿足系統的邊界條件。對全球模式而言，此內積即是合符轉換( Hough transform )。Skew-Hermitian運算元具有下列之特性：固有值爲虛數，固有函數具正交性，而且固有函數爲一組完整之系統。這些特性可以表示爲

$$L_k \mathbf{K}_{kmns}(\lambda,\mu) = i\nu_{kmns}\mathbf{K}_{kmns}(\lambda,\mu), \tag{3.4}$$

其中$L_k$運算元的虛固有值$i\nu_{kmns}$，是模式正模的頻率。固有函數$K_{kmns}(\lambda, \mu)$即是大家所熟知的球面合符函數。而且它滿足下列之正交特性，

$$\langle \mathbf{K}_{kmns}(\lambda,\mu), \mathbf{K}_{k'm'n's'}(\lambda,\mu) \rangle = \begin{cases} 1, & \text{if } (k,m,n,s) = (k',m',n',s') \text{;} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.5}$$

爲了完整，我們將向量$W_K$對固有函數展開

$$\mathbf{W}_k(t,\lambda,\mu) = \sum_{kmns} W_{kmns}(t)\mathbf{K}_{kmns}(\lambda,\mu), \tag{3.6}$$

式中m，分別爲緯向以及經向之波數，S爲旋轉波或慣性重力波之運動型態。利用方程式(3.5) 正交之特性，我們可以由下式計算$W_{kmns}(t)$

$$W_{kmns}(t) = \langle \mathbf{W}_k(t,\lambda,\mu), \mathbf{K}_{kmns}(\lambda,\mu) \rangle. \tag{3.7}$$

方程式(3.6)及(3.7)爲固有函數展開之轉換對(transform Pair)，接著我們可以用(3.3) 式之內積以及$K_{kmns}(\lambda, u)$，來推導$W_{kmns}(t)$之波譜方程式

$$\langle \frac{\partial \mathbf{W}_k}{\partial t}, \mathbf{K}_{kmns}(\lambda,\mu) \rangle + \langle L_k\mathbf{W}_k, \mathbf{K}_{kmns}(\lambda,\mu) \rangle = \langle \mathbf{N}_k, \mathbf{K}_{kmns}(\lambda,\mu) \rangle. \tag{3.8}$$

引用Skew-Hermitian運算元之定義以及(3.4)式我們可以得到

$$\begin{aligned} \langle L_k\mathbf{W}_k, \mathbf{K}_{kmns}(\lambda,\mu) \rangle &= \langle \mathbf{W}_k, L_k\mathbf{K}_{kmns}(\lambda,\mu) \rangle \\ &= \langle \mathbf{W}_k, i\nu_{kmns}\mathbf{K}_{kmns}(\lambda,\mu) \rangle \\ &= i\nu_{kmns}\langle \mathbf{W}_k, \mathbf{K}_{kmns}(\lambda,\mu) \rangle. \end{aligned} \tag{3.9}$$

方程式(3.8)也可以改寫成

$$\frac{dW_{kmns}(t)}{dt} + i\nu_{kmns}W_{kmns}(t) = N_{kmns}, \tag{3.10}$$

式中

$$N_{kmns} = \langle \mathbf{N}_k, \mathbf{K}_{kmns}(\lambda,\mu) \rangle. \tag{3.11}$$

經由上述之步驟我們就可以將原始之控制方程式(3.1)轉換爲(3.11) 的波譜方程式。轉換過程有許多可以撰擇之變因存在，例如我們可以選擇球面，f平面，中緯度或赤道之$\beta$平面，甚至圓柱幾何系統。球面案例所使用之Hough 轉換，在赤道$\beta$平面時可由Hermite 轉換取代。在中緯度$\beta$平面時則可由傅利葉轉換取代，至於在圓柱幾何時則可Bessel轉換來代換。值得一提的是，靜力平衡並不是必須的，此方法既使對非靜力平衡之問題，如非彈性平衡系( Anelastic System )，布新尼系統(Boussinesq System)，甚或完全可壓縮之方程系統均可應用。

當控制方程式表示成(3.11)式的正模型式時，很直接即可進行非線性正模初始化。第一步是將$W_{kmns}$劃分爲慢速模( Slow mode ) 或低頻波以及快速模( fast mode ) 或高頻波兩部分。對非線性正模初始化而言，慢速波模之振幅並不會改變，但是快速模之振幅則由下述來決定。假設模式初始時間$dW_{kmns}/dt$夠小則(3.11)式變爲

$$W_{kmns} = -\frac{i}{\nu_{kmns}}N_{kmns}, s = fast\ \ modes. \tag{3.12}$$

在(3.12)中$N_{kmns}$係$W_{kmns}$的非線性函數，此方程式可由固定點之反覆法求解。

$$W_{kmns}^{(r+1)} = -\frac{i}{\nu_{kmns}}N_{kmns}(W_{kmns}^{(r)}), s = fast\ \ modes. \tag{3.13}$$

其中上足碼 r 爲反覆數( iteration number )。

事實上各種場之正模分解係以變數之波譜描述來進行，據此我們可由下列變數之展開來求得(3.1) 式的波譜描述

$$x_k(\lambda,\mu,t)=\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=|m|}^{M}x_{kn}^m(t)P_n^m(\mu)e^{im\lambda}, \qquad (3.14)$$

式中， $x_{kn}^m(t)$ 是球面調和係數之列向量，詳細之波譜描述在下節中說明。

## 四波譜展開

本節我們將推導場變數之波譜表示法以及討論對應之高斯格點值( Gaussian grid point Value )的特性。任一全球場變數X在三角截斷( triangular truncation ) M下的波譜展開可以定義爲

$$X(\lambda,\mu,t)=\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=|m|}^{M}X_n^m(t)P_n^m(\mu)e^{im\lambda}. \qquad (4.1)$$

由於全球變數場是實數，$X_n^m=X_n^{-m*}$，因此只須儲存非負值m之波譜係數( 式中＊表示複變數共軛數 )，n 階m自由度的正規化associated Legendre function $P_n^m$ (M)定義如下

$$P_n^m(\mu)=\{\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\}^{1/2}(1-\mu^2)^{m/2}\frac{d^mP_n(\mu)}{d\mu^m}, \qquad (4.2)$$

式中$P_n(\mu)$ 是Ordinary Legendre 多項式

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n. \qquad (4.3)$$

依照上述之正規化( normalization ) ，正交條件

$$\int_{-1}^{-1}P_n^m(\mu)P_l^m(\mu)d\mu=\delta_{nl} \qquad (4.4)$$

是成立的。應用球面調和函數之正交特性，由(4.1)式可以求得波譜係數

$$X_n^m(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}X(\lambda,\mu,t)P_n^m(\mu)e^{-im\lambda}d\lambda d\mu. \qquad (4.5)$$

(4.5) 式對λ之積分可以採用快速傅利葉轉換(FFT)，其餘部份則使用高積分法( Gaussian Quadrature )

$$X_n^m(t)=\sum_{j=1}^{K}w_jX_m(t,\mu_j)P_n^m(\mu_j) \qquad (4.6)$$

其中$W_j$ 是高斯權重( Gaussian Weights )，Xm 是X的傅利葉轉換。高斯緯度$\varphi_j(\mu_j)$由K階Ordinary Legendre 多項式來決定。對2K-1自由度之多項式而言高斯和是完整的，權重函數$W_j$爲

$$w_j=\int_0^{\infty}e^{-\mu}\prod_{i\neq j}^{K}[\frac{\mu-\mu_i}{\mu_j-\mu_i}]d\mu. \qquad (4.7)$$

最後我們再把波譜係數利用下式轉換到物理格點上，即

$$X(\lambda_l,\mu_j,t)=\sum_{m=-m}^{M}\sum_{n=|m|}^{M}X_n^m(t)P_n^m(\mu_j)e^{im\lambda_l}. \qquad (4.8)$$

方程式(4.6)及(4.8)組成一轉換對，(4.6) 式將變數由物理空間轉換至波譜空間，反之(4.8)式將之轉換回來。(4.6) 式Xm 的計算以及(4.8) 式對m的累加均可以快速傅利葉轉換來執行。非線性項之波譜係數可用轉換方法來計算，爲了減小二次非線性項轉換之錯析誤差( aliasing error )在物理空間需要3M+1點之λ以及K=(3M+1)/2點之μ。

Legendre函數採用Belousou(1962)推荐之遞推公式(recursion formulas ) 來計算，該方法牽涉到(m，n-1)，(m-2，n-1)以及(m-2，n-2)之值。

$$P_n^m=c_n^mP_{n-2}^{m-2}-d_n^m sin(\varphi)P_{n-1}^{m-2}+e_n^m sin(\varphi)P_{n-1}^m, \qquad (4.9)$$

其中

$$c_n^m=\{\frac{(2n+1)(m+n-1)(m+n-3)}{(2n-3)(m+n)(m+n-2)}\}^{1/2};$$
$$d_n^m=\{\frac{(2n+1)(m+n-1)(n-m+1)}{(2n-1)(m+n)(m+n-2)}\}^{1/2};$$
$$e_n^m=\{\frac{(2n+1)(n-m)}{(2n-1)(m+n)}\}^{1/2}.$$

利用此公式計算時需要(m，n)波數平面上由(0，0)，(0，n-1)及(m，n-1)所定義之三角形的前一個時間值，m=0與m=1之值另行求取。Belousou方法引用如下：

$$P_n^0 = A_n \sum_{j=0}^{(n-1)/2} b_{jn} sin((n-2j)\varphi) + \frac{\delta_{n/2,n}}{2}$$

$$P_n^1 = A_n \sum_{j=0}^{(n-1)/2} b'_{jn} cos((n-2j)\varphi)$$

式中，n為奇數時 $\delta$ 為0 ，n為偶數時 $\delta$ 值為1，$A_n$，$b_{jn}$及$b'_{jn}$可由下列關係式來求得

$$A_n = A_{n-1}\{1 - \frac{1}{(2n)^2}\}^{1/2}, \quad A_0 = \sqrt{2}$$

$$b_{j+1,n} = b_{jn}\frac{2j-1}{j}\frac{n-(j-1)}{2n-(2j-1)}, \quad b_{0n} = 1,$$

$$b'_{jn} = \frac{n-2j}{n(n+1)^{1/2}} b_{jn}.$$

由第2節之控制方程組可知，計算相依變數之時間趨勢時須有格點之水平導數值。此水平導數之離散值可以由(4.1) 之展開式來求得，即

$$[\frac{\partial X}{\partial \lambda}]_{lj}(t) = \sum_{m=-m}^{M} \sum_{n=|m|}^{M} imX_n^m(t)P_n^m(\mu_j)e^{im\lambda_l} \qquad (4.10)$$

$$[\frac{\partial X}{\partial \mu}]_{lj}(t) = \sum_{m=-m}^{M} \sum_{n=|m|}^{M} X_n^m(t)[\frac{\partial P_n^m(\mu_j)}{\partial \mu}]e^{im\lambda_l}. \qquad (4.11)$$

為了計算平流趨勢項，我們也需要計算餘弦權重速度U及V的格點值。結合流函數( Stream function)，速度位(Velocity potential )以及下列關係式

$$\nabla^2\{P_n^m(\mu)e^{im\lambda}\} = -[\frac{n(n+1)}{a^2}]P_n^m(\mu)e^{im\lambda},$$

U及V藉由下式可與渦度ζ及輻散度D牽聯在一起

$$U(\lambda,\mu,t) = \sum_{m=-m}^{M} \sum_{n=|m|}^{M} \frac{-im}{n(n+1)} D_n^m(t)P_n^m(\mu)e^{im\lambda}$$

$$+ \sum_{m=-m}^{M} \sum_{n=|m|}^{M} \frac{1-\mu^2}{n(n+1)}\zeta_n^m(t)\frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu}e^{im\lambda}, \qquad (4.12)$$

$$V(\lambda,\mu,t) = \sum_{m=-m}^{M} \sum_{n=|m|}^{M} \frac{-im}{n(n+1)} \zeta_n^m(t)P_n^m(\mu)e^{im\lambda}$$

$$+ \sum_{m=-m}^{M} \sum_{n=|m|}^{M} \frac{1-\mu^2}{n(n+1)}D_n^m(t)\frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu}e^{im\lambda} \qquad (4.13)$$

渦度及散度之波譜係數可以由(4.12)及(4.13)式，採用波譜表示之格點U，V值來求取，其中展開函數是正交的，U，V在極點為零值之邊界條件。最後的型式可以表示如下：

$$\zeta_n^m(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{im}{1-\mu^2}V(\lambda,\mu,t)P_n^m(\mu)e^{-im\lambda}d\mu d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}U(\lambda,\mu,t)\frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu}e^{-im\lambda}d\mu d\lambda, \quad (4.14)$$

$$D_n^m(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{im}{1-\mu^2}U(\lambda,\mu,t)P_n^m(\mu)e^{-im\lambda}d\mu d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}V(\lambda,\mu,t)\frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu}e^{-im\lambda}d\mu d\lambda. \quad (4.15)$$

(4.12)及(4.13)之積分方法與(4.8) 式類似。(4.14)，(4.15)式之積分方法則與(4.6) 式相同。

## 五模式積分方法

當我們使用外顯( explicit )絕熱法處理動力變數時，積分時距必須有所限制以避免計算不穩定。對大氣系統而言，時間截斷誤差遠比空間截斷誤差來得小，因此積分時距的考慮主要以穩定性為主，精確度次之。這種情況顯示外顯積分法實在不夠有效率。例如三角截斷M的積分時距必須滿足所謂的CFL條件，即

$$\Delta t \le \frac{a}{U_{max}\sqrt{M(M+1)}},$$

式中速度Umax 是最大平流風速與外部重力波速的和，該速度最大可達400m/sec。對T79截斷而言，上述條件下所能允許之最大積分時距約200 秒左右。為了要加大積分時距,重力波之傳播欲引用Robert et al. (1972)所發展之半隱積分法(Semi-implicit method)來處理。這種處理方式最後之結果係將 $\pi$ ，$\theta$ 以及

D方程式中與重力波傳播有關的輻散項以及重力位項加以校正。詳細之處理流程類似Hoskins and Simmons (1974)之方法，此處不再詳述。經由半隱時間積分法對原始方程式之測試結果顯示，使用較大積分時距所引起之時間截斷誤差之數量級仍然比空間截斷誤差小得多。因此未來氣象局新的全球模式，將包含隱式緯向平流以及高波數阻尼( damping ) 之技巧，該技巧之詳述可參考Simmons and Jaraud (1983)。

設計中的預報流程將從絕熱計算開始，第一個積分步驟將使用非線性正模初始化調節最佳內插( Optimum interpolation ) 後之模式座標分析場，其後接連的積分步驟即可直接使用前一個積分步驟的結果。$\pi$，$\zeta$，D以及$\theta$爲預報模式的動力變數，相關的動力方程式分別爲(2.1)，(2.4)，(2.5) 以及(2.6) 式。水汽比濕q方程式也取(2.6) 之型式。首先我們垂直分層計算，並且利用轉換方法來計算變化趨勢，然後藉半隱法處理重力波傳播來調整$\pi$，D以及$\theta$的外顯絕熱變化趨勢，並以內隱法處理緯向平流來修正$\zeta$及q的外顯絕熱變化趨勢。經過上述之調節之後，我們再以蛙跳法( leap-frog Scheme )修正$\pi$，$\zeta$，D以及q在 t +Δ t 的絕熱波譜係數值，即

$$X^{(ad)m}_{k\ \ n}(t+\Delta t) = X^{m}_{kn}(t-\Delta t) + 2\Delta t \dot{X}^{(ad)m}_{k\ \ n}(t) \qquad (5.1)$$

式中X代表$\pi$，$\zeta_k$，$D_k$以及$q_k$。上足碼(ad) 標記趨勢項係從絕熱計算而來，而且 t +Δ t 場也只由這些絕熱趨勢來計算。$\theta^{m}_{kn}$則由絕熱以及輻射趨勢來計算

$$\theta^{(rad)m}_{k\ \ n}(t+\Delta t)$$

$$= \theta^{m}_{kn}(t-\Delta t) + 2\Delta t[\dot{\theta}^{(ad)m}_{k\ \ n}(t) + \dot{\theta}^{(rad)m}_{k\ \ n}(t)], \qquad (5.2)$$

式中(rad)之符號指出，計算中採用了絕熱以及輻射之趨勢。利用(4.8)，(4.12) 以及(4.13)我們可以計算速度、位溫以及水汽之物理空間場，這幾個場分別以$U^{(ad)}_{lkj}$，$V^{(ad)}_{lkj}$，$\theta^{(ad)}_{lkj}$以及$q^{(ad)}_{lkj}$來表示，式中 l=1，3M+1；k=1，L而j=1，(3M+1)/2。

詳細之非絕熱參數化不在本文描述，所有非絕熱過程內隱計算之，並將這些場之計算值垂直調節到物理空間之格點場，參數化在每一個積分步驟均起動，起動之次序如下：

(一)地面通量以及亂流垂直擴散

(二)重力波曳力

(三)淺對流參數化

(四)Arakawa and Schubert 的穿透積雲對流

(五)長波、短波輻射

(六)大尺度降水

爲了節省CPU時間，輻射參數化並不在每一積分時段都起動，一旦輻射被起動，就須從溫濕度最後之非絕熱預報來計算輻射趨勢。重力波曳力以及垂直擴散是唯一兩個會改變速度場之參數化，速度之調節方法如下：

$$U^{(gw)}_{lkj}(t+\Delta t) = U^{(ad)}_{lkj}(t+\Delta t) + \Delta U^{(gw)}_{lkj}$$

$$U^{(vf)}_{lkj}(t+\Delta t) = U^{(gw)}_{lkj}(t+\Delta t) + \Delta U^{(vf)}_{lkj}$$

式中上足碼(gw)及(vf)分別代表重力波曳力以及垂直擴散，V場以類似之式子處理之。

垂直擴散，淺對流混合，穿透積雲對流以及大尺度降水均會影響到溫度場以及水汽場，例如溫度之絕熱調節方法如下：

$$\theta^{(vf)}_{lkj}(t+\Delta t) = \theta^{(rad)}_{lkj}(t+\Delta t) + \Delta\theta^{(vf)}_{lkj},$$

$$\theta^{(sc)}_{lkj}(t+\Delta t) = \theta^{(vf)}_{lkj}(t+\Delta t) + \Delta\theta^{(sc)}_{lkj},$$

$$\theta^{(cu)}_{lkj}(t+\Delta t) = \theta^{(sc)}_{lkj}(t+\Delta t) + \Delta\theta^{(cu)}_{lkj},$$

$$\theta^{(sp)}_{lkj}(t+\Delta t) = \theta^{(cu)}_{lkj}(t+\Delta t) + \Delta\theta^{(sp)}_{lkj}.$$

上足碼(SC)，(CU)以及(SP)分別表示淺對流混合，大尺度積雲對流以及大尺度降水。比濕q也以類似之方法處理。物理空間計算之最後結果是網格點上 t +Δ t 時之溫度、比濕以及速度場。

計劃中的全球預報系統之預報流程總結如下：

(一)資料同化：品質控制以及最佳化內插。

(二)非線性正模初始化。

(三)在物理空間計算Xk( $\pi$，$\zeta_k$，$D_k$及$q_k$之絕熱變化趨勢。

(四)將變化趨勢轉換至波譜空間，由 (4.6) 式取得 $\dot{X}^{(ad)m}_{kn}$ 及 $\dot{\theta}^{(ad)m}_{kn}$ 之值。

(五)利用半隱法調整 $\dot{\pi}^{m}_{kn}$ ，$\dot{D}^{m}_{kn}$ 以及 $\dot{\theta}^{m}_{kn}$ 的波譜趨勢利用內隱式緯向平流法調整 $\dot{\xi}^{m}_{kn}$ 和 $q^{m}_{kn}$ 的波譜趨勢。

(六)由(5.2) 式更新 $\theta^{m}_{kn}$ 之波譜係數。(5.1)式更新 $X^{m}_{kn}$ 之波譜係數。

(七)將更新之波譜係數利用(4.8) 式轉換回物理空間 ($X^{(ad)}_{lkj}$ 及 $\theta^{(ad)}_{lkj}$)。

(八)由(4.12)及(4.13)在物理空間求出 $U^{(ad)}_{lkj}$ 及 $V^{(ad)}_{lkj}$

(九)起動物理程式套，調節格點場。

(十)由(4.6)將預報變數 $X_{lkj}$ 及 $\theta_{lkj}$ 轉換到波譜空間。

(十一)採用水平擴散、牛頓冷卻以及羅伯特濾波來處理 $X^{m}_{kn}$ 及 $\theta^{m}_{kn}$ 的波譜係數。

(十二)將 $X^{m}_{kn}$ 及 $\theta^{m}_{kn}$ 的波譜係數轉換回物理空間。

(十三)由(2.3) 求解 $\Phi_{lkj}$ ，(2.2)求解 $\dot{\sigma}_{lkj}$。

(十四)回到步驟(三)或得到結果。

整個預報過程儲存了 $\pi^{m}_{n}$，$\xi^{m}_{kn}$，$D^{m}_{kn}$ 及 $q^{m}_{kn}$ 等變數三個時間層之波譜係數，即前一時間層 ($t-\Delta t$) ，現在時間層 ($t$) 以及波譜時間變化趨勢。其中 k 是垂直分層計算之指標。由於不是每一個積分步驟都起動輻射參數化，我們也需儲存源於輻射影響之位溫變化趨勢的波譜係數。另外我們僅需儲存一個時間層之 $\pi_{lj}$，$\xi_{lkj}$ ，$D_{lkj}$，$U_{lkj}$ ，$V_{lkj}$ ，$\theta_{lkj}$，$q_{lkj}$，$\Phi_{lkj}$，$\sigma_{lkj}$ ，$P_{lkj}$ 及 $P_{lk+1/2j}$ 等高斯格點場。式中 l ，j 分別爲經度及緯度之指標。

## 六結　語

本文我們討論了全球波譜斜壓模式之公式以及積分之流程，當然波譜法僅使用於水平向之計算，垂直向仍採用標準之有限差分計算法。對全球模式而言，轉換之基本函數爲球面調和函數。另外我們也討論了模式結構之設計以及參數化之影響，最後我們排列出物理參數化起動之次序。

爲了使各個模式中心易於交換物理參數化之設計，Kalnay et al.(1989) 提出一套副程式設計之準則。他的基本理念就是使副程式透明、結構化。在未來整個模式之發展過程中我們將會遵循這種結構化之設計原則，盡量依照不同之目的區分副程式，使整個程式結構透明、清楚。大家都了解清楚明白之模式結構對於未來模式之維持與發展會有相當大的助益。基於上述之原則，物理參數化將會與絕熱方程式之空間計算方法無關。波譜計算以及時間計算將在不同之副程式中進行，而轉換之副程式也將和模式其他之結構無關。

對非線性之波譜模式而言，非線性項之係數由轉換方法來計算，轉換程式聯結了物理空間場及對應之波譜係數間的轉換，這些轉換在每一積分時段中都會被起動。因此有效率之波譜模式對轉換程式之設計必須特別小心。另外爲了因應未來超級電腦平行處理以及多工並行之特性，物理空間場可能需要考慮以i、k以及j 之順序來儲存。

## REFERENCES


Arakawa,A.and W.Schubert, 1974:Interaction of a cumulus cloud ensemble with the large-scale environment, Part I.J.Atmos. Sci,31,674-701.

Belousov, S. L., 1962: Tables of Normalized Associated Legendre Polynomials. Pergamon Press.

Boer,G.J.,N.A.Mcflarlane, R. Laprise, J. D. Henderson and J.-P. Blanchet, 1984:The Canadian climate center spectral atmospheric general circulation model. Atmos. Ocean, 397-429.

Charney, J. G.,1962: Integration of the primitive and balance equations. Proc. Int. Symp. Numerical Weather Prediction. Tokyo, Meteorol. Soc. Japan, 131-152.

Charney, J. G., R. Fjortoft and J.von Newmann, 1950: Numerical integration of the barotropic vorticity equation. Tellus, 2, 237-254.

Charney, J. G., B. Gilchrist and F. Schuman, 1956:The prediction of general quasigeostrophic motions. J. Meteor., 13, 489-499.

Deardoff, J. W., 1978: Efficient prediction of ground surface temperature and moisture, with inclusion of a layer of vegetation.J.Geophys. Res., 83,1889-1903.

Eliasen, E., B. Machenhauer, and E. Rasmussen, 1970:On a mumerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields. Report No. 2,Institut for Teoretisk Meteorologi, Kobenhavns Universitet, 35 pp.

Hoskins, B. J. and A. J. Simmons, 1975: A multi-layer spectral model and the semi-implicit method. Quart. J Roy. Met. Soc., 101, 637-655.

Kuo, H. L., 1974:Further studies of the parameterization of the influence of cumulus convection on large-scale flow. J. Atmos. Sci., 31, 1232-1240.

Leith C. E., 1971: Atmospheric predictability and two-dimensional turbulence. J. Atmos. Sci., 28, 145-161.

McFarlane, N. A., 1987: The effect of orographically excited gravity wave drag on the general circulation of the lower stratosphere and troposphere. J. Atmos. Sci., 44,1775-1800.

Phillips, N. A., 1966: the equations of motion for a shallow rotating atmosphere and the "traditional approximation." J. Atmos. Sci., 23, 626-628.

Robert, A. J., J. Henderson, and C. Turnbull, 1972: An implicit time integration scheme for baroclinic modes of the atmosphere. Mon. Wea. Rev., 100,329-335.

Schuman, F. G. and J. B. Hovermale, 1968: An operational six-layer primitive equation model. J. Appl. Meteor., 7,525-547.

Simmons, A. J. and M. Jarraud, 1983: The design and performance of the new ECMWF's Workshop on Numerical Methoeds for Weather Prediction, Volume 2,5-9 September 1983,113-164.

# ON THE DEVELOPEMENT OF GLOBAL SPECTRAL MODEL

Hung-chi Kuo

Department of Atmospheric Science
National Taiwan University

Pay-Liam Lin

Department of Atmospheric Science
National Central University

## ABSTRACT

The formulation and the integration cycle of an adiabatic global spectral baroclinic modezl are given. The spectral Method is used in the horizontal discretization while the standard finite difference is used in the vertical discretization. The transform techniques is employed and the basis functions ard spheerical harmonics. The structural design with physical parameterization are discussed. The proposed calling sequence of physical parameterization is persented.

Kalnay et al. (1989) gives a set of criteria for coding subroutines to facilitate the exchange of physical parameterization between modeling centers. The basic idea are to make subroutines "canned". We will follow this" canned routine" concept throughout our model development. We will try to separate the subroutines based on its purpose. A clean model structure is expected to serve the purpose of future model maintainence. Based on this, the physical parameterization will be independent from the spatial discretization of adiabatic equations. The spectral discretization and time discretization will be in separate subroutines and the transform routines will be independent from the rest of model.

For a nonlinear spectral model, the coefficients of nonlinear terms are evaluaed by the transform method. Transform routines link the transformation between the physical space field and its corresponding spectral coefficient . They are called every time step. Thus, a key to an efficient spectral model is the careful coding of transform routines.